应用数学和力学，第13卷第10期（1992年10月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

求解守恒型奇异摄动问题的一个一致收敛高阶方法

吴启光　　孙晓弟

（南京大学数学系，1991年9月9日收到）

摘　要

本文对守型恒奇异摄动问题(1.1)给出了一个一致收敛的高阶方法．首先将原问题(1.1)转换为二个一阶初值问题(1.4)，即(1.1)的解是(1.4)的两个解的线性组合．然后对初值问题(1.4)构造了一个$O(h^{m+1})$一致收敛的差分格式，因此由关系式(1.3)，我们得到了原问题的一个$O(h^{m+1})$一致精度的解，这里m是任意给定的非负整数．最后给出了数值结果．

关键词　一致收敛高阶方法　奇异摄动问题　初值问题

一、引　言

关于奇异摄动问题数值解，目前已有大量的工作．尤其是对自伴的和非自伴的常微分方程奇异摄动问题，人们已构造了能任意阶一致收敛的差分格式，见文[3,7～10]．但我们可以看到，当一致收敛的阶数大于2时，这些格式是非常复杂的．因此本文将对以下的守恒型常微分方程奇异摄动问题

$$\left.\begin{array}{ll}\varepsilon u''+(a(x)u)'=f(x), & 0<x<1\\ u(0)=\mu_0,\ u(1)=\mu_1 & \end{array}\right\}\tag{1.1}$$

给出一个比较简单的一致收敛的高阶方法，其中ε是$(0,1]$中参数，μ_0，μ_1是边界值．我们还假设函数$a(x)\in W^{m+1}\equiv\{F:F(x)\in C^m[0,1],\ F^{(m)}\in\mathrm{Lip}1\}$，$f(x)\in W^m$，这里$m$是任意给定的非负整数，且$a(x)>\alpha>0$．

本文给出的一致收敛高阶方法的基本思想可描述如下．令$u_i(x)$，$i=1,2$，是以下二个二阶初值问题的解，

$$\left.\begin{array}{ll}\varepsilon u_i''(x)+(a(x)u_i(x))'=F_i(x), & 0<x<1\\ u_i(0)=D_i,\ u_i'(0)=E_i & \end{array}\right\}\tag{1.2}$$

其中$F_1(x)=f(x)$，$F_2(x)\equiv0$，$E_1=D_2=0$，$D_1=\mu_0$，$E_2=1/\varepsilon$．显然问题(1.1)的解$u(x)$可表示为

$$u(x)=u_1(x)+\gamma u_2(x)$$

其中$\gamma=(\mu_1-u_1(1))/u_2(1)$．由于

$$u_2(1)=\varepsilon^{-1}\int_0^1 \exp\left[-\int_t^1 \varepsilon^{-1}a(s)ds\right]dt$$

$$\geqslant A(1-\exp[-A/\varepsilon])\geqslant M>0$$

其中$A=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} a(x)$，$M=A(1-\exp[-A])$，因此若得到了$u_i(x)$的近似解$u_i^h(x)$，$i=1,2$，满足

$$|u_i^h(x)-u_i(x)|\leqslant Mh^p, \qquad p>0$$

则

$$u^h(x)\equiv u_1^h(x)+(\mu_1-u_1^h(1))/u_2^h(1)\cdot u_2^h(x) \tag{1.3}$$

满足

$$|u^h(x)-u(x)|\leqslant Mh^p$$

其中（及整篇文章中）M，M_1，…表示不依赖于ε和h的某些正常数。又由于方程(1.2)可化成以下的二个一阶初值问题

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon u_i'(x)+a(x)u_i(x)=G_i(x) \qquad (i=1,2)\\&u_i(0)=D_i\end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

其中 $$G_i(x)=\int_0^x F_i(x)dx+\varepsilon E_i+a(0)D_i$$

所以原问题(1.1)的求解化成了两个一阶初值问题(1.4)的求解。

在第二和三节中，我们对初值问题（1.4）构造了一个任意阶一致收敛的差分格式，因此由关系式(1.3)可得原问题(1.1)的一个任意阶一致精度的解。最后在第四节给出了一些数值结果。

