应用数学和力学, 第 26 卷 第 1 期(2005 年 1 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2005) 01_0053_05

一类非线性奇摄动问题激波位置的转移*

莫嘉琪[1], 王 辉[2]

(1. 安徽师范大学 数学系, 安徽 芜湖 241000;
2. 中国气象科学研究院, 北京 100081)

(我刊原编委江福汝推荐)

摘要: 用一个特殊而简单的方法来讨论一类非线性奇摄动问题的激波位置. 得出了在一定的情况下, 当边界条件作微小的变化时, 激波的位置将作较大的偏移, 甚至由内层转到边界层.

关 键 词: 非线性方程; 激波; 内层; 边界层

中图分类号: O175.14 文献标识码: A

非线性奇摄动问题是国际学术界十分活跃的研究对象[1]. 许多学者作了大量的工作. 例如, Boh [2], Butuzov 和 Smurov[3], O'Malley, Jr. [4], Butuzov, Nefedov 和 Schneider[5] 及 Kelley[6] 等等. 莫嘉琪用微分不等式等方法也研究了一类奇摄动非线性常微分边值问题[7~10], 反应扩散问题[11~13], 非局部边界条件的奇摄动问题[14, 15], 生物数学问题[16] 和半线性方程的冲击层解的问题[17]. 本文是利用一个特殊而简单的方法研究一类奇摄动问题的激波位置的转移.

今讨论如下一类非线性奇摄动问题:

$$\varepsilon y'' = g(y)(\exp y' - 1) \qquad (x \in (-1, 1)), \tag{1}$$

$$y(-1) = A(\varepsilon), \tag{2}$$

$$y(1) = B(\varepsilon), \tag{3}$$

其中 ε 为正的小参数.

假设

[H_1] $g(y) \in C(R)$ 满足局部 Lipschitz 条件, $A(\varepsilon)$ 和 $B(\varepsilon)$ 为关于 ε 充分光滑的函数;

[H_2] $G(y) = \int_{A(0)}^{y} g(t)\,\mathrm{d}t$, $G(y) > 0, A(0) < y < B(0)$ 及 $G(B(0)) = 0$, $G'(B(0)) < 0$.

在上述假设下, 问题(1)~(3) 在 $-1 \leqslant x \leqslant 1$ 上存在唯一的单调增加的解 $y_\varepsilon(x)$, 并成立 $A(\varepsilon) \leqslant y_\varepsilon(x) \leqslant B(\varepsilon)$[18].

不难看出, 问题(1)~(3) 的退化问题的解为:

---

* 收稿日期: 2003_05_06; 修订日期: 2004_08_07
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10471039); 中国科学院"百人计划"资助项目
作者简介: 莫嘉琪(1937—), 男, 浙江德清人, 教授(联系人. Tel: + 86_553_3869642, + 86_572_2321510; E_mail: mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn).

$$y_0(x) = \begin{cases} A(0) & (-1 \leqslant x \leqslant x^*), \\ B(0) & (x^* < x \leqslant 1), \end{cases} \tag{4}$$

其中 x^* 是冲击波位置, 这时问题(1) ~ (3) 的解 $y_\varepsilon(x)$ 在 $x = x^*$ 附近有跳跃的内部层, 形成激波•

由假设[H_2], 问题(1) ~ (3) 的激波位置 x^* 为[2, 19]:

$$x^* = \frac{g(B(0)) + g(A(0))}{g(B(0)) - g(A(0))}. \tag{5}$$

现引入快变量调节函数 $y'(x) = h(V/\varepsilon)$, 其中 $h(\tau)$ 定义为

$$h\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\tau} = (\exp h - 1), \tag{6}$$

$$h(0) = v_0 \tag{7}$$

的解, 而 v_0 为一个限定值• 由(6), (7), 于是有

$$\tau = \int_{v_0}^{h} \frac{t}{(\exp t - 1)}\mathrm{d}t. \tag{8}$$

在空间 (x, y, V) 中, 在激波位置 $x = x_0$ 处的"垂直" 平面 (y, V) 上, 我们有

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y} = g(y).$$

于是

$$V(y) = \int_{A(\varepsilon)}^{y} g(t)\mathrm{d}t + C \approx G(y) + C \qquad (0 < \varepsilon \ll 1),$$

其中 C 为冲击参数, 它在空间 (x, y, V) 中满足边界条件 $x = -1, y = A(\varepsilon), V \approx C$ 和 $x = 1, y = B(\varepsilon)$•

由条件, 我们得到问题(1) ~ (3) 的解满足

$$\int_{y'(-1)}^{y'(1)} \frac{t}{(\exp t - 1)}\mathrm{d}t = \frac{G(B(\varepsilon)) - G(A(\varepsilon))}{\varepsilon}.$$

再由(8), 有

$$\tau(y'(1)) - \tau(y'(1)) = \frac{1}{\varepsilon}[G(B(\varepsilon)) - G(A(\varepsilon))]. \tag{9}$$

