应用数学和力学，第18卷 第6期（1997年6月）
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

多刚体系统的外碰撞动力学方程

章定国[1]

（邬瑞峰推荐，1995年4月17日收到，1995年11月2日收到修改稿）

摘　　要

本文讨论了两个多刚体系统之间相互碰撞的动力学问题，给出了碰撞冲量和广义速度增量已经解耦的，且适合于计算机程式求解的外碰撞动力学模型，该模型具有实用价值。

关键词　多刚体系统　碰撞　动力学

一、引　　言

多刚体系统的撞击是一个重要的研究课题．迄今为止，已有一些学者进行了研究，文献[1]从 Newton-Euler 方程出发，讨论了多刚体系统碰撞问题的一般情况，建立起了冲量和速度增量相互耦合的多刚体碰撞动力学模型；文献［2］则把重点放在方程的解耦上，得到了适合于由柱铰连接而成的多刚体系统的内碰动力学方程，易于偏程计算．从实用角度来看，文献[2]的方法优于[1]的方法，但文献[2]没有讨论多刚体系统的外碰问题．

在实际工程和生活中，诸如跳伞运动员的着地，拳击运动中的打击，在拥挤空间中工作的不同机器人手臂间的干涉以及步行机器人一足着地时与地面间的接触均是多刚体系统的外碰撞实例．从安全和控制角度出发，都需要研究撞击瞬时系统的动力学响应．然而，目前对于两个系统间的外碰问题研究得还不够深入，真正能在计算机上实现的算法在现有公开刊物上尚属少见．本文是在文献［3］的基础上讨论了外碰撞问题，得到了形式优美，适宜于计算机程式求解的多刚体外碰撞动力学方程，丰富了多体碰撞动力学建模理论．

二、外碰系统的数学描述

设所研究的多刚体系统由零刚体B_0和刚体B_i用柱铰或移动铰连结而成．如图1所示，“∘”表示铰，上标“′”和“″”分别表示系统1和系统2，n_1 和 n_2分别为两系统的自由度数．假设在某一时刻两系统在s个点处相碰，图中虚线表示碰撞点．用$l^+(k)$和$l^-(k)$分别表示碰撞内侧体和外侧体的标号．规定属于系统1的刚体为内侧体，属于系统2的刚体为外侧体．k的标号遵循如下规则：内侧体小的先标；若内侧体相同，则外侧体小的先标．对系统作整体标号：

1 南京理工大学应用力学系，南京 120094

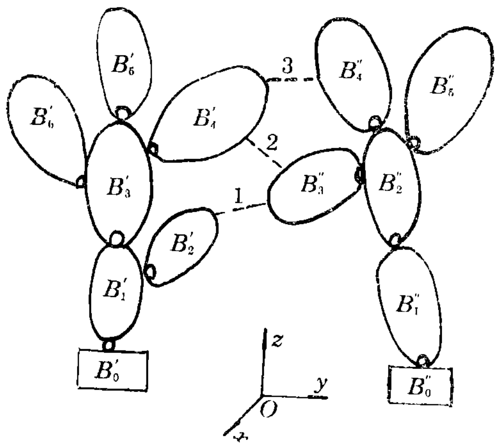

图1 多刚体碰撞系统

$$B_i \to \begin{cases} B'_i & (i=1,2,\cdots,n_1) \\ B''_{i-n_1} & (i=n_1+1,\cdots,n) \end{cases} \tag{2.1}$$

其中$n=n_1+n_2$。

引入碰撞关联矩阵W，其元素

$$W_{lk}=\begin{cases} -1, & l=l^+(k) \\ +1, & l=l^-(k) \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \qquad \begin{array}{l} (l=1,2,\cdots,n) \\ (k=1,2,\cdots,s) \end{array} \tag{2.2}$$

对系统建立D-H形式的连体坐标架B'_0的$\mathbf{e}^{(0')}$和B''_0的$\mathbf{e}^{(0'')}$分别表示系统1和系统2的零刚体坐标系。坐标系$O\text{-}xyz$（简称$\mathbf{e}$）为惯性坐标系。设$\mathbf{e}^{(0')}$和$\mathbf{e}^{(0'')}$相对$\mathbf{e}$均有规律已知的运动。用R_1和R_2分别表示$\mathbf{e}^{(0')}$和$\mathbf{e}^{(0'')}$相对$\mathbf{e}$的3×3变换矩阵。定义：

$$E_1=\left[\begin{array}{c:c} R_1 & 0 \\ \hdashline 0 & 1 \end{array}\right]_{4\times4} \text{ 和 } E_2=\left[\begin{array}{c:c} R_2 & 0 \\ \hdashline 0 & 1 \end{array}\right]_{4\times4} \tag{2.3}$$

