应用数学和力学，第1卷第2期（1980年8月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

关于具有转向点的一类常微分方程的边值问题

江福汝（上海复旦大学）

（1979年12月28日收到）

摘　要

本文应用多重尺度法研究具有转向点的一类常微分方程的边值问题。避免了[1]中出现的悖理，以及[2]中关于确定任意常数的变分运算；构造出边值问题的解的一致有效渐近近似式。并研究了非共振的情形。

一、前　　言

由于在量子力学，波的传播问题以及力学和物理学的其它问题中，广泛出现含有转向点的微分方程，所以近几十年来，这类方程一直是数学工作者和力学工作者研究的重要课题。关于这方面的重要工作有1926年Wentzel，Kramers，和 Brillouin 的工作（现今将他们所用的方法简称为W．K．B.方法），以及1931和1934年Langer的工作。在著作[3]中详细地介绍了这两种方法。它们一直是研究具有转向点的微分方程的重要工具。

但是在一些实际问题中，例如关于粘性流在反向旋转的圆盘间的流动，人们感兴趣的是这类问题的解当所含小参数$\varepsilon\to0$时的渐近性态。在1970年，Ackerberg和O Malley[1]首先应用匹配方法研究了下面形式的边值问题：

$$\varepsilon y''+f(x;\varepsilon)y'+g(x;\varepsilon)y=0,\quad (0<\varepsilon\ll1,\ -a<x<b)$$
$$y(-a)=\alpha,\ y(b)=\beta$$

其中$f(0;0)=0$（即$x=0$是其转向点）。他们在条件$f'(x;\varepsilon)<0$，$(-a\leqslant x\leqslant b)$下，研究了边值问题的解的渐近性态，发现边值问题的解包含三个组成部分：i. 在适当端点的边界层项；ii. 当$x=o(\varepsilon^{\frac{1}{2}})$时适用的转向点解；iii. 在边界层和转向点邻域的外部区域中的"外部解"（在该著作中称它为内部解）。但是在他们的工作中出现了悖理，例如对于存在共振的情形(即外部解是非零解的情形)，将在两个端点都出现边界层，而实际上当$I=\int_{-a}^{b}f(x;0)dx\neq0$时只应在一个端点出现边界层（参见本文中(2)的(i)和(ii)）；此外在他们导出的渐近近似式中，含有一个任意常数，即不能完全确定解的渐近近似式。为了克服这一缺陷，1977年Grasman和Matkowsky[2]又提出应用变分运算来确定任意常数的方法，使问题复杂

化。

本文应用多重尺度法研究了上述问题，得出了完整的结果。避免了Ackerberg和O'Malley引出的悖理，以及Grasman和Matkowsky引入的变分运算，并研究了他们所没有讨论的非共振情形。

二、形式渐近近似式

考察边值问题：

$$L_\varepsilon[y]\equiv\varepsilon y''+f(x;\varepsilon)y'+g(x;\varepsilon)y=0,\ (0<\varepsilon\ll 1,\ -a<x<b) \tag{2.1}$$

$$y(-a)=\alpha,\qquad y(b)=\beta \tag{2.2}$$

假设$f(x;\varepsilon)$和$g(x;\varepsilon)$当$\varepsilon\to 0$时具有渐近展开式：

$$f(x;\varepsilon)\sim f_0(x)+\varepsilon f_1(x)+\varepsilon^2 f_2(x)+\cdots$$

$$g(x;\varepsilon)\sim g_0(x)+\varepsilon g_1(x)+\varepsilon^2 g_2(x)+\cdots$$

以及系数$f_i(x)$和$g_i(x)$，$(i=0,1,2,\cdots)$是$[-a,b]$上的无限次可微函数，和 $f(0;0)\equiv f_0(0)=0$；又假设在$[-a,b]$上成立