二、精确差分格式

为方便起见，将初值问题(1.4)改写成以下的一般形式

$$\left.\begin{aligned}&Lu\equiv\varepsilon u'+a(x)u=\tilde{h}(x), \qquad 0<x<1\\&u(0)=\mu\end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

本节将给出(2.1)的一个精确差分格式。

构造均匀网格$I_h=\{x_i:x_i=ih,\ i=0,1,\cdots,N,Nh=1\}$。记$u_i^h$为$u_i=u(x_i)$的近似值。由于方程(2.1)的解由初始条件和右端唯一确定，故可将(2.1)的解$u(x)$表示为

$$u(x)=v_1^i(x)u(x_i(+v_0^i(x), \qquad x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1} \tag{2.2}$$

其中 $v_k^i(x)$，$k=0,1$满足

$$\left.\begin{aligned}&Lv_k^i(x)=\tilde{h}_k(x), \qquad k=0,1, \qquad x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}\\&v_0^i(x_i)=0,\ v_1^i(x_i)=1\end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

这里 $\tilde{h}_1(x)\equiv 0$，$\tilde{h}_0(x)=\tilde{h}(x)$。令$x=x_i+sh$，$w_k^i(s)=v_k^i(x_i+sh)$ $(k=0,1)$，$\tau=h/\varepsilon$，则由(2.2)得

$$u(x_i+sh)\equiv w_1^i(s)u(x_i)+w_0^i(s), \qquad s\in[0,1] \tag{2.4}$$

其中$w_k^i(s)$($k=0$, 1(是以下方程的解

$$\left.\begin{array}{l} lw_k^i \equiv dw_k^i/ds+\tau a(x_i+sh)w_k^i=\tau\tilde{h}_k(x_i+sh) \\ \qquad s\in(0,1],\ k=0,1 \\ w_0^i(0)=0,\ w_1^i(0)=1 \end{array}\right\} \tag{2.5'}$$

由极值原理可证

$$0<w_1^i(s)\leqslant\exp[-\alpha\tau s] \tag{2.6}$$

$$(0\leqslant s\leqslant 1)$$

$$|w_0^i(s)|\leqslant M(1-\exp[-\alpha\tau s]) \tag{2.7}$$

其中 $M=\alpha^{-1}\max\limits_{0<x<1}|\tilde{h}(x)|$。

在(2.4)式中令$s=1$，记$u_i=u(x_i)$，则得方程(2.1)的精确差分格式

$$\left.\begin{array}{ll} u_{i+1}=w_1^i(1)u_i+w_0^i(1), & (i=0,1,\cdots,N-1) \\ u_0=\mu \end{array}\right\} \tag{2.8}$$

上述格式具有性质

$$|u_i|\leqslant|\mu|+\sigma^{-1}\max_{0<j<N-1}|w_0^j(1)|,\qquad (i=0,1,\cdots,N) \tag{2.9}$$

其中$\sigma=1-\exp[-\alpha\tau]$。事实上，由(2.6)～(2.8)，可得

$$|u_{i+1}|=\left|\sum_{j=0}^{i}w_0^j(1)\prod_{l=j+1}^{i}w_1^l(1)+\mu\prod_{j=0}^{i}w_1^j(1)\right|$$

$$\leqslant\max_{0<j<i}|w_0^j(1)|\sum_{j=0}^{i}\exp[-\alpha\tau j]+|\mu|$$

$$\leqslant|\mu|+\sigma^{-1}\max_{0<j<N-1}|w_0^j(1)|$$

由于函数$w_k^i(s)$一般没有显式表达式，因此精确差分格式(2.8)是不实用的。为了构造任意阶一致收敛格式，首先考察如下格式

$$\left.\begin{array}{ll} Z_{i+1}=A_1^iZ_i+A_0^i, & (i=0,1,\cdots,N-1) \\ Z_0=\mu \end{array}\right\} \tag{2.10}$$

