

# 分析非线性系统随机响应 的一种等效非线性化方法\*

赵 雷<sup>1</sup> 陈 虬<sup>2</sup>

(张汝清推荐, 1995年7月24日收到)

## 摘 要

本文提出了分析非线性系统随机响应的一种新的等效非线性化方法。文中阐述了该方法的基本思想和处理方法, 并对几种常见类型的非线性系统进行了分析和计算。结果表明, 利用本文提出方法所得的均方位移响应与精确解或者 Monte Carlo 模拟解之间具有较好的一致性, 并比等效线性化方法有更高的精度。

**关键词** 非线性系统 随机振动 等效非线性化方法 均方响应

## 一、引 言

近20多年来, 对非线性随机振动的响应预测已作了广泛和深入的研究, 提出了许多计算响应统计量的精确方法和近似方法<sup>[1],[2]</sup>。由于种种原因, FPK方程法的求解十分困难, 它的精确解只能在线性系统和极少数非线性系统中得到, 工程中的非线性随机振动问题很难满足 FPK 方程法的那些相当苛刻的条件, 因而很少应用。在过去的几十年中, 等效线性化方法以其简单、实用和方便的特点而成为预测非线性系统随机响应时应用得最为广泛的一种方法。等效线性化方法的基本思想是用统计意义上最佳的“等效”线性系统代替给定的非线性系统, 并用等效线性系统的解作为原非线性系统的近似解。之所以考虑一个辅助的线性系统, 在于人们已经对线性系统的随机响应进行了详细而又大量的研究, 可以求得它的精确解。通常, 等效线性化方法给出的一、二阶矩精度能满足工程分析要求, 并且随非线性强度变化不大。但是, 等效线性化方法给出的二阶矩往往偏小于相应的精确解, 有的甚至偏小20%<sup>[3]</sup>, 对于精度要求较高的系统, 误差显然太大。同时, 用于结构动力可靠度分析时, 其结果是偏于不安全甚至可能是严重错误的。此外, 对于自激和参激系统, 即使在高斯激励下, 由于响应的显著非高斯性, 等效线性化方法给出的高斯响应势必产生更大的误差<sup>[4]</sup>。

鉴于上述原因, 有必要寻找更为合适的近似方法。因此, 本文提出一种分析非线性动态系统随机响应的改进等效非线性化方法, 即用一个“等效”的有精确稳态解的非线性系统代替给定的原非线性系统, 然后以前者之解作为后者的近似解。

\* 国家自然科学基金资助项目

1 西南交通大学建筑工程系, 成都 610031; 2 西南交通大学工程力学系, 成都 610031

尽管非线性随机动态系统的精确瞬态解很难求得, 但已有比较多的系统可以获得精确稳态解, 其中一大类系统归属于能量依赖系统. 最早提出等效非线性系统法思想的 Caughey<sup>[6]</sup> 以及后来朱位秋等人<sup>[6]</sup>所使用的等效非线性系统均为能量依赖系统, Donley 和 Spanos<sup>[7]</sup>所使用的等效非线性系统是一个完全的二阶非线性系统, 他们借助于二阶 Volterra 级数得到一个线性形式的非线性等价系统, 进行了两次近似处理. 而本文所采用的等效非线性系统是一个显式表达的非线性系统, 它的精确平稳解可由 FPK 方程法得到. 文中给出了几个具体算例, 与精确解的比较表明, 本文方法可以获得令人满意的结果.

## 二、改进等效非线性化方法的基本列式

非线性系统在随机激励下, 其运动方程可以表示为

$$\ddot{x} + g(\dot{x}, x) = F(t) \quad (2.1)$$

式中  $x$ ,  $\dot{x}$  和  $x$  分别是系统响应量: 加速度、速度和位移,  $g(\dot{x}, x)$  是与  $\dot{x}$ ,  $x$  有关的非线性项,  $F(t)$  是系统随机激励.