设I^*_k为第k碰撞点的碰撞冲量大小，$\mathbf{n}_k$为第k点处的法方向，以$B_{l^+(k)}$的外法线方向为基准。有如下方程：

$$\mathbf{I}^*=\mathbf{n}I^* \tag{2.4}$$

$$\mathbf{I}=\begin{pmatrix} \mathbf{I}' \\ \hdashline \mathbf{I}'' \end{pmatrix}=\left[\begin{array}{c} \mathbf{I}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{I}_{n_1} \\ \hdashline \mathbf{I}_{n_1+1} \\ \vdots \\ \mathbf{I}_n \end{array}\right]=W\mathbf{I}^*=W\mathbf{n}I^* \tag{2.5}$$

其中：

$$\mathbf{n}=\mathrm{diag}(\mathbf{n}_1,\mathbf{n}_2,\cdots,\mathbf{n}_s),\quad I^*=\begin{pmatrix} I^*_1 \\ I^*_2 \\ \vdots \\ I^*_s \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

$\mathbf{I}^*$称为碰撞点冲量阵，$\mathbf{I}$称为系统刚体冲量阵。

三、多刚体系统外碰动力学方程

在文献[3]中推导了多刚体系统受外冲击时的撞击动力学方程:

$$M\Delta\dot{\tilde{q}}=\tilde{D} \tag{3.1}$$

其中

$$M_{ik}=\sum_{j=\max(i,k)}^{n}\mathrm{Tr}(\bar{u}_{jk}J_j\bar{u}_{ji}^T)\qquad(i,k=1,2,\cdots,n) \tag{3.2}$$

$$\Delta\dot{\tilde{q}}=\dot{\tilde{q}}-\dot{\tilde{q}}^0 \tag{3.3}$$

$\dot{\tilde{q}}^0$和$\dot{\tilde{q}}$分别表示系统受冲击前后的$n\times1$阶广义速度列阵; n是多刚体系统的自由度数.

$\tilde{D}$是$n\times1$阶列阵, 其元素

$$D_i=\sum_{j=i}^{n}\mathbf{I}_j\bar{u}_{ji}\,{}^j\bar{r}_j=\sum_{j=i}^{n}\left(\sum_{k=1}^{l_j}\hat{\mathbf{F}}_j^{(k)}\bar{u}_{ji}\,{}^jr_j^{(k)}\right) \tag{3.4}$$

$\mathbf{I}_j$是第j刚体 B_j所受的全部冲量, 是一个表示在 $\mathbf{e}^{(0)}$ 系中的行矢量, $I_j=(I_{jx},I_{jy},I_{jz},0)$; ${}^j\bar{r}_j$是第j刚体在形式上所受冲量$\mathbf{I}_j$的位置, 是表示在自身系$\mathbf{e}^{(j)}$中的齐次坐标; l_j表示刚体j所受外冲量的数目, $\hat{\mathbf{F}}_j^{(k)}$表示j刚体B_j上所受的第k个外冲量($k=1,2,\cdots,L_j$).

将公式(3.1)应用于本文所研究的系统, 则得

$$M'\Delta\dot{\tilde{q}}'=\tilde{D}' \text{ 和 } M''\Delta\dot{\tilde{q}}''=\tilde{D}'' \tag{3.5}$$

其中的M'和M''是容易由计算机根据公式(3.2)来形成. 而对于$\tilde{D}'$和$\tilde{D}''$则需作一些变化:

$$D_i'=\sum_{j=i}^{n_1}(\mathbf{I}_j'\bar{u}_{ji}'\,{}^j\bar{r}_j')=\sum_{j=i}^{n_1}\left(\sum_{k=1}^{s}W_{jk}\cdot\mathbf{n}_j^{(k)}I_k^*\bar{u}_{ji}'\,{}^jr_j'^{(k)}\right) \tag{3.6}$$

$\mathbf{n}_j^{(k)}$表示j刚体B_j上作用有I_k^*的法方向, 若没有I_k^*作用, 则取$\mathbf{n}_j^{(k)}=(0,0,0,0)$. 公式(3.6)又可写成:

$$D_i'=\sum_{k=1}^{s}\left[\left(\sum_{j=i}^{n_1}W_{jk}\cdot\mathbf{n}_j^{(k)}\bar{u}_{ji}'\,{}^jr_j'^{(k)}\right)I_k^*\right] \tag{3.7}$$