其中A_k^i，$k=0,1$是$w_k^i(1)$的近似，满足

$$|A_1^i-w_1^i(1)|\leqslant\nu_1\leqslant\sigma/2,\ |A_0^i-w_0^i(1)|\leqslant\nu_0 \tag{2.11}$$

引理1 令u和$\{Z_i\}$分别是(2.1)和(2.10)的解，则

$$|Z_i|\leqslant|\mu|+(\sigma-\nu_1)^{-1}\max_{0<i<N-1}|A_0^i| \tag{2.12}$$

$$|Z_i-u(x_i)|\leqslant\sigma^{-1}(\nu_0+\nu_1(|\mu|+(\sigma-\nu_1)^{-1}\max_{0<i<N-1}|A_0^i|)) \tag{2.13}$$

证 类似于(2.9)式可证

$$|Z_{i+1}|\leqslant|\mu|+(1-A)^{-1}\max_{0<i<N-1}|A_0^i|$$

其中 $A=\max\limits_i|A_0^i|$。由假设(2.11)易得$1-A\geqslant\sigma-\nu_1$，故(2.12)得证。

为证(2.13)，令$y_i=Z_i-u_i$。由(2.8)和(2.10)得，$y_0=0$，$i=0,1,\cdots,n-1$，

$$\begin{aligned} y_{i+1}-w_1^i(1)y_i&=Z_{i+1}-w_1^i(1)Z_i-w_0^i(1) \\ &=Z_{i+1}-w_1^i(1)Z_i-(Z_{i+1}-A_1^iZ_i)+A_0^i-w_0^i(1) \\ &=(A_1^i-w_1^i(1))Z_i+(A_0^i-w_0^i(1)) \end{aligned}$$

因此利用(2.9)和(2.12)易得(2.13)。

引理证毕。

三、截断差分格式

从引理1可以看出，为了得到高精度格式，关键是对$w_k^i(1)$，$k=0,1$构造高阶逼近。为了逼近$w_k^i(1)$，令

$$w_k^i(s)=\sum_{n=0}^{m}h^n w_{kn}^i(s)+h^{m+1}r_{km}^i(s),\qquad (k=0,1) \tag{3.1}$$

将函数$a(x_i+sh)$和$\tilde{h}_k(x_i+sh)$在$s=0$处泰勒展开，由(2.5)可得以下的递推关系式（为简单起见，省略上标i）：

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{l}w_{kn}\equiv dw_{kn}/ds+a(x_i)\tau w_{kn}=\tau H_{kn},\qquad s\in(0,1]\\&\qquad\qquad (k=0,1;\ n=0,1,\cdots,m)\\&w_{00}(0)=0,\ w_{10}(0)=1,\ w_{kn}(0)=0,\qquad n\geqslant 1;\ k=0,1\end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

其中$H_{k0}=\tilde{h}_{k0}$，对于$n\geqslant 1$，

$$H_{kn}=\tilde{h}_{kn}s^n-\sum_{j=0}^{n-1}a_{n-j}s^{n-j}w_{kj} \tag{3.3}$$

系数$\tilde{h}_{kn}$和a_n由公式$y_n=y^{(n)}(x_i)/n!$定义。余项r_{km}满足

$$\left.\begin{aligned}&lr_{km}=dr_{km}/ds+a(x_i+sh)\tau r_{km}=\tau\phi_{km},\qquad s\in(0,1]\\&r_{km}(0)=0\end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

其中

$$\phi_{km}=h^{-1}(\bar{\tilde{h}}_{km}-\tilde{h}_{km})s^m-\sum_{n=0}^{m}h^{-1}(\bar{a}_{m-n}-a_{m-n})s^{m-n}w_{kn} \tag{3.5}$$