现在建立与式 (2.1) 相对应的辅助系统

$$\ddot{x} + C_e \dot{x} + K_e x^{7/3} = F(t) \quad (2.2)$$

式中  $C_e$  和  $K_e$  分别是辅助系统的等效阻尼系数和等效刚度系数.

如果用辅助系统 (2.2) 的解作为原系统 (2.1) 的近似解, 显然, 把式 (2.2) 之解  $x$  代入式 (2.1) 后, 两个系统会出现如下残差

$$e(\dot{x}, x) = g(\dot{x}, x) - C_e \dot{x} - K_e x^{7/3} \quad (2.3)$$

为了使辅助系统 (2.2) 的解  $x$  尽可能接近于原系统 (2.1) 的真实解, 有必要选取恰当的等效参数  $C_e$  和  $K_e$ , 使残差  $e(\dot{x}, x)$  按某种度量标准成为最小. 由于式 (2.2) 之解  $\dot{x}$  和  $x$  是随机过程, 因此  $e(\dot{x}, x)$  也是一个依赖于  $C_e$  和  $K_e$  的随机过程. 一般地, 使  $e(\dot{x}, x)$  成为最小的度量标准是使  $e(\dot{x}, x)$  的均方值为最小, 即

$$\langle e^2 \rangle = \text{minimum} \quad (2.4)$$

其中算子  $\langle \cdot \rangle$  表示对随机变量的统计平均. 式 (2.4) 的极值条件是

$$\frac{\partial \langle e^2 \rangle}{\partial C_e} = 2 \left\langle e \frac{\partial e}{\partial C_e} \right\rangle = 0, \quad \frac{\partial \langle e^2 \rangle}{\partial K_e} = 2 \left\langle e \frac{\partial e}{\partial K_e} \right\rangle = 0 \quad (2.5)$$

即

$$\left. \begin{aligned} C_e \langle \dot{x}^2 \rangle - \langle g(\dot{x}, x) \dot{x} \rangle + K_e \langle \dot{x} x^{7/3} \rangle &= 0 \\ K_e \langle x^{14/3} \rangle - \langle g(\dot{x}, x) x^{7/3} \rangle + C_e \langle \dot{x} x^{7/3} \rangle &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

因为

$$\frac{\partial^2}{\partial C_e^2} \langle e^2 \rangle = 2 \langle \dot{x}^2 \rangle, \quad \frac{\partial}{\partial K_e} \langle e \rangle = 2 \langle x^{14/3} \rangle, \quad \frac{\partial^2}{\partial K_e \partial C_e} \langle e^2 \rangle = 2 \langle \dot{x} x^{7/3} \rangle \quad (2.7)$$

相应的二次型

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2}{\partial C_e^2} \langle e^2 \rangle (\Delta C_e)^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial K_e \partial C_e} \langle e^2 \rangle \Delta C_e \cdot \Delta K_e + \frac{\partial^2}{\partial K_e^2} \langle e^2 \rangle (\Delta K_e)^2 \right] \\ &= \langle \dot{x}^2 \rangle (\Delta C_e)^2 + 2 \langle \dot{x} x^{7/3} \rangle (\Delta C_e) (\Delta K_e) + \langle x^{14/3} \rangle (\Delta K_e)^2 \\ &= \langle (\dot{x} \cdot \Delta C_e + x^{7/3} \cdot \Delta K_e)^2 \rangle \geq 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

可见按照式 (2.6) 选出的  $C_e$  和  $K_e$  可以使  $\langle e^2 \rangle$  成为最小, 即满足式 (2.4),

设随机激励  $F(t)$  是均值为零的高斯白噪声过程, 即

$$\langle F(t) \rangle = 0, \quad \langle F(t)F(t+\tau) \rangle = 2\pi S_0 \delta(\tau), \quad S_F(\omega) = S_0 \quad (2.9)$$

式中  $S_0$  为白噪声谱密度,  $\delta(\tau)$  为 Dirac 函数.

