

# 环空管内粘弹性流体不定常旋转流的解及流动特性分析

黄军旗<sup>1</sup> 刘慈群<sup>2</sup>

(1995年7月18日收到, 1996年11月8日收到修改稿)

## 摘 要

本文用Hankel积分变换法分别求得二阶流体和 Maxwell 流体在环管内不定常旋转流运动方程的解析解。据此可以分析环管内旋转速度和切应力的分布与变化特征; 流体物性参数、管道环隙大小等参量在解析公式中有明确反映, 便于定性分析和讨论。本解可以为钻探工程和 高分子加工工艺的设计提供理论依据。另外还可用来分析双筒粘度计的流动状态和应力特征, 拟合曲线, 确定材料的粘弹性参数。在对这种流体进行特性分析时, 我们发现, Maxwell 流体的旋转流动在起动初期表现为方波振荡, 振动的幅度和周期随  $Ha$  (物质常数) 的增大而增大。此种现象还是首次发现, 可能对实际应用有一定的意义。

**关键词** 粘弹性流体 旋转流 解析解

## 一、引 言

文[1]和[2]相继获得了二阶流体和 Maxwell 流体在环管内轴向不定常层流的解析解, 分析了这种流动的特性。本文进一步研究这类流体的旋转流, 即不定常 Couette 流, 在测粘流动、食品工业、高分子材料的加工甚至钻探工程中可以遇见类似的问题。故研究 Couette 流具有理论和实际意义。

本文在一个具有广泛意义的应用背景下, 建立流体运动的支配方程, 提出适当的定解条件, 用 Hankel 积分变换法分别求得二阶流体和 Maxwell 流体在环管中旋转运动的解析解, 并用来分析两种流体的流动特征。文中的结论在理论分析和实用中有参考价值。

## 二、二阶流体不定常旋转流

### 1. 基本方程

旋转运动的动量方程<sup>[3]</sup>:

$$\rho \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{r_2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) \quad (2.1)$$

1 北京师范大学资源与环境科学系, 北京 100875

2 中国科学院渗流流体力学所, 河北廊坊 102801

二阶流体本构关系<sup>[3]</sup>:

$$\tau_{r\theta} = \eta_0 r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{V}{r} \right) + \beta \frac{\partial}{\partial t} \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{V}{r} \right) \right] \quad (2.2)$$

这里,  $V$  为流体角向速度;  $\rho$  为流体密度;  $\eta_0$  和  $\beta$  是流体特征粘度和物性常数;  $\tau_{r\theta}$  是切应力分量;  $r$  是径向坐标,  $t$  是时间.

将式(2.2)代入(2.1), 并令

$$x = \frac{r}{r_0}, \quad T = \frac{\eta_0 t}{\rho r_0^2}, \quad U = \frac{V}{V_i}, \quad R_0 = \frac{\beta}{\rho r_0^2}$$

则有无量纲形式:

$$\frac{\partial U}{\partial T} = \left( 1 + R_0 \frac{\partial}{\partial T} \right) \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{U}{x^2} \right) \quad (2.3)$$

设环管内壁半径  $r_i$ , 其旋转角向速度  $V_i$ , 环管外壁半径  $r_0$ , 其相对静止, 则相应的定解条件如下:

$$U(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (2.4)$$

$$U(a, T) = 1, \quad T > 0 \quad (2.5)$$

$$U(1, T) = 0, \quad T > 0 \quad (2.6)$$

这里  $a = r_i/r_0$

式(2.3)~(2.6)组成二阶流体不定常旋转流的数学模型.

## 2. 问题求解

考查式(2.3)~(2.6), 可以发现

$$U_0 = \frac{a}{x} \frac{1-x^2}{1-a^2} \quad (2.7)$$

为问题的一个特解. 若令

$$U = U_0 + w \quad (2.8)$$

则  $w$  满足下述问题

$$\frac{\partial w}{\partial T} = \left( 1 + R_0 \frac{\partial}{\partial T} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{w}{x^2} \right) \quad (2.9)$$

$$w(x, 0) = -U_0, \quad a \leq x \leq 1 \quad (2.10)$$

$$w(a, T) = 0, \quad T > 0 \quad (2.11)$$

$$w(1, T) = 0, \quad T > 0 \quad (2.12)$$

在  $x$  空间, 对问题(2.9)~(2.12)中的函数  $w$  施行有限 Hankel 变换, 取变换核函数为<sup>[4],[5]</sup>:

$$H(\rho_i, x) = J_1(\rho_i x) Y_1(\rho_i) - J_1(\rho_i) Y_1(\rho_i x) \quad (2.13)$$

则像函数为

$$\bar{w} = \int_a^1 x w(x, T) H(\rho_i, x) dx \quad (2.14)$$

这里  $\rho_i$  是下述方程的第  $i$  个正根.

$$H(\rho_i, a) = 0 \quad (2.15)$$

函数  $J_1(\cdot)$  和  $Y_1(\cdot)$  是一阶第一类和第二类 Bessel 函数.

