应用数学和力学, 第 26 卷 第 1 期(2005 年 1 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2005) 01_0047_06

# 稳定的和不稳定的稳态轨迹*

J.M. 索里阿诺

( 塞维纳大学 数学学院 数学系, 塞维拉 41080, 西班牙)

( 周哲玮推荐)

摘要: 研究了一个特殊自治系统稳态轨迹的稳定性, 并用延拓法给出了结果的证明•

关 键 词: 自治系统; 延拓法; 轨迹; 临界点; 零点; 稳态轨迹; 稳定解; 渐近稳定

中图分类号: O175.13; O241.81 文献标识码: A

## 1 预 备 知 识

我们知道, 对于稳定结构来说, 适当小的扰动并不会使一个自然过程的结构和定性特性发生实质性的改变• 毫无疑问, 自然过程中相互关系的发现以及它们的科学描述, 都需要该自然现象是稳定的• 如若没有稳定现象, 世界将是一片混沌• 然而, 从自然科学的观点来看, 结构稳定性并不是必需的, 例如, 生物系统的进化过程• 只有当系统进入一个结构不稳定状态时, 生物进化的跃变才可能发生• 稳定性改变可能导致分叉• 频繁地分叉, 将使一个简单的结构改变成为一个更加复杂的结构• 因此, 化学家和生物学家都对分叉现象感兴趣, 例如, 由无机物到生命现象的出现•

微分方程组可描述很多自然现象和技术进程• 在依赖时间的现象中, 一个常微分方程系统的一个特解, 可以因为初始条件的一个微小改变, 而出现随时间增加的变化, 由此可知, 状态的稳定性是十分重要的• 本文给出了, 常微分方程组自治系统具有稳定的稳态轨迹的充分条件证明, 同时亦给出了不稳定的稳态轨迹• 我们采用相同的术语, 不仅研究了稳定和不稳定的稳态轨迹, 同时研究了结构的稳定性和不稳定性•

本文给出了一个函数存在零点的充分条件的证明, 进而给出稳态轨迹[1~ 20]• 研究中使用了文[ 1~ 15] 中所采用的延拓法, 并将用到以下定义和定理[21~ 25]•

定义 点 $x_0 \in R^n$ 称为

$$x'(t) = F(t, x(t)) \qquad (x(t) \in R^n) \tag{0}$$

的平衡点, 当且仅当 $F(t, x_0) = 0,\ \forall t \geqslant t_0$• 因此, 对所有 $t \geqslant t_0$, $x(t) = x_0$ 是系统( 0) 的一个解, 并且称为稳态轨迹•

* 收稿日期: 2003_10_22
基金项目: D.G.Y.C.T.PB 基金资助项目(96_1338_CO 2_01) ; the Junta de Andaluca 基金资助项目
作者简介: J.M.索里阿诺, 高级讲师, 博士( E_mail: soriano@ us.es) .
本文原文为英文, 由吴承平 译,张禄坤 校.

平衡点 $x_0$ 称为稳定的, 当且仅当对每一 $\varepsilon > 0$, 有一个 $\delta(\varepsilon) > 0$, 使得每当 $\|z - x_0\| < \delta(\varepsilon)$ 时, 初值问题((0), $x(t_0) = z$) 有一个恰当解 $t \mapsto x(t, z)$, 表明 $\|x(t, z) - x_0\| < \varepsilon$, $\forall t \geqslant t_0$.

给定初值问题 ((0), $y(t_0) = z$) 的解 $y(\cdot)$, 则集合

$$\Gamma = \{(t, y(t)) : t \in I\} \subset R^{n+1}$$

称为对应于 $(t_0, z)$ 和 $y(t)$ 的轨迹, 其中 $I$ 为实数区间, 由此定义了 $y(\cdot)$. 同时, 对于 $y(t; t_0, z)$, $t \in I$ 我们亦定义了 $\Gamma$.

集合

$$\Gamma^+ = \{(t, y(t)) : t \in I, t \geqslant t_0\} \subset R^{n+1},$$
$$\Gamma^- = \{(t, y(t)) : t \in I, t \leqslant t_0\} \subset R^{n+1}$$

分别称为对应于 $(t_0, z)$ 和 $y(\cdot)$ 的右半轨迹和左半轨迹.

所谓自治系统或动力系统者, 即是满足 $y'(t) = G(y)$, $G: R^n \to R^n$ 的常微分方程组.

定理 1(Liapunov 定理[26, pp. 219~222])

给定系统(0), 设 $F(0, t) = 0$, $(\forall t \geqslant t_0)$, 又设函数 $v: R^n \to \mathbf{R}$ 并称为 Liapunov 函数, 则有

i) 在原点邻域: 仅当 $x = 0$ 时, $v(x) \geqslant 0$, $v(0) = 0$, 即 $x = 0$ 时 $v$ 有极小值;

ii) $\dfrac{dv(x)}{dt} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} F_i(t, x) \leqslant 0 \qquad (\forall t \geqslant t_0)$.