$$f_x'(x;0)\equiv f_0'(x)<0 \tag{2.3}$$

引进两变量

$$\tilde{x}\equiv\frac{u(x)}{\varepsilon},\quad \bar{x}=x$$

其中$u(x)$是待定函数，将关于 x 的导数替换成

$$\frac{d}{dx}\equiv\varepsilon^{-1}u_x\frac{\partial}{\partial\tilde{x}}+\frac{\partial}{\partial\bar{x}}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\equiv\varepsilon^{-2}u_x^2\frac{\partial^2}{\partial\tilde{x}^2}+\varepsilon^{-1}\left(2u_x\frac{\partial^2}{\partial\tilde{x}\partial\bar{x}}+u_{xx}\frac{\partial}{\partial\tilde{x}}\right)+\frac{\partial^2}{\partial\bar{x}^2}$$

将关于 x 的常微分算子 L_ε 替换成关于$\tilde{x}$ 和 $\bar{x}$ 的偏微分算子$\tilde{L}_\varepsilon$（为简单起见，今后将 $\bar{x}$仍记成x）：

$$\tilde{L}_\varepsilon\equiv\varepsilon^{-1}(K_0+\varepsilon K_1+\varepsilon^2K_2+\cdots) \tag{2.4}$$

其中

$$K_0\equiv u_x^2\frac{\partial^2}{\partial\tilde{x}^2}+u_xf_0(x)\frac{\partial}{\partial\tilde{x}} \tag{2.5}$$

$$K_1\equiv 2u_x\frac{\partial^2}{\partial\tilde{x}\partial x}+u_{xx}\frac{\partial}{\partial\tilde{x}}+f_0(x)\frac{\partial}{\partial x}+u_xf_1(x)\frac{\partial}{\partial\tilde{x}}+g_0(x) \tag{2.5a}$$

$$K_2\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+f_1(x)\frac{\partial}{\partial x}+u_xf_2(x)\frac{\partial}{\partial\tilde{x}}+g_1(x) \tag{2.5b}$$

$$K_i\equiv f_{i-1}(x)\frac{\partial}{\partial x}+u_xf_i(x)\frac{\partial}{\partial\tilde{x}}+g_{i-1}(x),\ (i=3,4,\cdots) \tag{2.5c}$$

假设解的渐近展开式是

$$y\sim y_0(\tilde{x},x)+\varepsilon y_1(\tilde{x},x)+\varepsilon^2y_2(\tilde{x},x)+\cdots \tag{2.6}$$

易知

$$\tilde{L}_\varepsilon\left[\sum_{i=0}^{\infty} y_i(\tilde{x},x)\right]=\varepsilon^{-1}\{K_0[y_0]+\varepsilon(K_0[y_1]+K_1[y_0])+\cdots$$

$$+\varepsilon^i(K_0[y_i]+K_1[y_{i-1}]+\cdots+K_i[y_0])+\cdots\}$$

令 ε 的各次幂的系数为零，得到关于 $y_i(\tilde{x},x)$，$(i=0,1,2,\cdots)$的递推方程：

$$K_0[y_0]\equiv u_x^2\frac{\partial^2 y_0}{\partial\tilde{x}^2}+u_x f_0(x)\frac{\partial y_0}{\partial\tilde{x}}=0 \tag{2.7}$$

$$K_0[y_1]=-K_1[y_0] \tag{2.7a}$$

$$K_0[y_i]=-(K_1[y_{i-1}]+K_2[y_{i-2}]+\cdots+K_i[y_0]),(i=2,3,\cdots) \tag{2.7b}$$

从方程（2.7）看出，若取

$$u(x)=\int_{x_0}^{x} f_0(s)ds \tag{2.8}$$

其中 x_0 是待定常数，则得到常系数方程：

$$\frac{\partial^2 y_0}{\partial\tilde{x}^2}+\frac{\partial y_0}{\partial\tilde{x}}=0 \tag{2.9}$$