对于$i=1,2,\cdots,n_1$, (3.7)式可写成矩阵形式

$$\tilde{D}'=d'I^* \tag{3.8}$$

其中d'是$n_1\times s$阶矩阵, 其元素

$$d_{ik}'=\sum_{j=i}^{n_1}W_{jk}\cdot\mathbf{n}_j^{(k)}\bar{u}_{ji}'\,{}^jr_j'^{(k)} \tag{3.9}$$

同理可得:

$$\tilde{D}''=d''I^* \tag{3.10}$$

其中

$$d_{ik}''=\sum_{j=i}^{n_2}W_{jk}\mathbf{n}_j^{(k)}E\bar{u}_{ji}''\,{}^jr_j''^{(k)} \tag{3.11}$$

$$E=\left[\begin{array}{c|c}R&0\\\hline 0&1\end{array}\right],\quad R=R_1R_2^T \tag{3.12}$$

式(3.11)中$\mathbf{n}_i^{(k)}E$的作用就是把表示在系统1 ($\mathbf{e}^{(0')}$)中的$\mathbf{n}_i^{(k)}$交换到系统2 ($\mathbf{e}^{(0'')}$)中来表示. 而上面的d'和d''可以由计算机程式求取.

公式(3.5)还可统一写成

$$M\Delta\dot{\bar{q}}=dI^* \tag{3.13}$$

其中

$$M=\begin{bmatrix} M' & 0 \\ 0 & M'' \end{bmatrix},\quad \Delta\dot{\bar{q}}=\begin{bmatrix} \Delta\dot{\bar{q}}' \\ \Delta\dot{\bar{q}}'' \end{bmatrix},\quad d=\begin{bmatrix} d' \\ d'' \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

又根据经典碰撞理论，有如下恢复系数方程

$$\mathbf{n}_k\cdot(\Delta\mathbf{V}_{l^-(k)}-\Delta\mathbf{V}_{l^+(k)})=-(1+\sigma_k)\mathbf{n}_k\cdot(\mathbf{V}_{l^-(k)}-\mathbf{V}_{l^+(k)}) \tag{3.15}$$

$k=1,2,\cdots,s$, σ_k是碰撞点恢复系数.

其中$\mathbf{V}_{l^+(k)}$和$\mathbf{V}_{l^-(k)}$分别表示内外体$B_{l^+(k)}$和$B_{l^-(k)}$在k碰点碰撞前速度，而$\Delta\mathbf{V}_{l\pm(k)}$则表示碰撞速度$\mathbf{V}_{l\pm(k)}$的增量，它们都是相对惯性系$\mathbf{e}$的速度. 可以得到

$$\mathbf{V}_{l^+(k)}=\mathbf{V}^r_{l^+(k)}+\boldsymbol{\omega}'_0\times\boldsymbol{\rho}_{l^+(k)}+\mathbf{V}'_0 \tag{3.16}$$

$$\mathbf{V}_{l^-(k)}=\mathbf{V}^r_{l^-(k)}+\boldsymbol{\omega}''_0\times\boldsymbol{\rho}_{l^-(k)}+\mathbf{V}''_0 \tag{3.17}$$

$$\Delta\mathbf{V}_{l^+(k)}=\Delta\mathbf{V}^r_{l^+(k)} \tag{3.18}$$

$$\Delta\mathbf{V}_{l^-(k)}=\Delta\mathbf{V}^r_{l^-(k)} \tag{3.19}$$

$k=1,2,\cdots,s$, 其中$\mathbf{V}^r_{l\pm(k)}$表示内外侧刚体上点k分别相对于$\mathbf{e}^{(0')}$和$\mathbf{e}^{(0'')}$的速度；$\boldsymbol{\omega}'_0$和$\boldsymbol{\omega}''_0$分别为$\mathbf{e}^{(0')}$和$\mathbf{e}^{(0'')}$相对惯性系$\mathbf{e}$的角速度；$\mathbf{V}'_0$和$\mathbf{V}''_0$为$\mathbf{e}^{(0')}$, $\mathbf{e}^{(0'')}$的原点相对$\mathbf{e}$的速度；$\boldsymbol{\rho}$是从$\mathbf{e}^{(0)}$原点到碰撞点的矢径. 在式(3.16)和(3.17)中，$\boldsymbol{\omega}_0$, $\mathbf{V}_0$都是被表示在$\mathbf{e}$系中，直接已知，而$\boldsymbol{\rho}$是被表示在$\mathbf{e}^{(0)}$系中，必须再乘上E_1^T或E_2^T把它表示到$\mathbf{e}$系中，剩下的是$\mathbf{V}^r_{l\pm(k)}$和$\Delta\mathbf{V}^r_{l\pm(k)}$的具体表达.