根据 FPK 方程法, 辅助系统 (2.2) 的二维概率密度  $p(\dot{x}, x)$  的精确平稳形式为

$$p(\dot{x}, x) = A \exp \left[ -\frac{C_e}{\pi S_0} \left( \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{3}{10} K_e x^{10/3} \right) \right] \quad (2.10)$$

式中  $A$  为归一化常数, 由

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(\dot{x}, x) d\dot{x} dx = 1 \quad (2.11)$$

所确定. 式 (2.10) 可写为分离形式

$$p(\dot{x}, x) = p_1(x) \cdot p_2(\dot{x}) \quad (2.12)$$

其中

$$p_1(x) = A_1 \exp \left[ -\frac{3K_e C_e}{10\pi S_0} x^{10/3} \right], \quad p_2(\dot{x}) = A_2 \exp \left( -\frac{C_e}{2\pi S_0} \dot{x}^2 \right) \quad (2.13)$$

式中  $A_1, A_2$  为归一化常数.

由此可见, 由于系统具有刚度非线性性质, 在高斯输入时, 速度分布是高斯的, 而位移的分布却不是高斯的, 这就使得联合分布成为非高斯的, 但  $\dot{x}$  与  $x$  却是独立的. 据此, 由式 (2.5) 可以解得

$$C_e = \langle g(\dot{x}, x) \dot{x} \rangle / \langle \dot{x} \rangle, \quad K_e = \langle g(\dot{x}, x) x^{7/3} \rangle / \langle x^{14/3} \rangle \quad (2.14)$$

和等效线性化方法类似, 式 (2.14) 并不是求  $C_e$  和  $K_e$  的显式, 因为右端的算子  $\langle \cdot \rangle$  与随机响应  $\dot{x}$  和  $x$  有关, 而它们又是由包含待求等效参数  $C_e$  和  $K_e$  的方程式 (2.14) 解出的. 所以, 合理的  $C_e$  和  $K_e$  需要经过迭代过程来确定.

注意到式 (2.14) 右端的算子  $\langle \cdot \rangle$  牵涉到在形式上是关于  $\langle \dot{x}^m \rangle$  和  $\langle x^m \rangle$  的计算. 按照  $\langle \cdot \rangle$  的算法定义,  $\dot{x}$  和  $x$  的统计特征

$$\langle \dot{x}^m \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{x}^m p_2(\dot{x}) d\dot{x} = \begin{cases} 0, & (m \text{ 为奇数时}) \\ (m-1)!! \sigma_{\dot{x}}^m, & (m \text{ 为偶数时}) \end{cases} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \langle x^m \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^m p_1(x) dx \\ &= \begin{cases} 0, & [(-1)^m < 0 \text{ 时}] \\ \frac{3\Gamma[0.3(m+1)]}{10\Gamma(1.3)} \left( \frac{3C_e K_e}{10\pi S_0} \right)^{-3m/10}, & [(-1)^m > 0 \text{ 时}] \end{cases} \end{aligned} \quad (2.16)$$

式中  $\Gamma(\cdot)$  是 Gamma 函数.

于是, 使用适当的迭代过程, 可以从式 (2.14) 中确定  $C_e$  和  $K_e$ , 从而确定相应的辅助系统 (2.2), 它可以近似地等效于原非线性系统 (2.1), 则辅助系统 (2.2) 的由 FPK 方程法得到的

$$\langle \dot{x}^2 \rangle = \frac{\pi S_0}{C_e}, \quad \langle x^2 \rangle = \frac{\Gamma(1.9)}{3\Gamma(1.3)} \left( \frac{10\pi S_0}{3K_e C_e} \right)^{3/6} \quad (2.17)$$

即为原系统 (2.1) 的均方响应的近似解.

在以下分析中, 为便于说明问题, 均取系统激励  $F(t)$  为式 (2.9) 所示的均值为零的高斯白噪声过程. 方法对比讨论中所用的等效线性化之辅助系统为

$$\ddot{x} + C_{eL} \dot{x} + K_{eL} x = F(t) \quad (2.18)$$

式中  $C_{eL}, K_{eL}$  为相应的线性化等效参数.