则平衡点 $x_0$ 是稳定的.

## 2 稳定的和不稳定的稳态轨迹

定理 2 若有自治系统

$$y'(t) = F(y(t)), \tag{1}$$

其中 $F: R^n \to R^n$,

则下列条件成立:

1) $\boldsymbol{F}$ 为一守恒矢量场, 这里

$$u: R^n \to \mathbf{R}$$

是 $\boldsymbol{F}$ 的势, 即 $\boldsymbol{F}(y) = -\nabla u(y)$, $\forall y \in R^n$, 其中 $u$ 为 $C^2(R^n)$ 函数.

2) 如果 $y(t)$ 是系统(1) 的一个解, 则当解 $y(t)$ 存在时, 有一常数 $K$, 使得 $\|F(y(t))\| \leqslant K$. 因此有

a) 如果 $a$ 是 $u$ 的当地极小值点, 则 $y(t) = a$ 是方程(1) 的稳定的稳态轨迹.

b) 当 $a$ 为 $u$ 的鞍点(或当 $a$ 为 $u$ 的极大值点), 表明若 $u(a) - u(x + a) > \alpha > 0$, 则

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u(x + a)}{\partial x_i}\right)^2 \geqslant m > 0.$$

因而 $y(t) = a$ $(\forall t \in \mathbf{R})$, 为不稳定的稳态轨迹.

证明 (a) 我们先证明初值问题

$$\begin{cases} y' = F(y), \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{2}$$

在 $\mathbf{R}$ 上有连续可微轨迹.

由于 $F$ 为 $C^1$ 函数, 并根据广义 Picard_Lindelöf 定理[24], 即对每一

$$(t_0, y_0) \in \mathbf{R} \times R^n,$$

初值问题(2)有一个连续可微的,至少在闭区间$[t_0 - c, t_0 + c]$上有定义的恰当解$y(\cdot)$.

设$\Gamma^+ = \{(t, y(t)) : t \in J = [t_0, b), b \in \mathbf{R}\}$是$y(\cdot)$的右半轨迹. 我们将证明,通过取$t = b$,扩展前面假设的条件,从而集合

$$\Gamma^+ = \{(t, y(t)) : t \in [t_0, +\infty)\}$$

是$y(\cdot)$的右半轨迹.

同理,可证集合

$$\Gamma^- = \{(t, y(t)) : t \in (-\infty, t_0]\}$$

是左半轨迹. 因此,初值问题(2)的轨迹是

$$\Gamma = \{(t, y(t)) : t \in \mathbf{R}\}.$$

因为

$$y'(t) = F(y(t)), \quad y(t_0) = y_0 \qquad (t \in J)$$

或等价地

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} F(y(s))\mathrm{d}s \qquad (t \in J), \tag{3}$$

所以 $$y(t_2) - y(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} F(y(s))\mathrm{d}s \qquad (\forall t_1, t_2 \in J).$$

又因$F$定义在方程(1)的轨迹上,因此有一常数$K > 0$,使得$\|F(y(t))\| \leqslant K$,所以

$$\|y(t_2) - y(t_1)\| \leqslant \left\|\int_{t_1}^{t_2} F(y(s))\mathrm{d}s\right\| \leqslant K|t_1 - t_2| \qquad (\forall t_1, t_2 \in J). \tag{4}$$

取

$$(t_n)_{n\geqslant 1} \subset J \text{ 和 } (w_n)_{n\geqslant 1} \subset J$$

为收敛于$b$的任意两个序列. 不等式(4)表明,以下两个序列

$$(y(t_n))_{n\geqslant 1}, \quad (y(w_n))_{n\geqslant 1}$$

为$R^n$上的两个 Cauchy 序列,则它们分别收敛于$y_A \in R^n$和$y_B \in R^n$. 此外还有

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbf{N}: \forall n \geqslant N \Rightarrow$$
$$\|y_A - y_B\| \leqslant \|y_A - y(t_n)\| + \|y(t_n) - y(w_n)\| + \|y(w_n) - y_B\| < \varepsilon,$$

因此$y_A = y_B$.