$\bar{a}_n=a_n(\theta_i)$，$x_i<\theta_i<x_{i+1}$，$\bar{\tilde{h}}_{km}$类似定义。

为了以后分析的需要，给出以下引理。

引理2 令$y(s)\in C^1[0,1]$满足$y(0)=0$，$|ly|\leqslant M_1\tau$（或$|\tilde{l}y|\leqslant M_1\tau$），则

$$|y(s)|\leqslant M\sigma(s)\leqslant M\sigma \tag{3.6}$$

其中 $\sigma(s)=1-\exp[-\alpha\tau s]$。

证 由于

$$l\sigma(s)=\alpha\tau\exp[-\alpha\tau s]+a(x_i+sh)\tau(1-\exp[-\alpha\tau s])\geqslant\alpha\tau$$

和$\tilde{l}\sigma(s)\geqslant\alpha\tau$，因此我们可取

$$\alpha^{-1}M_1(1-\exp[-\alpha\tau s])$$

作为$y(s)$的闸函数，由极值原理易证(3.6)式，

$$|y(s)|\leqslant\alpha^{-1}M_1(1-\exp[-\alpha\tau s])$$

引理得证。

现在分析(3.1)式的函数$w_{kn}(s)$和$r_{km}(s)$。

引理3 若$a(x)$，$\tilde{h}_k(x)\in w^{m+1}$，则

$$|w_{kn}(s)|\leqslant M\sigma(s)\leqslant M\sigma,\qquad (n=1,2,\cdots,m;\ k=0,1) \tag{3.7}$$

$$|r_{km}(s)|\leqslant M\sigma(s)\leqslant M\sigma,\qquad (k=0,1) \tag{3.8}$$

证 由极值原理易证$|w_{10}(s)|\leqslant 1$，$|w_{00}(s)|\leqslant M\sigma$。因此$|H_{k1}|\leqslant M_1$，$k=0,1$，再利用

引理2可得$n=1$时的(3.7)式。归纳假设$1\leqslant j\leqslant n-1$时(3.7)式成立，则$|H_{kn}|\leqslant M_2$，又由引理2得$j=n$时的(3.7)式。由归纳法(3.7)式得证。注意到$a(x)$，$\tilde{h}_k(x)\in W^{m+1}$，故$|\phi_{km}|\leqslant M$。因此由引理2知(3.8)式成立。引理证毕。

显然，方程(3.2)有显式解，故舍去余项$h^{m+1}r_{km}$可得如下的截断差分格式：

$$\left.\begin{aligned}&u^h_{i+1}=A^m_{1i}u^h_i+A^m_{0i}, \qquad (i=0,1,\cdots,N-1)\\&u^h_0=\mu\end{aligned}\right\}\tag{3.9}$$

其中
$$A^m_{ki}=\sum_{n=0}^{m}h^n w^i_{kn}(1), \qquad (k=0,1)$$

定理1 设$a(x)>\alpha>0$和$\tilde{h}(x)$是W^{m+1}中函数，令$u(x)$和$\{u^h_i\}$分别是(2.1)和(3.9)的解，则

$$\max_{0<i<N}|u^h_i-u(x_i)|\leqslant Mh^{m+1}$$

证 由引理3得

$$|A^m_{ki}-w^i_k(1)|=h^{m+1}|r^i_{km}(1)|\leqslant\nu_k\equiv M_1h^{m+1}\sigma, \qquad (k=0,1)$$

这里我们假设h适当小使得$M_1h^{m+1}\sigma\leqslant\sigma/2$。由于

$$|A^m_{0i}|=|\sum_{n=0}^{m}h^n w^i_{0n}(1)|\leqslant\sum_{n=0}^{m}h^n M\sigma$$

因此利用引理1可得

$$\begin{aligned}|u^h_i-u(x_i)|&\leqslant\sigma^{-1}(\nu_0+\nu_1(\sigma-\nu_1)^{-1}\max_{0<i<N-1}|A^m_{0i}|)\\&\leqslant\sigma^{-1}(\nu_0+M_2\nu_1)\leqslant Mh^{m+1}\end{aligned}$$

