

静载荷作用下正交各向异性旋转扁壳的非线性自由振动

王永岗¹ 王新志¹ 宋慧芳¹

(李骊推荐, 1995年8月1日收到)

摘 要

本文用加权残值法和Lindstedt-Poincaré摄动法研究了圆柱型正交各向异性扁薄球壳和锥壳在均布静载荷作用下的轴对称非线性自由振动问题, 得到了其非线性固有频率和振幅间的特征关系, 并讨论了静载荷及壳体的几何参数和材料参数对其振动特性的影响。

关键词 非线性振动 静载荷 正交各向异性 扁球壳 扁锥壳

一、引 言

由于数学和力学上的复杂性及其广泛应用, 对于旋转扁壳的非线性振动, 一直是个难度很大而又很有研究价值的问题。许多学者曾使用各种方法进行过研究, 但很少涉及静载荷的影响^[1,2]。文献[3]通过变分法和多重尺度法研究了静载荷作用下各向同性扁薄锥壳的非线性自由振动问题, 但也仅限于小挠度。

本文中, 我们具体研究了由纤维增强性复合材料制成的圆柱型正交各向异性扁薄球壳和扁薄锥壳在均布静载荷作用下的轴对称非线性自由振动问题。考虑到加权残值法求解非线性问题的高精度、易实施等优点^[4], 首先取幂级数为试函数, 用配点法, 将静力边值问题转换为非线性代数方程组, 并用Newton-Raphson迭代法进行了求解; 然后, 基于空间模态的假设, 利用Galerkin法导出了时间模态的控制方程; 最后, 利用Lindstedt-Poincaré摄动法, 获得了以静载荷为参数的非线性固有频率与振幅间的特征关系。

二、基本方程和边界条件

由Hamilton原理, 受均布静载荷作用的圆柱型正交各向异性扁薄球壳和扁薄锥壳的轴对称非线性自由振动的平衡方程的变分形式为^[1]

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^a \left\{ DL^*(W) - q - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r N_r \left(\frac{\partial W}{\partial r} + m \frac{H}{a^m} r^{m-1} \right) \right] + \rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \right\} \delta W r dr dt = 0 \quad (2.1)$$

本问题的协调方程为

1 甘肃工业大学, 兰州 730050

$$r^\lambda \frac{\partial}{\partial r} r^{-(2\lambda-1)} \frac{\partial}{\partial r} (r^{\lambda+1} N_r) + \frac{1}{2} E_0 h \frac{\partial W}{\partial r} \left(\frac{\partial W}{\partial r} + 2m \frac{H}{a^m} r^{m-1} \right) = 0 \quad (2.2)$$

这里

$$L^* = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r^\lambda \frac{\partial}{\partial r} r^{-(2\lambda-1)} \frac{\partial}{\partial r} r^\lambda \frac{\partial}{\partial r}$$

为关于径向坐标 r 的偏微分算子, $\lambda^2 = E_0/E_r = \mu_0/\mu_r$ 为各向异性参数, $D = E_0 h^3/12(\lambda^2 - \mu_0^2)$ 为壳体的抗弯刚度, E_r, E_0 是径向和环向弹性模量, μ_r, μ_0 是径向和环向泊松比, t 是时间变量, a 是扁壳底圆半径, h 为壳的厚度, H 为壳的矢高, ρ 是单位面积的质量, N_r 是径向薄膜力, W 是壳的挠度, 指标 m 取值为1或2, 分别对应于扁锥壳和锥球壳。

考虑周边固定夹紧的旋转扁壳, 则边界条件为

$$\text{当 } r=0 \text{ 时, } W \text{ 有限, } \partial W/\partial r=0, N_r \text{ 有限} \quad (2.3a, b, c)$$

$$\text{当 } r=a \text{ 时, } W=0, \partial W/\partial r=0, \partial(rN_r)/\partial r - \mu_0 N_r = 0 \quad (2.4a, b, c)$$

取初始条件为

$$W(r, 0) = W_0(r), \partial W(r, 0)/\partial t = 0 \quad (2.5a, b)$$

为简化计算, 引入下列无量纲量

$$x = r/a, y = \sqrt{12(\lambda^2 - \mu_0^2)} W/h, S = a r N_r/D$$

$$K = \sqrt{12(\lambda^2 - \mu_0^2)} H/h, Q = \sqrt{12(\lambda^2 - \mu_0^2)} a^4 q/Dh, \sigma = a^4 \rho/D$$