可以求得它的通解为

$$y_0=A_0(x)+B_0(x)e^{-\tilde{x}} \tag{2.10}$$

其中

$$\tilde{x}=\frac{1}{\varepsilon}\int_{x_0}^{x} f_0(s)ds \tag{2.11}$$

$A_0(x)$、$B_0(x)$ 是任意函数，根据以后给出的条件确定。

将（2.10）式代入方程（2.7a）得

$$f_0^2(x)\left(\frac{\partial^2 y_1}{\partial\tilde{x}^2}+\frac{\partial y_1}{\partial\tilde{x}}\right)=-K_1[y_0] \tag{2.12}$$

其中

$$K_1[y_0]\equiv[-f_0(x)\frac{dB_0}{dx}-(f_0'(x)+f_0(x)f_1(x)-g_0(x))B_0]e^{-\tilde{x}}$$

$$+f_0(x)\frac{dA_0}{dx}+g_0(x)A_0$$

令 $K_1[y_0]\equiv 0$，得到关于 $A_0(x)$、$B_0(x)$ 的微分方程：

$$f_0(x)\frac{dA_0}{dx}+g_0(x)A_0=0 \tag{2.13}$$

$$f_0(x)\frac{dB_0}{dx}+(f_0'(x)+f_0(x)f_1(x)-g_0(x))B_0=0 \tag{2.14}$$

解得

$$A_0(x)=C_0x^l\exp\left[-\int_{x_1}^{x}\left(\frac{g_0(s)}{f_0(s)}+\frac{l}{s}\right)ds\right] \tag{2.15}$$

$$B_0(x)=D_0 f_0^{-1}(x)x^{-l}\exp\Big[\int_{x_2}^{x}\Big(\frac{g_0(s)}{f_0(s)}+\frac{l}{s}-f_1(s)\Big)ds\Big] \tag{2.16}$$

其中C_0，D_0是任意常数．x_1、x_2是随意预先给定的常数，和

$$l=-\frac{g(0;0)}{f'(0;0)}\equiv-\frac{g_0(0)}{f'(0)} \tag{2.17}$$

（注意，这里只是形式运算，$A_0(x)$和$B_0(x)$一般在$x=0$可能具有奇性）所以当$x\neq0$时

$$y_0=C_0x^l\exp\Big[-\int_{x_1}^{x}\Big(\frac{g_0(s)}{f_0(s)}+\frac{l}{s}\Big)ds\Big]$$

$$+D_0 f_0^{-1}(x)x^{-l}\exp\Big[\int_{x_2}^{x}\Big(\frac{g_0(s)}{f_0(s)}+\frac{l}{s}-f_1(s)\Big)ds\Big]\exp\Big[-\frac{1}{\varepsilon}\int_{x_0}^{x}f_0(s)ds\Big] \tag{2.18}$$

这时方程（2.12）化为齐次方程：

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial\tilde{x}^2}+\frac{\partial y_1}{\partial\tilde{x}}=0$$

又可以求得它的通解为

$$y_1=A_1(x)+B_1(x)e^{-\tilde{x}} \tag{2.19}$$

其中$A_1(x)$、$B_1(x)$是任意函数。将(2.18)、(2.19)式代入方程（2.7b）（取$i=2$），令其右端恒等于零，又可以得到关于$A_1(x)$、$B_1(x)$的微分方程等等。这样继续下去，可以逐次地求得y_i，$(i=1,2,\cdots)$。

下面再根据不同情形来选取（2.18）式中的待定常数x_0、x_1、x_2，和根据边值条件来确定任意常数C_0、D_0，以及消去$x=0$点的奇性。

1．共振情形

若边值问题（2.1)—(2.2）存在非零的外部解，则称边值问题存在“共振”。继 Ackerbery 和 O'Malley 之后，Cook 和 Eckhaus（1973）[4]，Matkowsky（1975）[5]，Niijima（1978）[6]，Olver（1978）[7]等都讨论了这类问题，并给出存在共振的充分条件。在这种情形，退化方程（2.13）存在非零的解析解（2.15)。记

