应用数学和力学，第1卷第2期（1980年8月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

三体问题中Birkhoff问题*的缘起和现状

董金柱（北京中国科技大学研究生院）

（1979年12月收到）

摘　要

本文从历史上概述了G. D. Birkhoff第七问题，即：对于利用十个古典积分降阶后的运动方程，要求明确它的定义集合的拓朴构造的问题。就此，简记了近年来的一些结果和它们的意义。

古典的三体问题指的是三个质点在牛顿的万有引力之下，三个质点的运动问题。化为数学问题即求解

$$\frac{dq_i}{dt}=\dot{q}_i \quad m_i\frac{d\dot{q}_i}{dt}=\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} \quad (q=x,y,z;\ i=1,2,3) \tag{1}$$

$$U=\sum_{i\neq k}\frac{m_i m_k}{r_{ik}}$$

这一组微分方程有十个代数积分，它们描写三体的重心的运动情况和表示角动量与能量守恒，这个问题有很悠久的历史，早在十九世纪初叶，便有人写它的历史了。这里不谈历史，也不谈它种种吸引人注意的原因，但不妨指出，我们可以把它称为牛顿问题，这不但是因为从牛顿以后问题便明确出现，而且因为其中的力是万有引力，运动规律指的是牛顿定律。

三体问题的解不能用目前分析上的已知函数以有尽形式表示出来。即使允许以无尽形式表出，也还存在许多须要探讨的方面，这一点此地从略。就求首次积分的角度说，除了十个代数积分之外，没有其它的初等首次积分。这十个古典积分，从历史的角度，或者从问题的提出的角度说，也是有点趣味的。就重心积分看，重心积分说的是质点的重心做等速直线运动，这是符合牛顿第一定律的。列出运动方程是根据牛顿第二定律，第一定律对明确第二定律的意义又必不可少，因而方程的积分符合第一定律似乎是不在话下的。也就是说这个积分关系式的回答在列方程的问题之前便先可以知道了。就逻辑上说，当然要有个先后顺序的道理，但从事实上说，人们知道古典积分这一部分答案恐怕是要早于列出方程的提问。三体问题的困难，却正在除了古典积分所能提供的运动情况以外，其它的情况很难了解。

目前我们对于一般的微分方程不能初等求解的事，已经很习惯，对于上述的一组具体方程不能积分的情况也就觉得自然。对这方面的了解，Poincaré 的工作功劳很大。就寻求进一步的首次积分这一点来说，在他之前，人们一直以为是致力的目标。1887年，Bruns 定理指明，不存在进一步更多的代数积分；由此，后来还可以说明不存在更多的以 Abel 函数表

* 数学学会报告，北京，1979年10月、

示的积分。1889年，Poincaré定理说，不存在以 Kepler 变元的“单值”函数表出的积分。自此以后，致力于寻求更多的积分的努力便告一段落。Poincaré 定理不排除其它变元之下的“单值”可积性。同时，也可以举其它的例子说明，存在代数的和其它初等的首次积分，并不等于问题的解答所描写的运动便能很简单地说清楚。因此，三体问题或者类似的数学力学问题，所谓求解，究竟目标是什么，便成了问题：就力学角度说，要知道的是所考虑的对象如何运动，而以确切形式描写这个运动情况的有限方程式一般却是求不到的。

就一般的动力系方程讨论，Poincaré 提出了，每一个问题都在一定的意义下，是或多或少可以求积的。G. D. Birkhoff继承了Poincaré的工作，先不考虑可不可积，把问题化为几何上各种形式的变换来处理。同时提出解决的目标：动力系统最终目标是指向定性地决定出全部的可能的运动类型和它们彼此之间的关系。[2]

根据这一目标，在微分方程的理论中开创了动力系统的理论。理论来源于实践，最后要应用到具体问题。从来源说，Birkhoff最初是证明了 Poincacé 最后几何定理。在限制三体问题中，存在无限多周期轨的证明依赖于这一几何定理。提出后不久，1917年Birkhoff提供了证明，这个定理对他的思想影响不小，主要表现在更进一步地明确了把积分的分析问题化为一个几何的变换问题，求得定性结果这一个方面的发展。

这一Poincaré定理的叙述是：以极坐标(r, θ)记，$a\leqslant r\leqslant b$ 表示一个环域 D。若一个保面积的变换T把D变为自身，并且$T(a,\theta)=(a,\theta_1)$对$\theta_1>\theta$成立，$T(b,\theta)=(b,\theta_1)$ 对 $\theta_1<\theta$ 成立，则R上有两个不动点。以上说了，可以应用这个定理来证明存在无限多的周期解。但是，就说明定理如何应用这一方面而言，可以举一个很简单的例子。为此，G. D. Birkhoff曾经用它来证明：对于近似椭圆的闭曲线C，C的内接调和多边形的个数是无限的。或者说，近似椭圆的形状的球台上，台球运动可以有无限多周期轨。特别，对于椭圆情况，这个例子是Jacobi在椭球上寻求封闭测地线的平面极限情况，这是一个可积分的问题。因此，这个例子是Jacobi的可积问题的极限情况的不可积推广。它具有多方面的启发性。可以看到一个力学问题如何化为一个面貌全然不同的几何问题。这里顺便提几句题外的话。根据Кольмогоров的说法，古典力学中的可积问题与不可积问题的解的表现之间存在着很剧烈的差异。现在这个例子是一个典型的接近可积的而相空间又是紧致集合的力学问题，可以看出周期运动和几乎周期运动在全部运动中所占有的关系。因此进一步仔细分析、讨论这个例子，如果有人做的话，是有好处的。