### 三、非线性刚度系统

#### 3.1 立方非线性弹簧系统

其随机振动方程为

$$\ddot{x} + \beta \dot{x} + \alpha x^3 = F(t) \quad (3.1)$$

用本文方法, 求出相应辅助系统(2.2)的等效参数

$$C_e = \beta, \quad K_e = \left[ \frac{\Gamma(1.9)}{\Gamma(1.7)} \left( \frac{10\pi S_0}{3\beta} \right)^{1/6} a \right]^{5/8} \quad (3.2)$$

用FPK方程法, 求得式(3.1)的相应均方位移响应<sup>[8]</sup>

$$\sigma_{\dot{x}R}^2 = 0.6760 (\pi S_0 / \beta a)^{1/2} \quad (3.3)$$

按本文方法用辅助系统(2.2)得到的相应均方位移响应为

$$\sigma_{\dot{x}z}^2 = 0.6339 (\pi S_0 / \beta a)^{1/2} \quad (3.4)$$

与精确解 $\sigma_{\dot{x}R}^2$ 相比, 误差为6.2%。

而等效线性化方法用辅助系统(2.18)得到的均方位移响应为

$$\sigma_{\dot{x}L}^2 = 0.5774 (\pi S_0 / \beta a)^{1/2} \quad (3.5)$$

与精确解 $\sigma_{\dot{x}R}^2$ 相比, 误差为14.6%。

图1给出了三种方法在给定激励下随不同非线性程度参数 $a$ 所得到的均方响应 $\langle x^2 \rangle$ 的比较, 可以看出, 本文方法给出了优于等效线性化方法的结果。

另一方面, 实际系统(3.1)与本文建议辅助系统(2.2)之间的残差

$$\langle e^2 \rangle = \langle (\alpha x^3 - K_e x^{7/3})^2 \rangle = 0.296 (S_0 a^{1/3} / \beta)^{3/2} \quad (3.6)$$

相应地, 实际系统(3.1)与等效线性化辅助系统(2.18)之间的残差

$$\langle e^2 \rangle = \langle (\alpha x^3 - K_{eL} x)^2 \rangle = 6.429 (S_0 a^{1/3} / \beta)^{3/2} \quad (3.7)$$

这也说明本文提出的辅助系统(2.2)比等效线性化方法的辅助系统(2.18)能更好地在均方意义下逼近于原系统(3.1)。图2给出了两种辅助系统残差在给定激励下随非线性程度参数 $a$ 变化的比较。

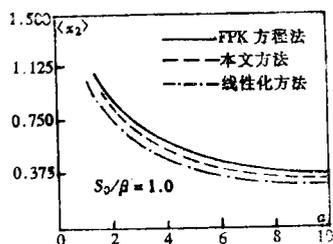


图1 立方非线性弹簧系统均方位移响应曲线

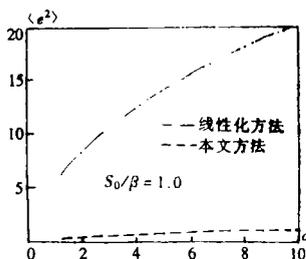


图2 两种辅助系统的残差均方值

#### 3.2 Duffing系统

随机振动方程为

$$\ddot{x} + \beta \dot{x} + a(1 + \epsilon x^2)x = F(t) \quad (3.8)$$

设它的退化系统( $\epsilon=0$ )为

$$\ddot{x} + \beta \dot{x} + \alpha x = F(t) \quad (3.9)$$

相应的位移与速度平稳响应方差为

$$\sigma_{\dot{x}_0}^2 = \pi S_0 / \beta a, \quad \sigma_{x_0}^2 = \pi S_0 / \beta \quad (3.10)$$