$$I\equiv\int_{-a}^{b}f_0(s)ds \tag{2.20}$$

下面再分三种情形讨论。

（i） 若$I>0$

根据假设（2.3）知

$$\int_{-a}^{x}f_0(s)ds>0,\quad 当-a<x<b$$

此时，在端点$x=-a$可能出现边界层，而在端点$x=b$不出现边界层，所以在（2.18）式中应取$x_0=-a$，随意地取$x_1=x_2=-a$　又为了消除（2.18）式在$x=0$点的奇性，再作函数：

$$\tilde{y}_0=C_0x^l\exp\left[-\int_{-a}^{x}\left(\frac{g_0(s)}{f_0(s)}+\frac{l}{s}\right)ds\right]$$

$$+\Psi_0(x)\exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\int_{-a}^{x}f_0(s)ds\right] \tag{2.21}$$

其中

$$\Psi_0(x)=\begin{cases} D_0f_0^{-1}(x)x^{-l}\exp\left[\int_{-a}^{x}\left(\frac{g_0(s)}{f_0(s)}+\frac{l}{s}-f_1(s)\right)ds\right], & \text{当}|x|\geqslant\eta \\ \psi_0(x), & \text{当}|x|\leqslant\eta \end{cases} \tag{2.22}$$

η 是满足条件 $0<\eta<\min(a,b)$ 的随意给定的常数；D_0 是待定的常数；$\psi_0(x)$ 是连接 $\Psi_0(-\eta)$ 和 $\Psi_0(\eta)$ 的无限次可微函数。

将（2.21）式代入边值条件（2.2）得

$$\alpha=C_0(-a)^l+D_0f_0^{-1}(-a)(-a)^{-l}$$

$$\beta=C_0b^l\exp\left[-\int_{-a}^{b}\left(\frac{g_0(s)}{f_0(s)}+\frac{l}{s}\right)ds\right]$$

可以唯一地解出 C_0 和 D_0，再代回（2.21）式就求得 $\tilde{y}_0$.

下面再求 y_1 将（2.18）、（2.19）式代入方程（2.7b）（取 $i=2$），令其右端恒等于零：$K_1[y_1]+K_2[y_0]\equiv0$，则得到关于 $A_1(x)$ 和 $B_1(x)$ 的微分方程：

$$f_0(x)\frac{dA_1}{dx}+g_0(x)A_1=-\left(\frac{d^2A_0}{gx^2}+f_1(x)\frac{dA_0}{dx}+g_1(x)A_0\right)\equiv F_1(x)$$

$$f_0(x)\frac{dB_1}{dx}+\left(f_0'(x)+f_0(x)f_1(x)-g_0(x)\right)B_1$$

$$=\frac{d^2B_0}{dx^2}+f_1(x)\frac{dB_0}{dx}+(g_1(x)-f_0(x)f_2(x))B_0\equiv G_1(x)$$

解得

$$A_1=C_1x^l\exp\left[-\int_{-a}^{x}\left(\frac{g_0(s)}{f_0(s)}+\frac{l}{s}\right)ds\right]$$

$$+\int_{-a}^{x}\frac{F_1(s)}{f_0(s)}\left(\frac{x}{s}\right)^l\exp\left[\int_{x}^{s}\left(\frac{g_0(t)}{f_0(t)}+\frac{l}{t}\right)dt\right]ds \tag{2.23}$$

$$B_1=D_1f_0^{-1}(x)x^{-l}\exp\left[\int_{-a}^{x}\left(\frac{g_0(s)}{f_0(s)}+\frac{l}{s}-f_1(s)\right)ds\right]$$

$$+\int_{-a}^{x}\frac{G_1(s)}{f_0(x)}\left(\frac{x}{s}\right)^{-l}\exp\left[-\int_{x}^{s}\left(\frac{g_0(t)}{f_0(t)}+\frac{l}{t}-f_1(t)\right)dt\right]ds \tag{2.24}$$

其中 C_1 和 D_1 是任意常数。作函数

$$\widetilde{y}_1=A_1(x)+\Psi_1(x)\exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\int_{-a}^{x}f_0(s)ds\right] \tag{2.25}$$

其中

$$\Psi_1(x)=\begin{cases}B_1(x), & 当|x|\geqslant\eta\\ \psi_1(x), & 当|x|\leqslant\eta\end{cases}$$