式(2.14)的逆变换为<sup>[5]</sup>:

$$w(x, T) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{H(\rho_i, x)}{N(\rho_i)} \bar{w}(\rho_i, T) \quad (2.16)$$

其中

$$\frac{1}{N(\rho_i)} = \frac{\pi^2}{2} \frac{\rho_i^2 J_1^2(\rho_i a)}{J_1^2(\rho_i a) - J_1^2(\rho_i)} \quad (2.17)$$

将方程(2.9)两端同乘以 $[xH(\rho_i, x)]$ 并从 $\infty$ 到1积分, 我们有

$$\int_a^1 x \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{w}{x^2} \right] H(\rho_i, x) dx = -\rho_i^2 \bar{w} \quad (2.18)$$

代入便得

$$(1 + R_c \rho_i^2) \frac{d\bar{w}}{dT} + \rho_i^2 \bar{w} = 0 \quad (2.19)$$

$$\bar{w}(\rho_i, 0) = -U_0 \quad (2.20)$$

其中

$$U_0 = \int_a^1 x U_0 H(\rho_i, x) dx = -\frac{2}{\pi \rho_i^2} \frac{J_1(\rho_i)}{J_1(\rho_i a)} \quad (2.21)$$

解(2.19)和(2.20)

$$\bar{w} = -U_0 \exp\left(-\frac{\rho_i^2}{1 + R_c \rho_i^2} T\right) \quad (2.22)$$

将(2.22)代入(2.16)有

$$w(x, T) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\pi J_1(\rho_i) J_1(\rho_i a)}{J_1^2(\rho_i a) - J_1^2(\rho_i)} H(\rho_i, x) \exp\left(-\frac{\rho_i^2}{1 + R_c \rho_i^2} T\right) \quad (2.23)$$

再代入(2.8)式最终有环空管二阶流体旋转流的速度公式:

$$U(x, T) = \frac{a}{x} \frac{1-x^2}{1-a^2} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\pi J_1(\rho_i) J_1(\rho_i a)}{J_1^2(\rho_i a) - J_1^2(\rho_i)} H(\rho_i, x) \exp\left(-\frac{\rho_i^2}{1 + R_c \rho_i^2} T\right) \quad (2.24)$$

$a \leq x \leq 1$

剪切应力公式为

$$\begin{aligned} \tau_D &= \frac{r_0}{V_i \eta_0} \tau_{r,\theta} = \left(1 + R_c \frac{\partial}{\partial T}\right) \left(x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{U}{x}\right)\right) \\ &= -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\pi J_1(\rho_i) J_1(\rho_i a)}{J_1^2(\rho_i a) - J_1^2(\rho_i)} H_1(\rho_i, x) \left[1 + \frac{\rho_i^2}{1 + R_c \rho_i^2} \exp\left(-\frac{\rho_i^2}{1 + R_c \rho_i^2} T\right)\right] \end{aligned} \quad (2.25)$$

$a < x \leq 1$

或者

$$\tau_D = -\frac{2a}{1-a^2} \frac{1}{x^2} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\pi J_1(\rho_i) J_1(\rho_i a)}{J_1^2(\rho_i a) - J_1^2(\rho_i)} H_1(\rho_i, x) \frac{1}{1 + R_c \rho_i^2} \exp\left(-\frac{\rho_i^2}{1 + R_c \rho_i^2} T\right) \quad (2.26)$$

$a \leq x \leq 1$

这里

$$H_1(\rho_i, x) = x \frac{d}{dx} \left(\frac{H(\rho_i, x)}{x}\right) \quad (2.27)$$

