

搭接焊缝内的准确应力分布

薛大为¹

(1995年10月16日收到)

摘 要

本文给出了受弯矩 M 作用的搭接焊缝内的准确应力分布, 结合前文^[1]所给出的受集中力 P 作用的搭接焊缝内的应力分布准确解, 使搭接焊缝的设计可以建立在准确的理论解基础之上。

关键词 搭接焊 准确解 弹性力学

一、引 言

焊缝设计是经常要做的工作, 其重要性已众所周知。以往的设计方法建立在焊缝喉部平均应力分布的假定基础之上, 不论从数量上还是从应力方向上, 这种假定都与实际存在于焊缝内的应力分布相差很大。因此, 将焊缝的设计方法从工程假定的基础上改进到建立在准确理论的基础上, 是一件很有意义的工作。

前文^[1]给出了在集中力 P 作用下搭接焊缝的准确解。为了扩展理论成果的范围, 本文又得到了在弯矩 M 作用下搭接焊缝的准确解。因而也就得到了在集中力 P 和弯矩 M 联合作用下搭接焊缝的准确解。这样, 焊接常规设计中的一类强度设计问题就有了理论根据。

二、准确解的导出

图1示一受弯矩 M 作用的搭接焊缝, 其内的应力分布准确解, 应满足下述条件:

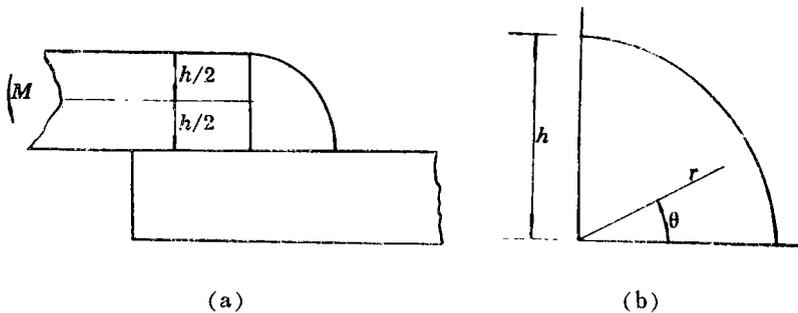


图 1

1 澳门大学科技学院

1. 作用在 $\theta=0$ 处的剪应力 $\tau_{r\theta}$ 的合力为零:

$$\int_0^h \tau_{r\theta}(r, 0) l dr = 0 \quad (2.1)$$

2. 作用在 $\theta=0$ 处的正应力 σ_θ 的合力为零:

$$\int_0^h \sigma_\theta(r, 0) l dr = 0 \quad (2.2)$$

3. 作用在 $\theta=0$ 处的正应力 σ_θ 的合矩等于外加弯矩 M :

$$\int_0^h \sigma_\theta(r, 0) l r dr = M \quad (2.3)$$

4. 作用于 $\theta=\pi/2$ 处的正应力 σ_θ 的合力为零:

$$\int_0^h \sigma_\theta\left(r, \frac{\pi}{2}\right) l dr = 0 \quad (2.4)$$

5. 作用于 $\theta=\pi/2$ 处的正应力 σ_θ 的合矩为 M :

$$\int_0^h \sigma_\theta\left(r, \frac{\pi}{2}\right) l r dr = M \quad (2.5)$$

6. 作用于 $\theta=\pi/2$ 处的剪应力 $\tau_{r\theta}$ 的合力为零:

$$\int_0^h \tau_{r\theta}\left(r, \frac{\pi}{2}\right) l dr = 0 \quad (2.6)$$

7. 在 $r=h$ 处的正应力 $\sigma_r(r, \theta)$ 为零:

$$\sigma_r(h, \theta) = 0 \quad (2.7)$$

8. 在 $r=h$ 处的剪应力 $\tau_{r\theta}(r, \theta)$ 为零:

$$\tau_{r\theta}(h, \theta) = 0 \quad (2.8)$$

9. 作用于过 O 点的两截面 $\theta=0$ 及 $\theta=\pi/2$ 上的剪应力 $\tau_{r\theta}$ 互等:

$$\tau_{r\theta}(0, \pi/2) = -\tau_{r\theta}(0, 0) \quad (2.9)$$

10. 必须满足分别沿 r 方向和 θ 方向的平衡方程.

11. 所有应力分量应为有限.

式中, (r, θ) 为极坐标, h 为焊缝高, l 为焊缝长, M 为焊缝所受的弯矩.

假定

$$\sigma_\theta = (a + br + cr^2)(1 - \cos\theta) + \sigma(2r/h - 1)\cos\theta \quad (2.10)$$

式中, a, b 及 c 为待定常数, $\sigma = 6M/lh^2$. (2.10)式显然满足了式(2.2)和式(2.3).

沿 θ 方向的单元的平衡方程为

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad (a)$$

将式(2.10)代入上式可得

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) = \sigma \left(\frac{2r^2}{h} - r \right) \sin\theta - (ar + br^2 + cr^3) \sin\theta \quad (b)$$

上式的通解为

$$\tau_{r\theta} = \sigma \left(\frac{2r}{3h} - \frac{1}{2} \right) \sin\theta - \left(\frac{a}{2} + \frac{br}{3} + \frac{cr^2}{4} \right) \sin\theta + \frac{f_1\theta}{r^2} \quad (c)$$

式中, $f_1(\theta)$ 为 θ 的任意函数. 因为 $\tau_{r\theta}$ 的值在 $r=0$ 处应为有限, 故 $f_1(\theta)$ 应为零, 于是我们可得:

$$\tau_{r\theta} = \sigma \left(\frac{2r}{3h} - \frac{1}{2} \right) \sin\theta - \left(\frac{a}{2} + \frac{br}{3} + \frac{cr^2}{4} \right) \sin\theta \quad (2.11)$$