则方程(2.1)和(2.2)可化为

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^1 \left\{ L_1(y) - Q - \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left[S \left(\frac{\partial y}{\partial x} + mK x^{m-1} \right) \right] + \sigma \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right\} \delta y x dx dt = 0 \quad (2.6)$$

$$x^\lambda \frac{\partial}{\partial x} x^{-(2\lambda-1)} \frac{\partial}{\partial x} (x^\lambda S) + \frac{1}{2} \frac{\partial y}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial x} + 2mK x^{m-1} \right) = 0 \quad (2.7)$$

式(2.6)中, L_1 是与 L^* 相对应的无量纲四阶偏微分算子

$$L_1 = \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} x^\lambda \frac{\partial}{\partial x} x^{-(2\lambda-1)} \frac{\partial}{\partial x} x^\lambda \frac{\partial}{\partial x}$$

相应的无量纲边界条件成为

$$\text{当 } x=0 \text{ 时, } y \text{ 有限, } \partial y/\partial x=0, S=0 \quad (2.8a, b, c)$$

$$\text{当 } x=1 \text{ 时, } y=0, \partial y/\partial x=0, \partial S/\partial x - \mu_0 S = 0 \quad (2.9a, b, c)$$

初始条件成为

$$y(x, 0) = y_0(x), \partial y(x, 0)/\partial t = 0 \quad (2.10a, b)$$

记

$$y(x, t) = Y_0(x) + \bar{y}(x, t) \quad (2.11)$$

$$S(x, t) = S_0(x) + \bar{S}(x, t) \quad (2.12)$$

其中 $Y_0(x)$ 和 $S_0(x)$ 是旋转扁壳的非线性弯曲解。注意到 δy 的任意性, 由式(2.6)~(2.9), 可得如下静力边值问题:

$$L_2(Y_0) - \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left[S_0 \left(\frac{dY_0}{dx} + mK x^{m-1} \right) \right] = Q \quad (2.13)$$

$$x^\lambda \frac{d}{dx} x^{-(2\lambda-1)} \frac{d}{dx} (x^\lambda S_0) = -\frac{1}{2} \frac{dY_0}{dx} \left(\frac{dY_0}{dx} + 2mK x^{m-1} \right) \quad (2.14)$$

$$\text{当 } x=0 \text{ 时, } Y_0 \text{ 有限, } dY_0/dx=0, S_0=0 \quad (2.15a, b, c)$$

$$\text{当 } x=1 \text{ 时, } Y_0=0, dY_0/dx=0, dS_0/dx - \mu_0 S_0 = 0 \quad (2.16a, b, c)$$

其中, L_2 是如下定义微分算子:

$$L_2 = \frac{1}{x} \frac{d}{dx} x^\lambda \frac{d}{dx} x^{-(2\lambda-1)} \frac{d}{dx} x^\lambda \frac{d}{dx}$$

同样, 由式(2.6)~(2.10), 可得到下列动力混合问题:

$$L_1(\bar{y}) - \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(S_0 \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} \right) - \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left[\bar{S} \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial x} + mKx^{m-1} + \frac{dY_0}{dx} \right) \right] + \sigma \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.17)$$

$$x^\lambda \frac{\partial}{\partial x} x^{-(2\lambda-1)} \frac{\partial}{\partial x} (x^\lambda \bar{S}) = -\frac{1}{2} \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial x} + 2mKx^{m-1} + 2 \frac{dY_0}{dx} \right) \quad (2.18)$$

$$\text{当 } x=0 \text{ 时, } \bar{y} \text{ 有限, } \partial \bar{y} / \partial x = 0, \bar{S} = 0 \quad (2.19a, b, c)$$

$$\text{当 } x=1 \text{ 时, } \bar{y} = 0, \partial \bar{y} / \partial x = 0, \partial \bar{S} / \partial x - \mu_0 \bar{S} = 0 \quad (2.20a, b, c)$$

$$\bar{y}(0, 0) = \bar{y}_0, \partial \bar{y}(0, 0) / \partial t = 0 \quad (2.21a, b)$$