### 3. 讨 论

当 $R_o=0$ 时, 式(2.24)和(2.26)分别简化为牛顿流体旋转流的结果<sup>[4]</sup>:

$$U(x, T) = \frac{a}{x} \frac{1-x^2}{1-a^2} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\pi J_1(\rho_i) J_1(\rho_i a)}{J_1^2(\rho_i) - J_1^2(\rho_i a)} H(\rho_i, x) \exp(-\rho_i^2 T) \quad a \leq x \leq 1 \quad (2.28)$$

$$\tau_D(x, T) = -\frac{2a}{1-a^2} \frac{1}{x^2} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\pi J_1(\rho_i) J_1(\rho_i a)}{J_1^2(\rho_i) - J_1^2(\rho_i a)} H_1(\rho_i, x) \exp(-\rho_i^2 T) \quad a \leq x \leq 1 \quad (2.29)$$

当 $T \rightarrow \infty$ 时, 二阶流体不定常流趋于定常态, 此时, 非牛顿特性指数 $R_o$ 的作用消失. 由式(2.24)和(2.26)分别获得定常态的速度和应力分布.

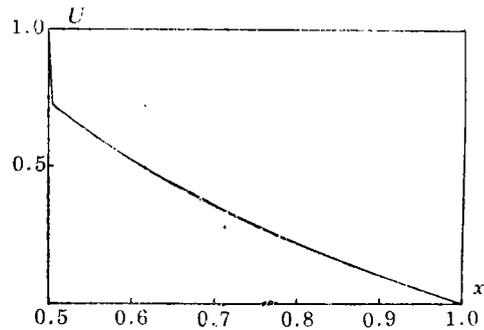
$$U(x) = \frac{a}{x} \frac{1-x^2}{1-a^2} \quad (2.30)$$

$$\tau_D(x) = -\frac{2a}{1-a^2} \frac{1}{x^2} \quad (2.31)$$

从因子 $\rho_i^2/(1+R_o\rho_i^2)$ 还可看出,  $R_o$ 愈大, 趋于稳定的时间愈长.

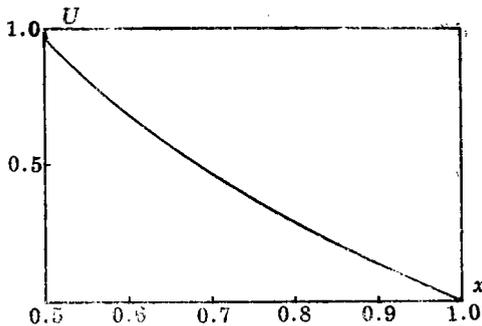
### 4. 计算实例

图1和2是不同时刻环隙间二阶流体旋转速度的空间分布. 在靠近内壁 $x=a$ 处, 速度空间变化很大. 在整个环隙间, 速度的分布还算均匀. 图3是环隙中间一点处, 速度的时间变化曲线. 随着时间的延续, 速度趋近于定常态的值.



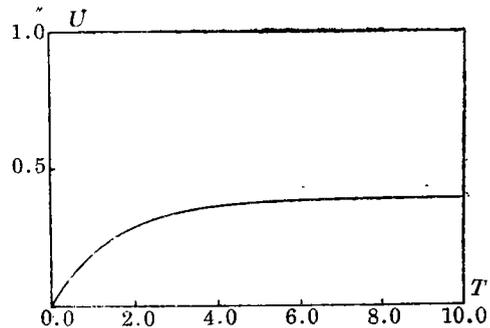
$$R_o=0.50, a=0.50, T=2.0$$

图1 二阶流体旋转速度 $U$ 的空间分布



$$R_o=0.50, a=0.50, T=5.0$$

图2 二阶流体旋转速度 $U$ 的空间分布



$$R_o=0.50, a=0.50, x=0.75$$

图3 旋转速度 $U$ 随时间的变化

### 三、Maxwell流体不定常旋转流

#### 1. 基本方程<sup>[3]</sup>

运动方程如式(2.1), 其本构关系如下:

$$\tau_{r\theta} + \lambda \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial t} = \eta_0 r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{W}{r} \right) \quad (3.1)$$

式中 $\lambda$ 为松弛时间,  $\eta_0$ 为零剪切粘度. 其它字符意义同上. 将(3.1)式代入(2.1)式得Maxwell流体旋转运动方程. 注意, 为与二阶流体相区别, 我们以 $W$ 表示速度.

$$Ha \frac{\partial^2 W}{\partial T^2} + \frac{\partial W}{\partial T} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{W}{x} \quad (3.2)$$

这里各变量均为无量纲量, 无量纲量的代换同上节. 参量 $Ha = \lambda \eta_0 / \rho r_0^2$ , 为物质常数.