定理证毕。

现在我们已对一阶初值问题(1.4)构造了一个一致的高阶格式，因此利用第一节介绍的技巧可得原问题(1.1)的一个一致高阶方法。具体结果描述如下。

定理2 假设$a(x)>\alpha>0$，且$a(x)\in W^{m+1}$，$f(x)\in W^m$。令$u(x)$是原问题(1.1)的解，$\{u^h_{1j}\}$，$\{u^h_{2j}\}$是差分格式(3.9)应用于初值问题(1.4)的解。则

$$\max_{0<j<N}|u^h_j-u(x_j)|\leqslant Mh^{m+1}$$

其中
$$u^h_j=u^h_{1j}+(\mu_1-u^h_{1N})/u^h_{2N}\cdot u^h_{2j}$$

四、数值结果

我们应用本文介绍的一致收敛高阶方法对奇异摄动问题

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon u''+u'=f(x,\varepsilon), \qquad 0<x<1\\&u(0)=\mu_0,\ u(1)=\mu_1\end{aligned}\right\}\tag{4.1}$$

进行了一系列数值计算，其中右端$f(x,\varepsilon)$，边界条件μ_0和μ_1由方程的精确解

$$u(x)=\sin x+(\exp[-x/\varepsilon]-\exp[-1/\varepsilon])/(1-\exp[-1/\varepsilon])$$

确定，我们对一系列的步长h和参数ε进行了计算（$\varepsilon\equiv h^s$，$h=1/8\sim h=1/256$），列出了最大值误差$E_\infty\equiv\max\limits_{0<i<N}|u^h_i-u(x_i)|$和数值收敛阶$\mathrm{Rate}\equiv(\ln E^1_\infty-\ln E^2_\infty)/\ln 2$，其中$E^1_\infty$，$E^2_\infty$分别是步长为$h$，$h/2$（$h=1/N$，$h=1/2N$）的网格上近似解的最大值误差。从表1～3中可以看

出，数值收敛阶与定理2的结论是一致的。

表 1　　$m=0$时的数值结果

	$\varepsilon=h^{1/2}$		$\varepsilon=h$		$\varepsilon=h^{3/2}$		$\varepsilon=h^2$		$\varepsilon=h^{5/2}$	
N	E_∞	Rate	E_∞	Rate	E_∞	Rate	E_∞	Rate	E_∞	Rate
8	1.6E−2		2.6E−2		3.6E−2		4.5E−2		4.9E−2	
		0.77		0.79		0.77		0.83		0.87
16	9.5E−3		1.5E−2		2.1E−2		2.5E−2		2.7E−2	
		0.81		0.91		0.85		0.91		0.94
32	5.4E−3		8.0E−3		1.2E−2		1.4E−2		1.4E−2	
		0.86		0.96		0.90		0.96		0.97
64	3.0E−3		4.1E−3		6.2E−3		7.0E−3		7.1E−3	
		0.90		0.98		0.93		0.98		0.99
128	1.6E−3		2.1E−3		3.3E−3		3.5E−3		3.6E−3	
		0.93		0.99		0.96		0.99		0.99
256	8.3E−4		1.0E−3		1.7E−3		1.8E−3		1.8E−3	

表 2　　$m=1$时的数值结果

	$\varepsilon=h^{1/2}$		$\varepsilon=h$		$\varepsilon=h^{3/2}$		$\varepsilon=h^2$		$\varepsilon=h^{5/2}$	
N	E_∞	Rate	E_∞	Rate	E_∞	Rate	E_∞	Rate	E_∞	Rate
8	6.4E−4		1.6E−3		3.0E−3		4.6E−3		5.4E−3	
		1.59		1.67		1.65		1.73		1.83
16	2.1E−4		5.1E−4		9.6E−4		1.4E−3		1.5E−3	
		1.66		1.81		1.77		1.87		1.93
32	6.8E−5		1.5E−4		2.8E−4		3.8E−4		4.0E−4	
		1.74		1.89		1.84		1.94		1.97
64	2.0E−5		3.9E−5		7.9E−5		9.8E−5		1.0E−4	
		1.81		1.94		1.89		1.97		1.99
128	5.8E−6		1.0E−5		2.1E−5		2.5E−5		2.5E−5	
		1.84		1.97		1.92		1.98		1.99
256	1.6E−6		2.6E−6		5.6E−6		6.3E−6		6.4E−6	