由中心极限定理

$$\lim_{t \to b^-} y(t) = y_A. \tag{5}$$

对(3)式取极限,得到

$$y_A = \lim_{t \to b^-} y(t) = y(t_0) + \lim_{t \to b^-} \int_{t_0}^{t} F(y(s))\mathrm{d}s \qquad (t \in J),$$

因此

$$\int_{t_0}^{b} F(y(s))\mathrm{d}s = y_A - y(t_0).$$

同时可考虑

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} F(y(s))\mathrm{d}s \qquad (\forall t \in [t_0, b]),$$

导出初值问题

$$y'(t) = F(y(t)),\quad y(b) = y_A. \tag{6}$$

广义 Picard_Lindelöf 定理[24] 表明, 在 $t = b$ 的邻域内方程(6) 存在一个连续可微解 $y_1(t)$. 由方程(5) 可得, $y_1(b) = y_A = \lim_{t \to b^-} y(t)$, 从而相对于$(t_0, y_0)$ 的右半轨迹, $y(t)$ 可通过任取 $t = b$ 而扩展, 因此

$$\Gamma^+ = \left\{(t, y(t)) : t \in \mathbf{R}^+\right\}.$$

(b) 如果 $a$ 为 $u$ 的当地极小值点, 则 $a$ 也为 $u$ 的一个临界点, 因而

$$\frac{\partial u}{\partial y_i}(a) = F_i(a) = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

从而 $a$ 是系统(1) 的一个平衡点, 且 $y(t) = a\ (t \in \mathbf{R})$ 是稳态的轨迹.

我们将证明, 如果 $a$ 是 $u$ 的当地极小值点, 则稳态轨迹 $y(t) = a\ (t \in \mathbf{R})$ 是稳定的.

采用下面的办法:

$$x = y - a,$$

$$x' = F(x + a) - F(a) = F(x + a) = G(x),$$

将系统(1) 变换为系统

$$x' = G(x). \tag{7}$$

系统(7) 具有平凡稳态轨迹 $x(t) = 0\ (\forall t \in \mathbf{R})$.

因为

$$(\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 \text{ 使得 } \|x(t_0)\| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon) \Leftrightarrow$$

$$(\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 \text{ 使得 } \|y(t_0) - a\| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \|y(t) - a\| < \varepsilon),$$

则方程(7) 的平凡稳态解是稳定的, 当且仅当方程(1) 的稳态解

$$y(t) = a \qquad (t \in \mathbf{R})$$

是稳定的.

若 $a$ 是函数 $u$ 的当地极小值点, 我们构造 Liapunov 函数

$$v: R^n \to \mathbf{R},\quad v(x) = -u(a) + u(x + a),$$

并满足如下条件:

i) 因 $a$ 是 $u$ 的当地极小值点,

$$v(0) = u(a) - u(a) = 0,\quad v(x) = -u(a) + u(x + a) > 0,$$
$$(\forall x \neq 0, x \in N(0)),$$

则 $v$ 在 $x = 0$ 有当地极小值 0.

ii) 因

$$\frac{dv}{dt}(x(t)) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x + a)\frac{dx_i}{dt} \qquad (\forall t \geqslant t_0)$$

且

$$\frac{dx_i}{dt} = G_i(x) = F_i(x + a) = -\frac{\partial u}{\partial x_i}(a + x) \qquad (\forall t > t_0; i = 1, 2, \cdots, n),$$

因此

$$\frac{dv}{dt}(x) = -\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(x + a)\right)^2 \leqslant 0 \qquad (\forall t \geqslant t_0).$$

定理 1 表明, 系统(7) 的平凡解是稳定的, 且方程(1) 相对于点$(t_0, a)$ 的稳态轨迹 $\Gamma$ 也是稳定的.

(c) 如果 $a$ 是函数 $u$ 的鞍点(或当 $a$ 是 $u$ 的一个极大值点), 我们构造

$$v: R^n \to \mathbf{R},\ v(x) = -u(x+a) + u(a).$$

因 $a$ 是 $u$ 的鞍点, 有域(当 $a$ 为 $u$ 的一个极大值点时的一个邻域) region$(v>0)$, 这里

$$u(x+a) < u(a), \qquad \forall x \in \text{region}(v>0).$$

函数 $v$ 表明

$$v(0) = 0,\ v(x) > 0,\ \forall x \in \text{region}(v>0).$$

令球域为

$$B = \{x \in R^n: \|x\| \leqslant R\}.$$

因 $v$ 是连续的, 则存在 $M > 0$, 且 $M = \max v(x)\ (x \in B)$. 对任意 $r$, $0 < r < R$, 存在 $x_0 \in$ region$(v>0)$, 使得

$$0 < \|x_0\| < r,\ v(x_0) > \alpha > 0.$$

对于 $x(t; t_0, x_0)$, $t \geqslant t_0$,

$$v'(x(t; t_0, x_0)) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u(x(t; t_0, x_0) + a)}{\partial x_i}\right)^2 \geqslant 0.$$

因此 $v(x(t; t_0, x_0))$, $t \geqslant t_0$ 是一个增函数, $x(t; t_0, x_0)$ 不可能接近原点且 $v(x(t; t_0, x_0)) > \alpha > 0$, 同时表明

$$v(x(t; t_0, x_0)) = -u(x(t; t_0, x_0) + a) + u(a) > \alpha,$$

因此 $v'(x(t; t_0, x_0)) > M\ (\forall t \geqslant t_0)$.