另外一个今天更为人熟知的所谓曲面截割法，也是由 Poincaré 提出，而G，D，Birkhoff 所发展了的。这是在 n 维的相空间里寻求一个 $(n-1)$ 维封闭曲面 S，使得每一个相轨线沿着时间增长的方向延展时，要与 S 多次相交。两次相继的交点之间的对应便界定了一个 S 变为自身的映象。这个曲面 S 叫做截割曲面。原来动力系的问题就与一个离散的 S 到自身映象的T联系了起来，T 的性质反映了运动的性质，例如在T之下 S 的不动点相应于周期运动，不动单闭 Jordan 曲线相应于存在几乎周期运动。曲面截割法的一个很明显的好处是把高维的问题化为低维的来处理，但是截割曲面 S 的存在性一般是成问题的。对于 n 维的问题，S 是 $n-1$ 维的。对于闭的 S，S 的边界$\partial(S)$ 是 $n-2$ 维的由轨线构成的解析封闭曲面。这样的闭曲面一般很难指得出来；而对于开的 S，问题更难讨论。

G，D，Birkhoff 曾经举过存在 S 的一个例子。考察一个点 P 在保守力场下的运动，它满足方程

$$\frac{dq}{dt}=\dot{q},\quad \frac{d\dot{q}}{dt}=\frac{\partial U}{\partial q}\qquad (q=x,y,z) \tag{2}$$

U 有这样的性质：当 P 在 $z=0$ 平面以外时，P总要受到一个指向 $z=0$ 的力的作用，从而有

$$\frac{\partial U}{\partial z}=-\lambda z,\quad \lambda=\lambda(x,y,z)>0 \tag{3}$$

λ 为一个解析函数。这时能量积分 $T-U=E$ 可以把六阶问题化为五阶的问题来考虑。方程 $U+E=0$ 在位置空间（x，y，z）里界定一个单闭连通曲面 $\mathscr{S}$，使 $\mathscr{S}$ 的内部区域上 $U+E\geqslant 0$，而且 $\mathscr{S}$与$z=0$ 交于一个单闭 Jordan 曲线的情况，在五维相空间M里，截割曲面 S 可以取为M里由 $z=0$，$\dot{z}\geqslant 0$ 所界定的集合，这时 ∂（S）由 $z=\dot{z}=0$ 决定，它由轨线所构成，这个S实际上是一个四维的球体，$\partial(S)$为球面，原方程在S上的感应变换T把 S 映到自身，是拓扑变换，从而按 Brower 不动点定理，存在不动点。不动点相应于点P的周期运动。

处理这个例子的方法能否用来讨论三体问题是很自然产生的问题，这也是 G，D，Birkhoff 所关心的。三体运动中，不变平面即相当于上例中的平面 $z=0$，而相当于（3）的方程则是

$$\frac{d\Omega}{dt}=\frac{k}{I},\quad \frac{di}{dt}=k\left\{\frac{m_1+m_2+m_3}{m_1m_2m_3\eta^2}-\frac{1}{I^2}\right\}^{\frac{1}{2}}\sin i$$

其中 I为 Jacobi 函数

$$I=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} m_i(x_i^2+y_i^2+z_i^2),$$

k 为系统对于不变平面Π的法线的角动量，Ω为 Π 里一个定直线与三体的节线之间的夹角，η 为三体构成的三角形的面积，i 为三体平面对Π的倾角。

十个古典积分在相空间里确定了一个流形 M^8，根据具体方程的具体特点，可以再降去一阶，成为一个7-维的流形M^7. 这个M^7上的轨线要求用一个低维的截割面S上的变换来反映、对比于对$\partial(S)$ 的要求，就维数和由轨线构成这两项基本性质说，G，D，Birkboff 提出取 $\partial(S)=M^5$，M^5为M^7 中相应于平面三体运动的子流形，于是便首先产生 M^7 是个什么集合的问题。1927年，他指出M^7 的连通性也还没人知道[2]、1929 年，他对德国数学联合会提出报告列举了若干古典力学中的问题，其中第七个问题便是进一步问M^7的拓扑构造。[1]

对于M^7的连通性问题，现在已经得到解决[9]；进一步的拓扑构造问题，由于高维流形如何叫做彻底解决，在拓扑上尚不明确，今天只能说谁的结果最好，这方面有 Easton 的工作[6]。从上述的希望用变换方法研究 M^7 上的轨线来说，若取截割曲面 S，使 $\partial(S)=M^5$，当然必须先了解M^5的构造，对于不同的总能E和角动量 ω，M^5 的构造在拓扑上相当于如下的集合[5]：