$\psi_1(x)$ 是连接 $B_1(-\eta)$ 和$B_1(\eta)$ 的无限次可微函数，代入边值条件：

$$\widetilde{y}_1(-a)=0,\quad \widetilde{y}_1(b)=0$$

得

$$0=C_1(-a)^l+D_1f_0^{-1}(-a)(-a)^{-l}$$

$$0=C_1b^l\exp\left[-\int_{-a}^{b}\left(\frac{g_0(s)}{f_0(s)}+\frac{l}{s}\right)ds\right]+\int_{-a}^{b}\frac{F_1(s)}{f_0(s)}\left(\frac{b}{s}\right)^l\exp\left[\int_{b}^{s}\left(\frac{g_0(t)}{f_0(t)}+\frac{l}{t}\right)dt\right]ds$$

从上式可以唯一地解出C_1和D_1，再代回（2.25）式就求得 $\widetilde{y}_1$. 在（2.6）式中取 $y_0=\widetilde{y}_0$，$y_1=\widetilde{y}_1$ 就得到边值问题的解的一阶形式渐近近似式：

$$\begin{aligned}y_{(1)}&=\widetilde{y}_0+\varepsilon\widetilde{y}_1\\&=A_0(x)+\varepsilon A_1(x)+(\Psi_0(x)+\varepsilon\Psi_1(x))\exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\int_{-a}^{x}f_0(s)ds\right]\end{aligned} \tag{2.26}$$

在第（三）部分再讨论它的渐近正确性。这样继续下去，可以逐步求得它的各阶形式渐近近似式。

（ii） 若 $I<0$

根据条件（2.3）知

$$\int_{b}^{x}f_0(s)ds>0,\qquad 当-a<x<b$$

此时，在端点 $x=b$ 可能出现边界层，而在端点 $x=-a$ 不出现边界层，所以在（2.18）式中应取 $x_0=b$ 应用（i）中同样的方法可以构造出解的形式渐近近似式，只不过将 $-a$ 相应地换成b

（iii） 若 $I=0$

根据条件（2.3）知

$$\int_{-a}^{x}f_0(s)ds=\int_{b}^{x}f_0(s)ds>0,\quad 当-a<x<b$$

此时，在端点 $x=-a$ 和 $x=b$ 都可能出现边界层，并且在各端点的边界层项，可以用同一个式子来表示。在（2.18）式中我们可随意取例如 $x_0=x_1=x_2=-a$，作函数

$$\widetilde{y}_0=C_0x^l\exp\left[-\int_{-a}^{x}\left(\frac{g_0(s)}{f_0(s)}+\frac{l}{s}\right)ds\right]+\Phi_0(x)\exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\int_{-a}^{x}f_0(s)ds\right] \tag{2.27}$$

其中

$$\Phi_0(x)=\begin{cases} D_0 f_0^{-1}(x)x^{-l}\exp\left[\int\limits_{-a}^{x}\left(\frac{g_0(s)}{f_0(s)}+\frac{l}{s}-f_1(s)\right)ds\right], & \text{当}|x|\geqslant\eta \\ \varphi_0(x), & \text{当}|x|\leqslant\eta \end{cases}$$

$\varphi_0(x)$ 是连接 $\Phi_0(-\eta)$ 和 $\Phi_0(\eta)$ 的无限次可微函数。将 (2.27) 式代入边值条件 (2.2)，得到关于 C_0 和 D_0 的线性代数方程组：

$$\alpha=C_0(-a)^l+D_0 f_0^{-1}(-a)(-a)^{-l}$$

$$\beta=C_0 b^l\exp\left[-\int\limits_{-a}^{b}\left(\frac{g_0(s)}{f_0(s)}+\frac{l}{s}\right)ds\right]+D_0 f_0^{-1}(b)b^{-l}\exp\left[\int\limits_{-a}^{b}\left(\frac{g_0(s)}{f_0(s)}+\frac{l}{s}-f_1(s)\right)ds\right]$$