这里, \bar{y}_0 为旋转扁壳中心最大无量纲振幅。

三、问题的求解

1. 静力边值问题的解

我们拟用配点法求解静力边值问题(2.13)~(2.16), 为此, 取如下两个幂级数为试函数:

$$Y_0(x) = \sum_{i=1}^{N+3} a_i x^{i-1} \quad (3.1)$$

$$S_0(x) = \sum_{j=1}^{N+2} b_j x^{j-1} \quad (3.2)$$

显然, 式(3.1)自动满足边界条件(2.15a)。在定义域(0, 1)内给 x 以 N 个不同的值, 并将上两式代入控制方程(2.13)及(2.14), 对应的可得到 $2N$ 个消除旋转扁壳内部残值的方程:

$$R_{11}(x_p) = 0 \quad (3.3)$$

$$R_{12}(x_p) = 0 \quad (3.4)$$

这里, x_p 为配点的坐标($p=1, 2, \dots, N$)。把式(3.1)及(3.2)代入边界条件(2.15b, c)及(2.16), 可得

$$a_2 = 0, b_1 = 0, \sum_{i=1}^{N+3} a_i = 0, \sum_{i=2}^{N+3} (i-1)a_i = 0, \sum_{j=2}^{N+2} b_j(j-1-\mu_0) = 0 \quad (3.5a \sim e)$$

式(3.3)~(3.5)确定了 $2N+5$ 个关于 a_i 和 b_j 的二次非线性代数方程。为方便起见, 用矩阵形式表示为

$$\{R\} = [k]\{C\} + \{U_N\} - \xi\{F\} = \{0\} \quad (3.6)$$

式中, $\{R\}$ 为残值列阵, $[k]$ 为不随迭代变化的线性系数矩阵, $\{U_N\}$ 为非线性项, $\{F\}$ 为给定的载荷列阵, ξ 为载荷因子, $\{C\}$ 为待定系数列阵, 即

$$\{C\} = \{\{a\}^T \{b\}^T\}^T \quad (3.7)$$

而

$$\{a\}^T = \{a_1, a_2, \dots, a_{N+3}\}, \{b\}^T = \{b_1, b_2, \dots, b_{N+2}\} \quad (3.8a, b)$$

由Newton-Raphson迭代法不难求得式(3.6)中的全部待定系数 $\{C\}$, 于是静问题获解. 具体求解过程同文献[4]类似.

2. 动力混合问题的求解

在求解非线性动力混合问题之前, 首先进行时空变量的分离, 即设

$$\bar{y}(x, t) = Y(x)T(t) \quad (3.9)$$

式中 $T(t)$ 是时间函数, $Y(x)$ 是振型函数, 它满足 $\bar{y}(x, t)$ 所对应的全部边界条件(2.19a, b)和(2.20a, b).

设 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 分别是方程

$$x^\lambda \frac{d}{dx} x^{-(2\lambda-1)} \frac{d}{dx} [x^\lambda f_1(x)] = \left(mKx^{m-1} + \frac{dY_0}{dx} \right) \frac{dY}{dx} \quad (3.10)$$

和方程

$$x^\lambda \frac{d}{dx} x^{-(2\lambda-1)} \frac{d}{dx} [x^\lambda f_2(x)] = \frac{1}{2} \left(\frac{dY}{dx} \right)^2 \quad (3.11)$$

的一个特解, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} (|f_1(x)| + |f_2(x)|) < \infty$, 则方程(2.18)满足边界条件(2.19c)和(2.20c)

的解为

$$\bar{S}(x, t) = -[f_1(x) + \alpha x^\lambda]T(t) - [f_2(x) + \beta x^\lambda]T^2(t) \quad (3.12)$$

实际应用中, 我们往往对最低固有频率感兴趣, 故振型函数可近似取为:

$$Y(x) = (1 - x^{2\lambda})^2 \quad (3.13)$$

于是可求得

$$f_1(x) = C_1 x^{4\lambda+m-1} + C_2 x^{2\lambda+m-1} + \sum_{j=3}^{N+3} (C_j^{(1)} x^{4\lambda+j-2} + C_j^{(2)} x^{2\lambda+j-2}) \quad (3.14)$$

$$f_2(x) = C_3 x^{8\lambda-1} + C_4 x^{6\lambda-1} + C_5 x^{4\lambda-1} \quad (3.15)$$

$$\alpha = -\frac{f_1'(1) - \mu_0 f_1(1)}{\lambda - \mu_0}, \quad \beta = -\frac{f_2'(1) - \mu_0 f_2(1)}{\lambda - \mu_0}$$