表 3　　$m=2$时的数值结果

	$\varepsilon=h^{1/2}$		$\varepsilon=h$		$\varepsilon=h^{3/2}$		$\varepsilon=h^2$		$\varepsilon=h^{5/2}$	
N	E_∞	Rate	E_∞	Rate	E_∞	Rate	E_∞	Rate	E_∞	Rate
8	2.2E−5		3.7E−5		5.9E−5		9.0E−5		1.1E−4	
		2.79		2.77		2.65		2.65		2.75
16	3.1E−6		5.4E−6		9.4E−6		1.4E−5		1.6E−5	
		2.84		2.90		2.74		2.81		2.89
32	4.4E−7		7.3E−7		1.4E−6		2.0E−6		2.2E−6	
		2.90		2.96		2.80		2.90		2.95
64	5.9E−8		9.4E−8		2.0E−7		2.7E−7		2.8E−7	
		3.11		2.98		2.85		2.95		2.98
128	6.8E−9		1.2E−8		2.8E−8		3.5E−8		3.6E−8	
				2.93		2.89		2.97		2.99
256	—		1.5E−9		3.8E−9		4.5E−9		4.5E−9	

参 考 文 献

[1] Berger, A. E., A conservative uniformly accurate difference method for a singular perturbation problem in conservative form, *SIAM J. Numer. Anal.*, 23(6) (1986), 1241—1253.

[2] Farrall, P. A., Sufficient conditions for uniform convergence of a difference scheme for a singularly perturbed problem in conservation form, *Bail III-Proc. Third International Conference on Boundary and Inrerior Layers-Compntational and Asymptotic Methods*, J. J. H. Miller, Ed., Boole Press, Dublin (1984), 203—208.

[3] Gartland, E. C., Jr., Uniform high-order difference schemes for a singularly perturbed two-point boundary value problem, *Math. Comp.*, 48(178) (1987), 551—564.

[4] Kadalbajoo, M. K. and Y. N. Reddy, An approximate method for solving a class of singular perturbation problems, *J. Math. Anal. Appl.*, (133) (1988), 306—323.

[5] Kellogg, R. B. and A. Tsan, Analysis of some difference approximations for a singular perturbation problem without turning points, *Math. Comp.*, 32 (1978), 1025—1039.

[6] Stynes, M. and E. O'Riordan, A uniformly accurate finite element method for a singular perturbation problem in conservation form, *SIAM J. Numer. Anal.*, 23(2) (1986), 369—375.

[7] 孙晓弟，奇异摄动问题的任意阶有限差分格式，高校计算数学学报，12(3) (1990), 227—240.

[8] Алексеевский М. В., Разностные схемы высокого порядка точности для сингулярно возмущенной красвой задачи, *Дифференц. Уравнения*, 17(7) (1981), 1171—1183.

[9] Емельянов К. В., Разностная схема произвольного порядка точности для уравнения $\varepsilon u''-b(x)u=f(x)$, *Дифференциальные Уравнения с Малым Параметром*, Унц АН СССР, Свердловск (1984), 76—88.

[10] Емельянов К. В., Усеченная разностная схема для линейной сингулярно возушенной кравой задачи, *Докл. АН СССР*, 262(5) (1982), 1052—1055.

A Uniform High-Order Method for a Singular Perturbation Problem in Conservative Form

Wu Qi-guang Sun Xiao-di

(Department of Mathematics, Nanjing University, Nanjing)

Abstract

A uniform high-order method is presented for the numerical solution of a singular perturbation problem in conservative form. We first replace the original second-order problem (1.1) by two equivalent first-order problems (1.4), i.e., the solution of (1.1) is a linear combination of the solutions of (1.4). Then we derive a uniformly $O(h^{m+1})$ accurate scheme for the first-order problems (1.4), where m is an arbitrary nonnegative integer, so we can get a uniformly $O(h^{m+1})$ accurate solution of the original problem (1.1) by relation (1.3). Some illustrative numerical results are also given.

Key words uniform high-order method, singular perturbation problem, initial value problem