应用 FPK 方程法, 可求得式 (3.8) 的位移与速度的平稳响应的精确的联合概率密度, 它是可分离的. 速度呈高斯分布, 位移呈非高斯分布, 即

$$\left. \begin{aligned} p_{1R}(x) &= A_{1R} \sqrt{2\pi} \sigma_{x_0} \exp \left[ -\frac{1}{\sigma_{x_0}^2} \left( \frac{x^2}{2} + \frac{\varepsilon}{4} x^4 \right) \right] \\ p_{2R}(\dot{x}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{\dot{x}_0}} \exp \left( -\frac{\dot{x}^2}{2\sigma_{\dot{x}_0}^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

其中归一化常数

$$A_{1R}^{-1} = \pi \sqrt{\frac{S_0}{\beta \varepsilon}} \exp \left( \frac{1}{8\varepsilon \sigma_{x_0}^2} \right) K_{1/4} \left( \frac{1}{8\varepsilon \sigma_{x_0}^2} \right) \quad (3.12)$$

式中  $K_{1/4}(\cdot)$  是 1/4 阶修正 Bessel 函数. 由此可得原系统 (3.8) 的均方位移响应的精确稳态解<sup>[9]</sup>

$$\sigma_{xR}^2 = \left( \frac{2\pi^2}{\varepsilon} \right)^{1/4} (\sigma_{x_0}^2)^{3/4} D_{-3/2} \left( \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon} \sigma_{x_0}} \right) / K_{1/4} \left( \frac{1}{8\varepsilon \sigma_{x_0}^2} \right) \quad (3.13)$$

式中  $D_{-3/2}(\cdot)$  是 -3/2 阶抛物圆柱函数.

按本文方法, 取辅助系统 (2.2), 相应的等效系数

$$C_e = \beta, \quad K_e = B_0 a \quad (3.14)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} B_0 &= [B_1(1 + \sqrt{1 + \varepsilon B_2})/2]^{5/3} \\ B_1 &= \frac{\Gamma(1.3)}{\Gamma(1.7)} \left( \frac{3}{10\sigma_{x_0}^2} \right)^{2/5} \\ B_2 &= \frac{40\Gamma(1.7)\Gamma(1.9)}{3\Gamma^2(1.3)} \cdot \sigma_{x_0}^2 \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

相应的联合概率密度也是可分离的, 并且速度呈高斯分布, 位移呈非高斯分布

$$\left. \begin{aligned} p_1(x) &= A_{1z} \exp \left( -\frac{3B_0}{10\sigma_{x_0}^2} x^{10/3} \right) \\ p_2(\dot{x}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{\dot{x}_0}} \exp \left( -\frac{\dot{x}^2}{2\sigma_{\dot{x}_0}^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

其中归一化常数

$$A_{1z}^{-1} = 2\Gamma(1.3) (10\sigma_{x_0}^2/3B_0)^{3/10} \quad (3.17)$$

由此可得均方位移响应

$$\sigma_{xZ}^2 = B_2/6(1 + \sqrt{1 + \varepsilon B_2}) \quad (3.18)$$

再按等效线性化方法, 用辅助系统 (2.18) 得到的联合概率密度则是高斯的. 尽管位移与速度响应可以分离, 但它们都是呈高斯分布

$$\left. \begin{aligned} p_{1L}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{xL}} \exp \left( -\frac{x^2}{2\sigma_{xL}^2} \right) \\ p_{2L}(\dot{x}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{\dot{x}_0}} \exp \left( -\frac{\dot{x}^2}{2\sigma_{\dot{x}_0}^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

其中 $\sigma_{zL}^2$ 为按线性化方法求得的式(2.18)之位移方差

$$\sigma_{zL}^2 = [(1 + 12\varepsilon\sigma_{z0}^2)^{1/2} - 1] / 6\varepsilon \quad (3.20)$$

图3给出了 $\varepsilon=0.1, 0.5$ 和 $1.0$ 时, 三种方法所得位移方差的比较. 可见误差随 $\varepsilon$ 和 $\sigma_{z0}$ 的增大而略有增大, 但增大幅度并不明显. 例如 $\varepsilon=1.0, \sigma_{z0}=3.0$ 时, 本文方法与精确解相比, 误差仅为4.3%, 而等效线性化方法的误差则为13%. 就位移方差而言, 本文方法优于等效线性化方法.