式(3.14)和(3.15)中的系数如下:

$$C_1 = \frac{4\lambda m K}{(3\lambda + m - 1)(5\lambda + m - 1)}, \quad C_2 = -\frac{4\lambda m K}{(3\lambda + m - 1)(\lambda + m - 1)}$$

$$C_3 = \frac{8\lambda^2}{(7\lambda - 1)(9\lambda - 1)}, \quad C_4 = -\frac{16\lambda^2}{(5\lambda - 1)(7\lambda - 1)}, \quad C_5 = \frac{8\lambda^2}{(3\lambda - 1)(5\lambda - 1)}$$

$$C_j^{(1)} = \frac{4\lambda(j-1)a_j}{(3\lambda+j-2)(5\lambda+j-2)}, \quad C_j^{(2)} = -\frac{4\lambda(j-1)a_j}{(3\lambda+j-2)(\lambda+j-2)}$$

将式(3.9)和(3.12)代入(2.17), 并应用 Galerkin 法, 可得 $T(t)$ 应满足的非线性微分方程:

$$B_1 d^2 T(t)/dt^2 + B_2 T(t) + B_3 T^2(t) + B_4 T^3(t) = 0 \quad (3.16)$$

这里, 系数 $B_1 \sim B_4$ 由下列积分式给出:

$$B_1 = \int_0^1 \sigma Y^2 x dx$$

$$B_2 = \int_0^1 \left[Y x L_2(Y) + S_0 \left(\frac{dY}{dx} \right)^2 - (f_1 + \alpha x^\lambda) \left(mKx^{m-1} + \frac{dY_0}{dx} \right) \frac{dY}{dx} \right] dx$$

$$B_3 = \int_0^1 - \left[(f_1 + \alpha x^\lambda) \left(\frac{dY}{dx} \right)^2 + (f_2 + \beta x^\lambda) \left(mKx^{m-1} + \frac{dY_0}{dx} \right) \frac{dY}{dx} \right] dx$$

$$B_4 = \int_0^1 - (f_2 + \beta x^\lambda) \left(\frac{dY}{dx} \right)^2 dx$$

显然, $\omega_0^2 = B_2/B_1$ 为静载荷作用下旋转扁壳的线性固有频率的平方. 为求解方便, 引进新的时间变量

$$\tau = \omega_0 t \quad (3.17)$$

并设

$$\gamma_1 = B_3/B_2, \quad \gamma_2 = B_4/B_2 \quad (3.18)$$

则式(3.16)变成

$$d^2T(\tau)/d\tau^2 + T(\tau) + \gamma_1 T^2(\tau) + \gamma_2 T^3(\tau) = 0 \quad (3.19)$$

上式是带有二次和三次非线性项的微分方程, Nayfeh 和 Mook^[5] 使用 Lindstedt-Poincaré 摄动法进行求解, 得到非线性与线性自由振动频率比与振幅间的特征关系:

$$\omega/\omega_0 = 1 + \Gamma_1 A^2 + \Gamma_2 A^4 \quad (3.20)$$

其中

$$\Gamma_1 = 3\gamma_2/8 - 5\gamma_1^2/12, \quad \Gamma_2 = -15\gamma_2^2/256$$

而 A 是 $T(\tau)$ 的振幅, 由式(3.9)及(3.13)可以看出, $T(\tau)$ 的振幅 A 等于挠度函数在中心处的无量纲振幅 \bar{y}_0 .

四、结果及讨论

依上面的方法, 我们编制了计算机程序, 并进行了详细的计算, 计算中取 $\sigma=1$, $\mu_3=0.3$. 以下就不同静载荷 Q 、不同几何参数 K 及材料参数 (正交各向异性参数) λ^2 对正交各向异性旋转扁壳的非线性振动特性的影响加以讨论.

图1给出不同静载荷 Q 作用下的扁球壳频率比 ω/ω_0 与中心无量纲振幅 \bar{y}_0 间的特征关系曲线, 从中可以清楚地看出, 静载荷 Q 对壳体的非线性振动特性有明显的影晌. 在给定的几何参数 K 和材料参数 λ^2 下, 频率比 ω/ω_0 皆随振幅 \bar{y}_0 的增大而减小, 即此时振动系统具有软弹簧特性, 其软化程度随静载荷的增大而增强.

接下来讨论壳体的几何参数对其非线性振动特性的影响. 由图2可以看出, 扁球壳的几何参数对其振性特性影响很大, 它可以改变振动的性态, 使非线性由硬弹簧特性变为软弹簧特性. 当 K 从零开始逐渐增大时, 其软化程度随 K 的增大而增强, 但当 K 达到一定值时, 软化程度随之减弱. 这种情况正如有些文献所描述的, 扁壳体存在着由硬特性向软特性过渡的临界拱高和对应于最大软特性的最大拱高^[6].