这就是说

$$v(x(t; t_0, x_0)) - v(x(t_0; t_0, x_0)) \geqslant M(t - t_0).$$

因为对充分大的 $t$, 上述不等式的右边大于 $M$, 所以 $x(t; t_0, x_0)$ 必不在球 $B$ 上. 因而, 原点是系统(7) 的不稳定的稳态轨迹, 从而 $y(t) = a$, $t \in \mathbf{R}$ 是系统(1) 的不稳定轨迹.

## [参 考 文 献]


[1] Soriano J M. Global minimum point of a convex function[J]. Appl Math Comput, 1993, **55**(2/3): 213—218.

[2] Soriano J M. Extremum points of a convex function[J]. Appl Math Comput, 1994, **66**: 261—266.

[3] Soriano J M. On the existence of zero points[J]. Appl Math Comput, 1996, **79**: 99—104.

[4] Soriano J M. On the number of zeros of a mapping[J]. Appl Math Comput, 1997, **88**: 287—291.

[5] Soriano J M. Exstence of zeros for bounded perturbations of proper mappings[J]. Appl Math Comput, 1999, **99**: 255—259.

[6] Soriano J M. Mappings sharing a value on finite_dimensional spaces[J]. Appl Math Comput, 2001, **121**(2/3): 391—395.

[7] Soriano J M. On the Bezout theorem real case[J]. Appl Nonlinear Anal, 1995, **2**(4): 59—66.

[8] Soriano J M. On the Bezout theorem[J]. Appl Nonlinear Anal, 1997, **4**(2): 59—66.

[9] Soriano J M. Compact mappings and proper mappings beween Banach spaces that share a value[J]. Math Balkanica, 2000, **14**(1/2): 161—166.

[10] 索里阿诺 J M. 具公共值的 Fredholm 紧映射[J]. 应用数学和力学, 2001, **22**(6): 609—612.

[11] Soriano J M. Open Trajectories[J]. Appl Math Comput, 2001, **124**(2): 235—240.

[12] Soriano J M. Zeros of compact perturbations of proper mappings[J]. Appl Nonlinear Anal, 2000, **7**(4): 31—37.

[13] Soriano J M. On the existence of zero points of a continuous function[J]. Acta Mathematical Scientia, 2002, **22**(2): 171—177.

[14] Soriano J M. A second zero of a function[J]. Appl Math Comput, 2002, **133**: 245—255.

[15] Soriano J M. A stable solution[J]. Appl Math Comput, 2003, **140**: 223—229.

[16] Allgower E, Glashoff K, Peitgen H. A Survey of Homotopy Methods for Smooth Mappings [M]. Berlin: Springer_Verlag, 1981, 2—29.

[17] Allgower E, Glashoff K, Peitgen H. A survey of homotopy methods for smooth mappings[A]. In: Proceedings of the Conferece on Numerical Solutions of Nonlinear Equations[C]. Bremen, July, 1980, Lecture Notes in Math 878[M]. Berlin: Springer_Verlag, 1981, 1—29.

[18] Allgower E, George K. Numerical Continuation Methods [M]. Springer Series in Computational Mathematics 13, New York: Springer_Verlag, 1970.

[19] Garcia C B, Li T Y. On the number of solutions to polynomial system of nonlinear equations[J]. SIAM J Numer Anal, 1980, **17**: 540—546.

[20] Garicia C B, Zangwill W I. Determining all solutions to certain systems of nonlinear equations[J]. Math Oper Res, 1979, **4**: 1—14.

[21] Petrovki I G. Ordinary Differential Equations[M]. New York: Dover Publications, 1966.

[22] Myint_U T. Ordinary Differential Equations[M]. New York: North_Holland, 1978.

[23] Sûnchez D A. Ordinary Differential Equations and Stability Theory[M]. San Francisco: W H Freeman, 1968.

[24] Zeidler E. Nonlinear Functional Analysis and Its Applications[M]. New York: Springer_Verlag, 1985.

[25] Zeidler E. Applied Functional Analysis and Its Applications[M]. New York: Springer_Verlag, 1995.

[26] Elsgoltz L. Ecuaciones Diferenciales y Cûlculo Variacional[M]. Moscow: Mir, 1964.

# Stable and Unstable Stationary Trajectories

J. M. Soriano

(Departamento de Anûlisis Matemûtico, Facultad de Matemûticas, Universidad de Sevilla, Aptdo. 1160, Sevilla 41808, Spain)

**Abstract:** The stability of stationary trajectories of a particular autonomous system is studied. The proof of the result is based upon continuation methods.

**Key words:** autonomous system; continuation method; trajectory; critical point; zero point; stationary trajectory; stable solution; asymptotically stable