今考虑问题(1) ~ (3) 的逆问题• 不难看出, 问题(1) ~ (3) 的解 $y_\varepsilon(x)$ 存在唯一的单调的反函数 $x_\varepsilon(y)$, 它在 $y = A$ 和 $y = B$ 处具有边界层, 并满足如下问题:

$$\varepsilon x'' = -g(y)[\exp((x')^{-1} - 1)](x')^3, \tag{10}$$

带有边界条件 $x(A) = -1$ 和 $x(B) = 1$•

在 $x(y)$ 的跳跃位置处令 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}y = W/\varepsilon$• 我们在平面 (x, W) 上观察函数 $h(\rho) = h(W/\varepsilon)$, 使得满足方程:

$$h\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\rho} = [\exp((h)^{-1} - 1)]h^3 \tag{11}$$

和 $h(0) = 0$• 由(11), 我们有

$$\frac{1}{h} = -\ln(1 - \exp(-\rho)), \tag{12}$$

并由(10), (12), 在"空间" (y, x, W) 的"垂直" 平面 $y = y_0$ 上, 得到

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x} = -g(y_0).$$

所以, 在边界层 $y = A(\varepsilon) \approx A(0)$ 和 $y = B(\varepsilon) \approx B(0)$ 上, 我们能分别得到

$$W_A(x) = -g(A(0))(x+1) + W_A(-1), \tag{13}$$

$$W_B(x) = -g(B(0))(x-1) + W_B(1), \tag{14}$$

其中 $W_A(-1)$, $W_B(1)$ 满足

$$\frac{dx}{dy}(A(\varepsilon)) = \left[\frac{dy}{dx}(-1)\right]^{-1} = h\left(\frac{W_A(-1)}{\varepsilon}\right), \tag{15}$$

$$\frac{dx}{dy}(B(\varepsilon)) = \left[\frac{dy}{dx}(1)\right]^{-1} = h\left(\frac{W_B(1)}{\varepsilon}\right). \tag{16}$$

因为在平面 (x, W) 上, $W_A(x_0) \approx 0$, $W_B(x_0) \approx 0$ 并由(13)～(16)我们有

$$\frac{dy}{dx}(-1) = \left[h\left(\frac{g(A(0))(x_0+1)(1+\eta)}{\varepsilon}\right)\right]^{-1}, \tag{17}$$

$$\frac{dy}{dx}(1) = \left[h\left(\frac{g(B(0))(x_0-1)(1+\xi)}{\varepsilon}\right)\right]^{-1}, \tag{18}$$

其中 $x = x_0$ 为问题(1)～(3)的激波位置, ξ, η 为 ε 的高阶小量.

由(9), (17)和(18)这时我们得到问题(1)～(3)解的表示式:

$$\tau\left(\left[h\left(\frac{g(B(0))(x_0-1)(1+\xi)}{\varepsilon}\right)\right]^{-1}\right) - \tau\left(\left[h\left(\frac{g(A(0))(x_0+1)(1+\eta)}{\varepsilon}\right)\right]^{-1}\right) = \frac{1}{\varepsilon}[G(B(\varepsilon)) - G(A(\varepsilon))]. \tag{19}$$

由假设[H_2], 我们有

$$G(B(\varepsilon)) = g(B(0))(B(\varepsilon) - B(0))(1+\zeta), \tag{20}$$

$$G(A(\varepsilon)) = g(A(0))(A(\varepsilon) - A(0))(1+\zeta), \tag{21}$$

其中 ζ 为 ε 的无穷小量.

由(8), (12)和(19)～(21), 我们得到

$$\int_{\ln(1-\exp(-g(A(0))(x_0+1)(1+\eta)/\varepsilon))}^{\ln(1-\exp(-g(B(0))(x_0-1)(1+\xi)/\varepsilon))} \frac{t}{\exp(-t)-1}dt = \frac{1}{\varepsilon}[g(B(0))(B(\varepsilon) - B(0))(1+\zeta) - g(A(0))(A(\varepsilon) - A(0))(1+\zeta)]. \tag{22}$$

由(22), 原问题(1)～(3)的激波位置 x_0 将由 $A(\varepsilon)$ 移动到 $B(\varepsilon)$.

由(22)还可看出, 当 $A(\varepsilon) - A(0) = O(\varepsilon)$ 或 $B(\varepsilon) - B(0) = O(\varepsilon)$ 时, 表示式(22)的右端为 ε 的有界量, 这时只能当 $x_0 - 1 = O(\varepsilon)$ 或 $x_0 + 1 = O(\varepsilon)$ 时才能和(22)的左端相匹配. 这意味着原问题(1)～(3)的边界条件(2)和(3), 当 $A(0)$ 或 $B(0)$ 改变一个小量 $O(\varepsilon)$ 时, 激波位置 x_0 不仅可能有较大的转移, 而且会移动到边界层区域. 这时, 相应解的的反函数由两个边界层变成一个边界层.