根据条件(2.3)知，可以唯一地解出C_0和D_0，再代回(2.27)式就求得$\tilde{y}_0$。应用(i)中类似的步骤，可以求得$\tilde{y}_1,\tilde{y}_2\cdots$等等。

2. 非共振情形

此时，退化方程(2.13)只存在为零的解析解。因此，一般地在两个端点都将出现边界层。由于当$-a<x<b$时不可能同时出现 $\int\limits_{-a}^{x}f_0(s)ds>0$ 和 $\int\limits_{b}^{x}f_0(s)ds>0$，所以必须分别就$x<0$和$x>0$构造形式渐近近似式。从条件(2.3)知

$$\int\limits_{-a}^{x}f_0(s)ds>0\text{，当}x<0\text{；}\qquad\int\limits_{b}^{x}f_0(s)ds>0\text{，当}x>0$$

所以允许分别在$x=-a$和$x=b$构造边界层项。

在(2.18)式中令$C_0=0$，当$x<0$时取$x_0=x_2=-a$，当$x>0$时取$x_0=x_2=b$，得

$$y_0=\begin{cases} D_0^{(1)}f_0^{-1}(x)x^{-l}\exp\left[\int\limits_{-a}^{x}\left(\frac{g_0(s)}{f_0(s)}+\frac{l}{s}-f_1(s)\right)ds\right]\exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{-a}^{x}f_0(s)ds\right] \\ \equiv B_0^{(1)}(x)\exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{-a}^{x}f_0(s)ds\right], \quad \text{当}-a\leqslant x<0 \\ D_0^{(2)}f_0^{-1}(x)x^{-l}\exp\left[\int\limits_{b}^{x}\left(\frac{g_0(s)}{f_0(s)}+\frac{l}{s}-f_1(s)ds\right]\exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{b}^{x}f_0(s)ds\right] \\ \equiv B_0^{(2)}(x)\exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{b}^{x}f_0(s)ds\right], \quad \text{当}0<x\leqslant b \end{cases} \tag{2.28}$$

作函数

$$\tilde{y}_0=\begin{cases} \Psi_0^{(1)}(x)\exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{-a}^{x}f_0(s)ds\right], & \text{当}-a\leqslant x\leqslant 0 \\ \Psi_0^{(2)}(x)\exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{b}^{x}f_0(s)ds\right], & \text{当}0\leqslant x\leqslant b \end{cases} \tag{2.29}$$

其中

$$\Psi_0^{(1)}(x)=\begin{cases}B_0^{(1)}(x), & 当-a\leqslant x\leqslant-\eta\\ \varphi_0(x), & 当-\eta\leqslant x\leqslant 0\end{cases} \tag{2.30}$$

$$\Psi_0^{(2)}(x)=\begin{cases}B_0^{(2)}(x), & 当\eta\leqslant x\leqslant b\\ \varphi_0(x), & 当 0\leqslant x\leqslant\eta\end{cases} \tag{2.31}$$

又$\varphi_0(x)$是在$|x|\leqslant-\dfrac{\eta}{2}$恒为零的连接$\Psi_0^{(1)}(-\eta)$和$\Psi_0^{(2)}(\eta)$的无限次可微函数。将(2.29)式代入边值条件(2.2)得

$$\alpha=D_0^{(1)}\ f_0^{-1}(-a)(-a)^{-l},\quad \beta=D_0^{(2)}\ f_0^{-1}(b)b^{-l}$$

可以唯一地解出$D_0^{(1)}$和$D_0^{(2)}$，再代回(2.29)式就求得$\tilde{y}_0$。

下面再确定$\tilde{y}_1$。假设

$$y_1=\begin{cases}B_1^{(1)}(x)\exp\left[-\dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int_{-a}^{x} f_0(s)ds\right], & 当-a\leqslant x<0\\[2ex] B_1^{(2)}(x)\exp\left[-\dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int_{b}^{x} f_0(s)ds\right], & 当 0<x\leqslant b\end{cases} \tag{2.32}$$