#### 2. 问题求解

定解条件如上节, 仅补充加速度初值条件

$$\frac{\partial}{\partial T} W(x, 0) = 0 \quad (3.3)$$

求解问题(3.2), (3.3)及(2.4)~(2.6)的技术方法同上节. 经过适当运算可得Maxwell流体旋转运动的速度公式:

$$\begin{aligned} W(x, T) = & \frac{a}{x} \frac{1-x^2}{1-a^2} - \sum_{\rho_i \leq 1/4Ha} \frac{\pi J_1(\rho_i) J_1(\rho_i a)}{J_1^2(\rho_i) - J_1^2(\rho_i a)} H(\rho_i, x) \\ & \cdot \left[ \frac{r_2}{r_1 - r_2} \exp(r_1 T) + \frac{r_1}{r_1 - r_2} \exp(r_2 T) \right] \\ & - \sum_{\rho_i > 1/4Ha} \frac{\pi J_1(\rho_i) J_1(\rho_i a)}{J_1^2(\rho_i) - J_1^2(\rho_i a)} H(\rho_i, x) \\ & \cdot \left[ \exp(aT) \left( \frac{\alpha}{\beta} \sin(\beta T) - \cos(\beta T) \right) \right] \end{aligned} \quad (3.4)$$

式中

$$\begin{aligned} \alpha = & -\frac{1}{2Ha}, \quad \beta = \frac{1}{2Ha} \sqrt{4Ha\rho_i^2 - 1} \\ r_1 = & \alpha + \frac{1}{2Ha} \sqrt{1 - 4\rho_i^2 Ha}, \quad r_2 = \alpha - \frac{1}{2Ha} \sqrt{1 - 4\rho_i^2 Ha} \end{aligned}$$

切应力公式由下式确定

$$\tau_D + Ha \frac{\partial \tau_D}{\partial T} = x \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{W}{x} \right) \quad (3.5)$$

式中

$$\tau_D = \tau_{r\theta} r_0 / V \eta_0$$

运算有

$$\tau_D(x, T) = \frac{1}{Ha} \exp\left(-\frac{T}{Ha}\right) \int_0^x x \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{W}{x} \right) \exp\left(\frac{T}{Ha}\right) dT \quad (3.6)$$

### 3. 讨 论

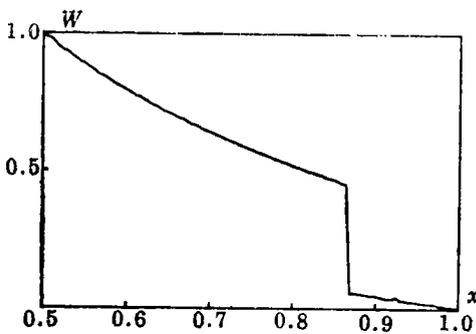
当  $Ha=0$  时, 式(3.4)和(3.6)分别化简为式(2.28)和(2.29)。此为牛顿流的结果。

当  $T \rightarrow \infty$  时, Maxwell 流体不定常流趋于定常态。此时非牛顿特性指数  $Ha$  的作用消失。定常态速度分布如式(2.30), 剪切应力如(2.31)。

从式(3.4)知, 第二个加和号下有因子  $\sin(\beta t)$  和  $\cos(\beta t)$ , 故在时间轴上, 速度有振荡成份。因  $\alpha < 0$ , 这种振荡成份在逐渐衰减。 $Ha$  越大振幅越大,  $Ha$  越小衰减越快。

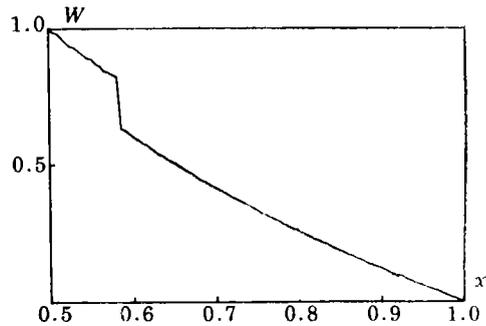
### 4. 计算实例

图 4 和 5 是不同时刻环隙间 Maxwell 流体的速度分布曲线。由于它的振荡特性, 旋转速度在环隙间有突变, 突变点随着时间的延续向环管内壁移动。当时间趋于无穷大时, 突变点移至  $x=x_0$  处, 即环空管内壁处。速度跃变也随之趋于零。