沿 r 方向的微元的平衡方程为

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (d)$$

将(2.10)式和(2.11)式代入上式, 得:

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_r) = a + br + cr^2 - \left[\sigma \left(\frac{1}{2} - \frac{4r}{3h} \right) + \frac{a}{2} + \frac{2br}{3} + \frac{3cr^2}{4} \right] \cos\theta \quad (e)$$

上式的通解为

$$\sigma_r = a + \frac{br}{2} + \frac{cr^2}{3} - \left[\sigma \left(\frac{1}{2} - \frac{2r}{3h} \right) + \frac{a}{2} + \frac{br}{3} + \frac{cr^2}{4} \right] \cos\theta + \frac{f_2(\theta)}{r} \quad (f)$$

式中, $f_2(\theta)$ 为 θ 的任意函数, 由于 σ_r 在 $r=0$ 处不能取无限大, 故 $f_2(\theta)$ 应为零. 于是有

$$\sigma_r = a + \frac{br}{2} + \frac{cr^2}{3} - \left[\sigma \left(\frac{1}{2} - \frac{2r}{3h} \right) + \frac{a}{2} + \frac{br}{3} + \frac{cr^2}{4} \right] \cos\theta \quad (2.12)$$

常数 a , b 和 c 可确定如下: 由(2.9)式, 可得

$$a = -\sigma \quad (2.13)$$

再将式(2.10)代入式(2.4)和式(2.5), 将式(2.11)代入式(2.6)并注意到(2.13)式, 可得:

$$3bh + 2ch^2 = 6\sigma \quad (g)$$

$$4bh + 3ch^2 = 8\sigma \quad (h)$$

$$2bh + ch^2 = 4\sigma \quad (i)$$

显然, (g)式可由(h)式和(i)式相加得到, 这也就是说, (g)式是不独立的. 由(h)式和(i)式, 可得

$$b = 2\sigma/h, \quad c = 0 \quad (2.14)$$

将已求得的 a , b 和 c 的值代入(2.10)、(2.11)和(2.12)诸式, 我们可得:

$$\sigma_r = \frac{6M}{lh^2} \left(\frac{r}{h} - 1 \right) \quad (2.15)$$

$$\sigma_\theta = \frac{6M}{lh^2} \left(\frac{2r}{h} - 1 \right) \quad (2.16)$$

$$\tau_{r\theta} = 0 \quad (2.17)$$

容易证明(2.15)、(2.16)和(2.17)满足所有的条件(即前述的条件1~11). 事实上, 条件4, 5, 6和9已在确定常数 a , b 和 c 时满足了; (2.17)式已满足了条件1和8; (2.15)式已满足了条件7; 条件10和条件11已在导出解答时应用过.

这样, 我们就求得了本问题的准确解, 即(2.15)、(2.16)和(2.17)三式. 如果在 $\theta=0$ 和 $\theta=\pi/2$ 处的应力不按此规律分布, 则应在通常的弹性力学的意义上来理解.

有了应力的准确解, 当然可以易于求得应变和位移的准确解, 由于它们在设计中用途不大在此就不列出了.

三、在集中力和力偶联合作用的下准确解

将前文^[1]的准确解和本文的准确解叠加, 可得如图2所示受集中力 P 和力偶 M 联合作用

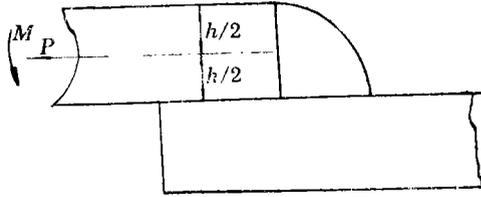


图 2

下搭接焊缝的准确解如下:

$$\sigma_r = \frac{P}{lh} \left(1 - \frac{9r}{h} + \frac{8r^2}{h^2} \right) + 6 \frac{P}{lh} \left(\frac{r}{h} - \frac{r^2}{h^2} \right) \sin \theta + \frac{6M}{lh^2} \left(\frac{r}{h} - 1 \right) \quad (3.1)$$

$$\sigma_\theta = \frac{P}{lh} \left[1 - \left(\frac{18r}{h} - \frac{24r^2}{h^2} \right) (1 - \sin \theta) \right] + \frac{6M}{lh^2} \left(\frac{2r}{h} - 1 \right) \quad (3.2)$$

$$\tau_{r\theta} = - \frac{6P}{lh} \left(\frac{r}{h} - \frac{r^2}{h^2} \right) \cos \theta \quad (3.3)$$

四、结 论

本文的准确解, 扩大了前文^[1]所得到的准确解的应用范围, 使一般情况下的准确解即(3.1)、(3.2)和(3.3)式得以建立, 从而在更一般的意义上给出了搭接焊缝应力分布的准确解。本文和前文得到的准确解, 不但有其理论意义, 也有其实用意义。

参 考 文 献

- [1] 薛大为. 搭接焊缝内应力分布规律的准确解, 应用数学和力学, 16(11) (1995), 949—954.

The Exact Solution of Stress Distribution in Fillet Welds

Xue Dawei

(The University of Macau, Macau)

Abstract

The exact solution of stress distribution on fillet welds under the action of bending moment M is obtained in this paper. Together with the exact solution of stress distribution in fillet welds under the action of concentrated force P given in an earlier paper [1], designers of weldments can improve their work on the foundation of exact analytical solutions.

Key words fillet welds, exact solution, theory of elasticity