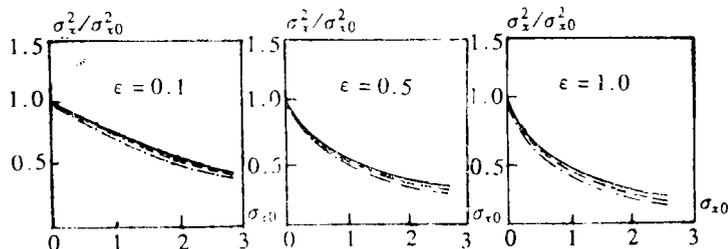


图3 Duffing振子对高斯白噪声的位移响应方差 (图线同图1)

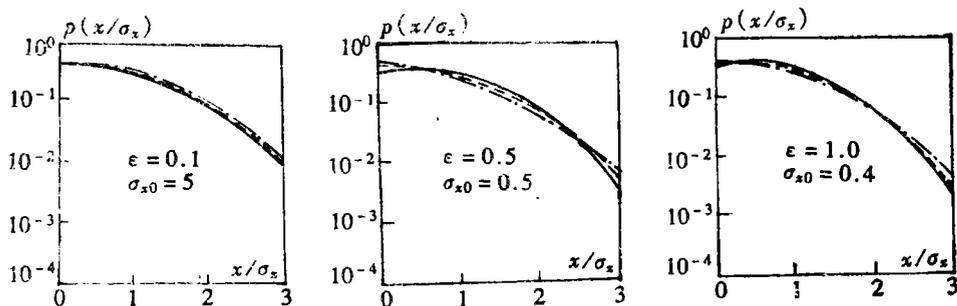


图4 Duffing振子对高斯白噪声的位移响应概率密度 (图线同图1)

图4给出了上述三个 $\varepsilon$ 值的三种方法所得位移概率密度 $p_1(x)$ ,  $p_{1R}(x)$ 和 $p_{1L}(x)$ 的比较. 由图可知, 本文方法的位移概率密度十分接近于精确值.

## 四、非线性阻尼系统

### 4.1 含有立方非线性阻尼的系统

考虑由

$$\ddot{x} + (\beta + \varepsilon\dot{x}^2)\dot{x} + ax = F(t) \quad (4.1)$$

描述的非线性阻尼系统.

按本文方法取辅助系统(2.2), 相应等效参数

$$C_e = R_1\beta, \quad K_e = R_2a \quad (4.2)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= (1 + \sqrt{1 + 12\pi S_0 \varepsilon / \beta^2}) / 2 \\ R_2 &= \left( \frac{\Gamma(1.3)}{\Gamma(1.7)} \right)^{5/3} \cdot \left( \frac{3}{10\sigma_{z0}^2} \right)^{2/3} \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

式中 $\sigma_{z_0}^2$ 为式(4.1)在 $\varepsilon=0$ 时的退化线性系统(3.9)的均方位移响应,如式(3.10)所示.据此可求得本文辅助系统(2.2)的均方位移

$$\sigma_{z_z}^2 = \frac{\Gamma(1.9)}{3\Gamma(1.3)} \left( \frac{10\sigma_{z_0}^2}{3R_1R_2} \right)^{3/5} \quad (4.4)$$

再按等效线性化方法,相应的均方位移响应

$$\sigma_{z_L}^2 = \sigma_{z_0}^2 / R_1 \quad (4.5)$$

图5给出了三种方法所得均方位移响应 $\sigma_z^2$ 随非线性程度 $\varepsilon$ 的变化情况.其中 Monte Carlo解的采样间隔为 $\Delta t=0.025$ 秒,用四阶Runge-Kutta法解非线性动力方程.当 $\sigma_{z_0}^2=2.5\pi$ , $\varepsilon=1.5$ 时,与 Monte Carlo 解相比,本文方法误差为-5%,而等效线性化方法的误差达到13%.可见,本文结果更接近于精确解,并且略大于精确值,这对工程应用而言是偏于安全的.图6则给出了两种辅助系统的近似解与精确解的均方位移响应误差随非线性参