$(S^3-3S^1)\times(R^1\times S^2)$ 当 $E\geqslant 0$，$\omega=0$

$(S^3-3S^1)\times R^3$ $E<0$，$\omega=0$

$(S^3-3S^1)\times S^3$ $E<0$，$-2E\omega^2<9$；$\omega\neq 0$

$(S^3-3S^1)\times S^3$ by surgery，$E<0$，$9<-2E\omega^2<\frac{25}{2}$

$T^2\times R^4UT^2\times R^4UT^2\times R^4$，$E<0$，$\frac{25}{2}<-2E\omega^2$

由此可见，即使以适宜的方式选出了截割曲面S，以之反映M^7中的运动，由于$\partial(S)=M^5$的复杂性，仍然不能轻而易举地采用对（2），（3）的讨论方法来得到三体运动的性质。

虽然如此，对M^7所得到的关于连通性方面的结果，本身也可以应用到原来的三体问题，从而得到运动的一些特点。对于固定的角动量值C，M^7的连通性依赖于总能E的值，简单地说，当E从$+\infty$连续减小到$-\infty$时，M^7从一个分量变为二个，再变为三个分量。对于有三个分量的情况，每一个分量相应于三体中某一体在全部运动过程中保持较远。如果有一个具体的天体运动的问题，要说明某二体较近，则需证明这一具体的运动在M^7里相应的轨线属于哪一个分量。为此，当然首先计算角动量的值C和能量的值E，判明是否为M^7有三个分量的情形。判别运动属于哪一个分量则可借助于不等式

$$C^2D^2(x_1,\cdots,z_2)\leqslant 2(U+E)$$

来讨论，其中$D=\sqrt{A}/\sqrt{B}$，A为位置坐标$(x_1,\cdots,z_2)$的四次的B为6次的齐次函数。

对应用方面说，太阳系边缘逆行卫星海卫1应该永远为卫星，就日、海、海卫1这一三体问题来说，可以由此计算得到证明[10]；对于月球做为卫星的运动问题，就日地月三体问题而言，也可由此证明月球应永远保持在地球邻近[11]。另外，双星的起源里有些问题也应该可以讨论。双星做为两个质点考虑，它们的形成，最简单地从逻辑上说，有两个可能：生来就是在一起的，或者原不在一起，后来变化，在运动的过程中转变为在一起。对于任意一个三体运动，如果保持角动量不变，而能量在一定的外界影响下不断减小，最后三体中便有一对形成双星。但这方面的具体研究还没人做。

回到原来的G，D，Birkhoff的设想，用$\partial(S)=M^5$来处理，使M^7上的轨线流转化为T的变换问题，看来一时难以得到具体的结果。这迫使人们寻求其它方面的解决办法，很可能是，将来的出路完全与原来的设想目标很不相同。这方面的努力有Easton和Conley提出的孤立分块理论和其应用的企图[7][8]、由于这些已经超出对G，D；Birkhoff第7问题的范围，这里就不再赘述。Wintner曾经提出[4]，对每一代数学家三体问题的面目可能有很大的不同，目前它的面目由哪些方面来表现，尚未有明确的数学表达，即问题的提法还不明确。若干近年来的各方面的结果，应另文讨论，这里仅指出，分块理论[8]是一个极其值得注意的发展。

参 考 文 献

1. Birkhoff, G. D., Einige Problem der Dynamik, Jahresbericht der Deutschen Mathematikers Vereinigung (1929)38, Abt. Heft 1/4, 1—16.
Collected Works 2 778—793
2. Birkhoff, G. D., Dynamical Systems, (1927) American Mathematical Society Colloquium Publications.
3. Kolmogrof, The general theory of dynamical systems and classical mechanics, (1954) International Congress of Mathematics. Amsterdam
4. Wintner, A., The analytical foundations of celestial mechanics.
5. Easton, R. W., Some topology of the 3—body problem, *Journal of Differential Equations*, 10, 2(1971)
6. Easton, R. W., Some topology of n-body problems, *Journal of Differential Equations*, 19, 2(1975)
7. Easton, R. W., The topology of the regularited integral surfaces of the 3-body

problem, Jour. of D. E. 12, 2(1972)
8. Easton, R. W., Some qualitative aspects of the 3-body flow, Dynamical System, No2, An international symposium(1976).
9. 董金柱，一般三体问题的古典积分的一些性质，中国科学，1974年9月第5期。
10. 董金柱，海王星的卫星的运动，北京天文台刊第15期。1978, 12, 58—66.
11. 董金柱，月球运动的一个性质，北京天文台台刊，新刊第一期，(1979).

A Brief Account of G. D. Birkhoff's Problem in the Problem of Three Bodies

Tung Chin-chu

(Graduate School, Chinese University of Science and Technology)

Abstract

The present article gives a historical survey of G. D. Birkhoff's seventh problem which is an inquiry about the topological structure of the set of definition of the reduced differential equations of motion. Recent advances in the problem and their meaning have been briefly indicated.