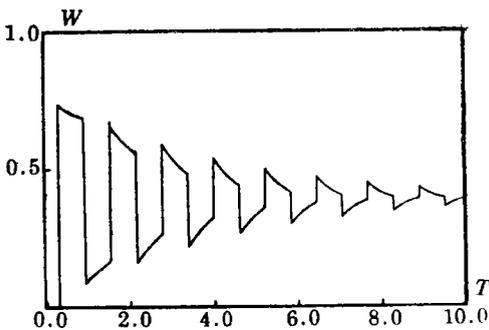
$$Ha=0.50, \alpha=0.50, T=2.0$$

图4 Maxwell流体旋转速度 $W$ 的空间分布



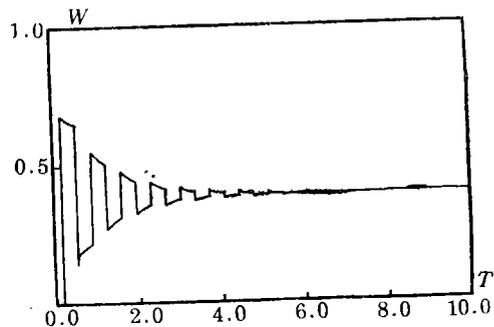
$$Ha=0.50, \alpha=0.50, T=5.0$$

图5 Maxwell流体旋转速度 $W$ 的空间分布



$$Ha=1.50, \alpha=0.50, x=0.75$$

图6 Maxwell流体旋转速度 $W$ 随时间的变化



$$Ha=0.50, \alpha=0.50, x=0.75$$

图7 Maxwell流体旋转速度 $W$ 随时间的变化

图 6 和 7 是空间一点处, Maxwell 旋转流速度随时间变化曲线, 速度是振荡着的。这两幅图比较了参量  $Ha$  的影响作用。令人惊奇地发现, 振荡曲线是一种方波曲线。振动的幅度和周期随  $Ha$  的增大而增大。Maxwell 旋转流速度变化的这种优美的方波曲线性质可能会在仪表工程领域找到它的用处。

## 四、结 论

1. 二阶流体和 Maxwell 流体的稳态速度分布与牛顿流体的相同, 粘弹性特征参数只在非稳定阶段对流动形态有影响。
2. 不定常流延续的时间长短, 仅就物性依赖性而言, 主要取决于物质常数  $R_0$  和  $Ha$ 。
3. 二阶流体流场内固定点上角向速度对恒定边界的响应是平缓渐变的; 而 Maxwell 流体则呈现方波式的振荡, 且振荡的周期和幅度随  $Ha$  的增大而增大。
4. Maxwell 流体在非稳态阶段的方波振荡现象, 有可能在一些工程器件中形成共振, 具有破坏性, 这一点需在工程设计中严密关注。
5. Maxwell 旋转流速度变化具方波形振荡特性。其振动要素, 如: 周期、幅度等, 具有明确的物性依赖性。应该在仪表工程和有关的领域利用这种特性。

## 参 考 文 献

- [1] 刘慈群、黄军旗, 非牛顿流体管内不定常流的解析解, 应用数学和力学, 10(11) (1989), 939—946.
- [2] 朱文辉、刘慈群, Maxwell 流体环管不定常流动解析解, 力学学报, 24(1) (1992).
- [3] 韩式方, 《非牛顿流体连续介质力学》, 四川科学技术出版社 (1987).
- [4] I. Sneddon, *Fourier Transform*, New York-Toronto-London (1951).
- [5] M. N. 奥齐西克, 《热传导》, 俞昌铭主译, 高等教育出版社 (1989).

## An Analytical Solution and Analysis of Characters for Viscoelastic Fluid Flow in Annular Pipe

Huang Junqi

(Department of Resources and Environmental Sciences,  
Beijing Normal University, Beijing 100875, P. R. China)

Liu Ciqun

(Institute of Porous Flow and Fluid Mechanics,  
Academia Sinica, Langfang, Hebei 102801, P. R. China)

### Abstract

In this paper an analytical solution to flow of second order and Maxwell fluids in annular pipe by using Hankel integral transform is presented. A derived formula can be used to analyze the behavior of rotatory velocity and shear stress; since the parameters of material and the gap size of annular pipe explicitly appear in the analytical formula one can easily analyze their effect on the flow behavior. This solution can provide a theoretical base to drilling engineering and polymer shaping techniques. In addition, it can be used to analyze the

flow characters in concentric cylinder rheometer and obtain material constants with curve fitting procedure. By investigation it is found that when outer cylinder makes uniform rotatory the history curve of velocity and stress of Maxwell fluid exhibit obliquerectangle wave and raw-wave oscillation respectively. The wave period and amplitude increase with material constant  $Ha$ . This conclusion may be of significance in practice.

**Key words** viscoelastic fluid, annular pipe, analytical solution