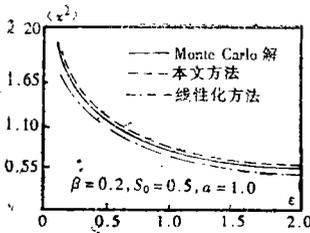


图5 立方非线性阻尼系统的均方位移响应

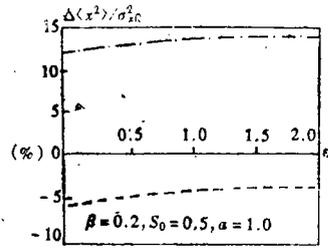


图6 立方非线性阻尼系统均方位移响应的误差比较 (图线同图2)

数 $\varepsilon$ 的变化情况.

#### 4.2 阻尼项中含有刚度非线性的系统

随机振动方程为

$$\ddot{x} + \dot{x}(\dot{x}^2 + x^2)\beta/2 + x = F(t) \quad (4.6)$$

用FPK方程法可得平稳响应的精确概率密度与方差<sup>[1]</sup>

$$p_{1R}(x) = 2A_{1R} \int_0^{+\infty} \exp\left[-\frac{\beta}{2\pi S_0} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{\dot{x}^2}{2}\right)^2\right] d\dot{x} \quad (4.7)$$

$$\sigma_{z_R}^2 = 0.7979(\pi S_0/\beta)^{1/2} \quad (4.8)$$

式中归一化常数

$$A_{1R}^{-1} = (\beta/2\pi S_0)^{1/2}/\pi \quad (4.9)$$

按本文方法求得辅助系统(2.2)的等效参数为

$$C_e = R_1(\pi S_0\beta)^{1/2}, \quad K_e = R_2(\beta/\pi S_0)^{1/3} \quad (4.10)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= \left[ \frac{1}{2} \left( 3 + \frac{10}{9} \cdot \frac{\Gamma(1.9)\Gamma(1.7)}{\Gamma^2(1.3)} \right) \right]^{1/2} \\ R_2 &= \left[ \frac{9}{100} \left( \frac{\Gamma(1.3)}{\Gamma(1.7)} \right)^5 R_1 \right]^{1/3} \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

相应概率密度函数与方差

$$p_{1z}(x) = A_{1z} \exp\left(-\frac{3K_e C_e}{10\pi S_0} x^{10/3}\right) \quad (4.12)$$

$$\sigma_{zz}^2 = 0.8313(\pi S_c/\beta)^{1/2} \quad (4.13)$$

式中归一化常数

$$A_{1z}^{-1} = 2 \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{3K_e C_e}{10\pi S_0} x^{10/3}\right) dx \quad (4.14)$$

与FPK方程法的精确解相比, 位移方差的百分误差为-4.2%, 且略大于精确值.

再按等效线性化方法的辅助系统(2.18)分析, 其概率密度函数与方差

$$p_{1L}(x) = \left(\frac{\beta}{2\pi^3 S_0}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{x^2}{\sqrt{2\pi S_0/\beta}}\right) \quad (4.15)$$

$$\sigma_{zL}^2 = 0.7071(\pi S_0/\beta)^{1/2} \quad (4.16)$$

与FPK方程法的结果相比, 位移方差的百分误差为11.4%.

图7给出了三种方法在不同激励水平下均方位移响应变化的比较, 误差随 $S_0/\beta$ 的增大而稍有增大, 但并不显著. 两种近似方法与精确解的百分误差随非线性参数 $\beta$ 及激励水平 $S_0$ 的变化情况示于图8中. 可以看出, 本文方法比等效线性化方法更接近于精确解. 分析其原因, 在于本文辅助系统用式(4.12)给出的近似概率分布密度 $p_{1z}(x)$ 与FPK方程法用式(4.7)给出的精确概率分布密度 $p_{1R}(x)$ 相比, 都具有非高斯分布的特性, 而且比等效线性化方法用式(4.15)给出的高斯形式的近似概率分布密度 $p_{1L}(x)$ 在随机变量 $x$ 的乘幂方面更接近于真实分布 $p_{1R}(x)$ , 因而本文辅助系统(2.2)的解理所当然地优于等效线性化之解.