由文献[3]得，固定在刚体B_i上的一个点${}^i\mathbf{r}_i$，其中$\mathbf{e}^{(0)}$系中的速度可表达为

$$\mathbf{V}^r_i=\left[\sum_{j=1}^{i}\bar{u}_{ij}\dot{q}_j\right]{}^ir_i \tag{3.20}$$

又因为$\bar{u}_{ij}=0$，当$i<j$时. 所以$\mathbf{V}^r_i$又为

$$\mathbf{V}^r_i=\left[\sum_{j=1}^{n}\bar{u}_{ij}\dot{q}_j\right]{}^ir_i \tag{3.21}$$

进一步表达为

$$\mathbf{V}^r_i=\sum_{j=1}^{n}\bar{u}_{ij}\,{}^ir_i\dot{q}_j=\boldsymbol{\beta}_i\dot{\bar{q}} \tag{3.22}$$

$\boldsymbol{\beta}_i$是$1\times n$阶矢量行阵. 所以

$$\mathbf{V}^r_{l^+(k)}=\boldsymbol{\beta}'_{l^+(k)}\dot{\bar{q}}' \quad 和 \quad \mathbf{V}^r_{l^-(k)}=\boldsymbol{\beta}''_{l^-(k)}\dot{\bar{q}}'' \tag{3.23}$$

显然:

$$\Delta\mathbf{V}^r_{l^+(k)}=\boldsymbol{\beta}'_{l^+(k)}\Delta\dot{\bar{q}}' \quad 和 \quad \Delta\mathbf{V}^r_{l^-(k)}=\boldsymbol{\beta}''_{l^-(k)}\Delta\dot{\bar{q}}'' \tag{3.24}$$

将(3.16)～(3.14)的有关式子代入恢复系数方程(3.15)

$$\begin{aligned}\mathbf{n}_k\cdot(\boldsymbol{\beta}''_{l^-(k)}\Delta\dot{\bar{q}}''-\boldsymbol{\beta}'_{l^+(k)}\Delta\dot{\bar{q}}')=&-(1+\sigma_k)\mathbf{n}_k\cdot[(\boldsymbol{\beta}''_{l^-(k)}\dot{\bar{q}}''-\boldsymbol{\beta}'_{l^+(k)}\dot{\bar{q}}')\\&+(\boldsymbol{\omega}''_0\times\boldsymbol{\rho}_{l^-(k)}+\mathbf{V}''_0-\boldsymbol{\omega}'_0\times\boldsymbol{\rho}_{l^+(k)}-\mathbf{V}'_0)]\qquad(k=1,2,,\cdots,s)\end{aligned} \tag{3.25}$$

式(3.25)中的s个方程又可写为矩阵形式

$$A\Delta\dot{q}'+A''\Delta\dot{q}''=H \tag{3.26}$$

其中A'为$s\times n_1$阶阵，A''为$s\times n_2$阶阵，H为$s\times 1$阶列阵。式(3.26)又可写成

$$A\Delta\dot{q}=H \tag{3.27}$$

$$A=[A' \mid A''] \tag{3.28}$$

方程(3.13)和(3.27)即为所求的多刚体系统外碰撞动力学方程。

由(3.13)得

$$\Delta\dot{q}=M^{-1}dI^* \tag{3.29}$$

代入(3.27)得

$$AM^{-1}dI^*=H \tag{3.30}$$

这样就可求出I^*，重新代回(3.29)，求出$\Delta\dot{q}$，最后，

$$\dot{q}=\Delta\dot{q}+\dot{q}^0 \tag{3.31}$$

完成了动力学方程的求解。

参 考 文 献

[1] J. Wittenburg, *Dynamics of System of Rigidbodies*, Teubner (1977).

[2] 梁敏、洪嘉振、刘延柱，多刚体系统碰撞动力学方程及可解性判别准则，应用力学学报，8(1)(1991).

[3] 章定国，受外冲击的多刚体拉氏动力学方程，应用数学和力学，17(6)(1996)，563—568.

The Equations of External Impacted Dynamics between Multi-Rigidbody Systems

Zhang Dingguo

(*Nanjing University of Science and Technology*, *Nanjing* 210094, *P. R. China*)

Abstract

This paper discusses the problem of impact dynamics between two multi-rigidbody systems, and presents the mathematical model of this kind of impact problem. In this model the impact impulses at collision points are not coupled with the increments of the velocities, and they are also suitable for computer coding. So the model obtained in this paper is of practical value.

Key words systems of multi-rigidbodies, collision, dynamics