材料参数 λ^2 对扁球壳的非线性振动特性的影响较为复杂, 如图3所示. 总的看来, 随 λ^2 的增大, 非线性效应及其软化程度有所减弱. 这一结论同文[1]一致.

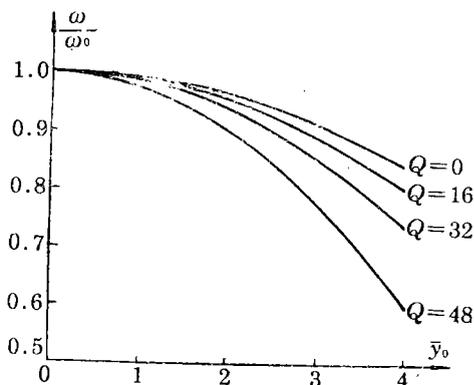


图1 静载荷 Q 对扁球壳振动特性 (ω/ω_0 及 \bar{y}_0) 的影响 ($m=2$, $\lambda^2=1$, $K=3$)

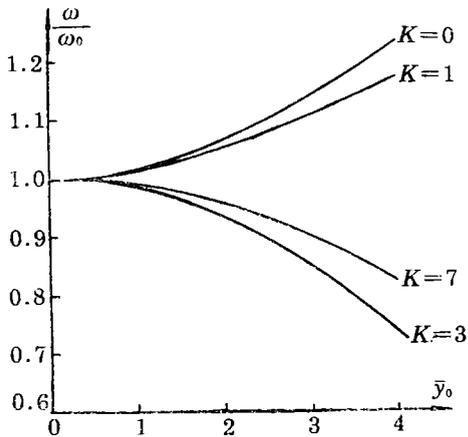


图2 几何参数 K 对扁球壳振动特性(ω/ω_0 及 \bar{y}_0)的影响($m=2, \lambda^2=1, Q=32$)

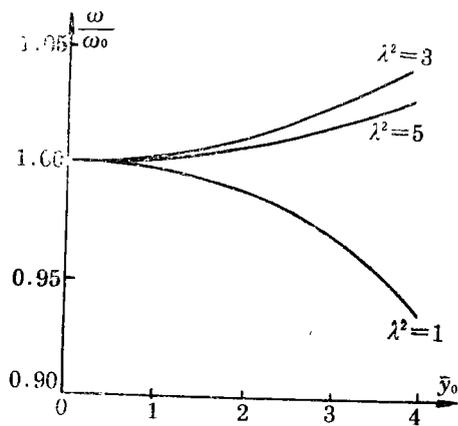


图3 材料参数 λ^2 对扁球壳振动特性(ω/ω_0 及 \bar{y}_0)的影响($m=2, K=2, Q=16$)

经过大量计算发现, 扁锥壳与扁球壳的非线性振动特性大致相同, 这里就不再讨论了。

参 考 文 献

- [1] 李东, 正交各向异性旋转扁壳的非线性振动, 应用数学和力学, 13(4) (1993), 313—325.
- [2] G. C. Sinharay and B. Banerjee, Large amplitude free vibration of shallow spherical shell and cylindrical shell—A new approach, *Int. J. Non-linear Mech.*, 20(2) (1985), 69—75.
- [3] 王林祥、王新志, 静载荷作用下扁薄锥壳轴对称非线性自由振动, 《全国第六届非线性振动会议论文集》, 天津大学出版社, 天津 (1992), 101—106.
- [4] 吴兴强、徐次达, 加权残值法分析轴压圆柱薄壳的后屈曲问题, 应用力学学报, 8(2) (1991), 9—17.
- [5] A. H. Nayfeh and D. T. Mook, *Nonlinear Oscillations*, John Wiley & Sons, New York (1979).
- [6] T. K. Varadan and K. A. V. Pandalai, Nonlinear flexural oscillation of orthotropic shallow spherical shells, *Computer and Structure*, 9 (1978), 417—425.

Nonlinear Free Vibration of Orthotropic Shallow Shells of Revolution under the Static Loads

Wang Yonggang Wang Xinzhi Song Huifang
(Gansu University of Technology, Lanzhou 730050, P. R. China)

Abstract

In this paper, the axisymmetric nonlinear free vibration problems of cylindrically orthotropic shallow thin spherical and conical shells under uniformly distributed static loads are studied by using MWR and Lindstedt-Poincaré perturbation method, from which, the characteristic relation between frequency ratio and amplitude is obtained. The effects of static loads, geometric and material parameters on vibrational behavior of shells are also discussed.

Key words nonlinear vibration, static loads, orthotropic, shallow spherical shell, shallow conical shell