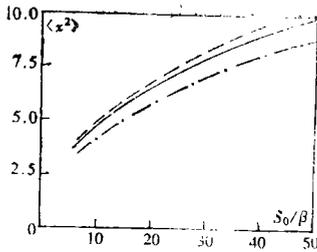


图7 含刚度的非线性阻尼系统的均方位移响应 (图线同图1)

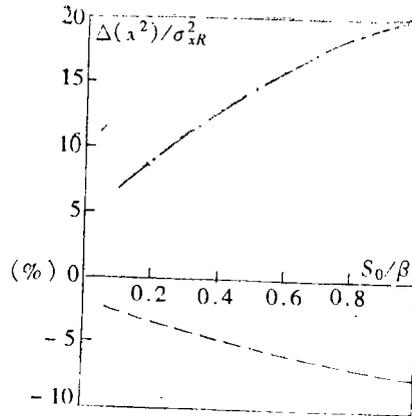


图8 含刚度的非线性阻尼系统均方位移响应的误差 (图线同图2)

## 五、结 论

从几种不同随机振动系统的分析可以看出, 本文提出的方法比等效线性化方法结果有更高的数值精度. 对阻尼非线性系统, 本文方法解得的解略大于精确解, 而等效线性化方法则

正好相反。从某种意义上讲,对于实际工程中的随机振动问题,响应统计量预测值稍微偏高,增加了设计的安全度。因此本文方法可以在分析随机动力问题时采用。

本文方法原理清楚,方法简单,应用方便。算例表明精度较高,必将在处理随机动力问题中得到较大的发展。但对于这种方法在多自由度体系中的应用,以及如何推广应用于更一般的结构随机动力问题等,都有待于进一步研究和探讨。

### 参 考 文 献

- [1] 朱位秋,《随机振动》,科学出版社,北京(1992)。
- [2] Y. K. Lin, *Probabilistic Theory of Structural Dynamics*, McGraw-Hill, New York (1967)。
- [3] P. D. Spanos, Stochastic linearization in structural dynamic, *Applied Mechanics Reviews*, 34(1) (1981)。
- [4] 朱位秋,非线性随机振动理论的近期进展,力学进展,24(2) (1994)。
- [5] T. K. Caughey, On the response of nonlinear oscillators to stochastic excitation, *Prob. Eng. Mech.*, 1(1) (1986)。
- [6] 朱位秋、余金寿,预测非线性系统随机响应的等效非线性系统法,固体力学学报,10(1) (1989)。
- [7] M. G. Donley and P. D. Spanos, Dynamic analysis of non-linear structures by the method of statistical quadratization, *Lecture Notes in Engineering*, 57, Springer-Verlag, Berlin (1990)。
- [8] 郑兆昌主编,《机械振动》(中册),机械工业出版社,北京(1986)。
- [9] K. Piszczek and J. Nizioł, *Random Vibration of Mechanical Systems*, John Wiley & Sons, New York (1986)。

## An Equivalent Nonlinearization Method for Analysing Response of Nonlinear Systems to Random Excitations

Zhao Lei Chen Qiu

(Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, P. R. China)

### Abstract

In this paper, a new equivalent nonlinearization method is developed and used in analysing the response of nonlinear systems to Gaussian white noise excitation. Its basic idea and calculation method are expounded. With the help of the presented method, several kinds of usual nonlinear random vibration systems are analyzed. The numerical results show that the mean square responses of the proposed approach are much closer to the exact solutions or Monte Carlo solutions, than that obtained from equivalent linearization method.

**Key words** nonlinear system, random vibration, equivalent nonlinearization method, mean square response