由上面的结果, 我们有如下定理:

定理 在假设[H_1], [H_2]下, 非线性两点边值问题(1)～(3):

(i) 当 $\varepsilon \to 0$ 时, 在 $(-1, 1)$ 上的激波的极限位置 x^* 由(5)决定.

(ii) 假如边界条件 $A(\varepsilon)$, $B(\varepsilon)$ 有改变, 则激波位置也改变.

(iii) 当 $A(\varepsilon) = A(0) + a\varepsilon$ 或 $B(\varepsilon) = B(0) + b\varepsilon$ 时, 其中 a, b 为非零常数, 则激波位置 x_0 将转移到 $x = -1$ 或 $x = -1$ 的边界层附近.

(iv) 在情况(iii)下, 问题(1)～(3)的解的反函数由两个边界层变为一个边界层.

[参 考 文 献]

[1] de Jager E M, JIANG Fu_ru. The Theory of Singular Perturbation [M]. Amsterdam: North_Holland Publishing Co., 1996.

[2] Boh A. The shock location for a class of sensitive boundary value problems[J]. J Math Anal Appl, 1999, **235**(1): 295—314.

[3] Butuzov V F, Smurov I. Initial boundary value problem for a singularly perturbed parabolic equation in case of exchange of stability[J]. J Math Anal Appl, 1999, **234**(1): 183—192.

[4] O' Malley Jr R E. On the asymptotic solution of the singularly perturbed boundary value problems posed by Boh [J]. J Math Anal Appl, 2000, **242**(1): 18—38.

[5] Butuzov V F, Nefedov N N, Schneider K R. Singularly perturbed elliptic problems in the case of exchange of stabilities[J]. J Differential Equations, 2001, **169**(2): 373—395.

[6] Kelley W G. A singular perturbation problem of Carrier and Pearson[J]. J Math Anal Appl, 2001, **255**(3): 678—697.

[7] MO Jia_qi. Singular perturbation for a boundary value problems of fourth order nonlinear differential equation[J]. Chinese Ann Math, Ser B, 1989, **8**(1): 80—88.

[8] MO Jia_qi. A singularly perturbed nonlinear boundary value problem[J]. J Math Anal Appl, 1993, **178**(1): 289—293.

[9] MO Jia_qi. A class of singularly perturbed boundary value problems for nonlinear differential systems [J]. Systems Sci Math Sci, 1999, **12**(1): 56—58.

[10] MO Jia_qi. The singularly perturbed problem for combustion reaction diffusion[J]. Acta Math Appl Sinica (English Ser), 2001, **17**(2): 255—259.

[11] MO Jia_qi. Singular perturbation for a class of nonlinear reaction diffusion systems[J]. Science in China, Ser A, 1989, **32**(11): 1306—1315.

[12] MO Jia_qi. A class of singularly perturbed problems with nonlinear reaction diffusion equation[J]. Adv in Math, 1998, **27**(1): 53—58.

[13] MO Jia_qi. A class of singularly perturbed reaction diffusion integral differential system[J]. Acta Math Appl Sinica, 1999, **15**(1): 19—23.

[14] MO Jia_qi, CHEN Yu_sen. A class of singularly perturbed for reaction diffusion systems with nonlocal boundary conditions[J]. Acta Math Sci, 1997, **17**(1): 25—30.

[15] MO Jia_qi, Ouyang Cheng. A class of nonlocal boundary value problems of nonlinear elliptic systems in unbounded domains[J]. Acta Math Sci, 2001, **21**(1): 93—97.

[16] MO Jia_qi, WANG Hui. A class of nonlinear nonlocal singularly perturbed problems for reaction diffusion equations[J]. J Biomath, 2002, **17**(2): 143—148.

[17] MO Jia_qi, WANG Hui. The shock solution for quasilinear singularly perturbed Robin problem[J]. Progress in Natural Sci, 2002, **12**(12): 945—947.

[18] Jacson L K. Subfunctions and second order ordinary differential inequalities[J]. Adv in Math, 1968, **2**(2): 307—363.

[19] Laforgue J G, O' Malley R E. Shock layer movement for Burgers equation[J]. SIAM J Appl Math, 1995, **55**(2): 332—348.

Shift of Shock Position for a Class of Nonlinear Singularly Perturbed Problems

MO Jia_qi[1], WANG Hui[2]

(1. Department of Mathematics, Anhui Normal University, Wuhu, Anhui 241000, P.R. China;
2. Chinese Academy of Meteorological Sciences, Beijing 100081, P. R. China)

Abstract: The shift of shock position for a class of nonlinear singularly perturbed problems is considered using a special and simple method. The location of the shock wave will be larger move, even from interior layer to the boundary layer when the boundary conditions change smaller.

Key words: nonlinear equation; shock wave; interior layer; boundary layer