其中$B_1^{(1)}(x)$和$B_1^{(2)}(x)$是任意函数。将(2.32)和(2.18)式代入方程(2.7b)(取$i=2$)的右端，并令它恒等于零，则得到$B_1^{(1)}(x)$和$B_1^{(2)}(x)$的微分方程：

$$f_0(x)\frac{dB_1^{(i)}}{dx}+(f_0'(x)+f_0(x)f_1(x)-g_0(x))\,B_1^{(i)}$$

$$=\frac{d^2B_0^{(i)}}{dx^2}+f_1(x)\frac{dB_0^{(i)}}{dx}+(g_1(x)-f_0(x)f_2(x))\,B_0^{(i)}\equiv G_i(x)$$

$$(i=1,\ 2)$$

解得

$$B_1^{(i)}(x)=D_1^{(i)}\ f_0^{-1}(x)x^{-l}\exp\left[\int_{x_i}^{x}\left(\frac{g_0(s)}{f_0(s)}+\frac{l}{s}-f_1(s)\right)ds\right]$$

$$+\int_{x_i}^{x}\frac{G_i(s)}{f_0(x)}\left(\frac{x}{s}\right)^{-l}\exp\left[-\int_{x}^{s}\left(\frac{g_0(t)}{f_0(t)}+\frac{l}{t}-f_1(t)dt\right]ds \tag{2.33}$$

$$(i=1,2;\ x_1=-a,\ x_2=b)$$

其中$D_1^{(i)}$，$(i=1,2)$是任意常数。为了消除(2.32)式[其中$B_1^{(i)}$，$(i=1,\ 2)$由(2 33)式给出]在$x=0$点的奇性，作函数

$$\tilde{y}_1=\begin{cases}\Psi_1^{(1)}(x)\exp\left[-\dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int_{-a}^{x}f_0(s)ds\right], & \text{当}-a\leqslant x\leqslant 0\\ \Psi_1^{(2)}(x)\exp\left[-\dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int_{b}^{x}f_0(s)ds\right], & \text{当}\ 0\leqslant x\leqslant b\end{cases}\tag{2.34}$$

其中

$$\Psi_1^{(1)}(x)=\begin{cases}B_1^{(1)}(x), & \text{当}-a\leqslant x\leqslant-\eta\\ \varphi_1(x), & \text{当}-\eta\leqslant x\leqslant 0\end{cases}\tag{2.35}$$

$$\Psi_1^{(2)}(x)=\begin{cases}B_1^{(2)}(x), & \text{当}\eta\leqslant n\leqslant b\\ \varphi_1(x), & \text{当}\ 0\leqslant x\leqslant\eta\end{cases}\tag{2.36}$$

和$\varphi_1(x)$是在$|x|\leqslant\dfrac{\eta}{2}$为零的连接$\Psi_1^{(1)}(-\eta)$和$\Psi_1^{(2)}(\eta)$的无限次可微函数。将(2.34)式代入边值条件：

$$\tilde{y}_1(-a)=0,\ \tilde{y}_1(b)=0$$

得

$$0=D_1^{(1)}f_0^{-1}(-a)(-a)^{-1},\ 0=D_1^{(2)}f_0^{-1}(b)b^{-1}$$

所以$D_1^{(1)}=D_1^{(2)}=0$。再代回(2.31)式就求得$B_1^{(1)}(x)$和$B_1^{(2)}(x)$，也就是求得$\Psi_1^{(1)}(x)$和$\Psi_1^{(2)}(x)$。所以边值问题的一阶形式渐近近似式是

$$y_{(1)}=\tilde{y}_0+\varepsilon\tilde{y}_1=\begin{cases}(\Psi_0^{(1)}+\varepsilon\Psi_1^{(1)})\exp\left[-\dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int_{-a}^{x}f_0(s)ds\right], & \text{当}-a\leqslant x\leqslant 0\\ (\Psi_0^{(2)}+\varepsilon\Psi_1^{(2)})\exp\left[-\dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int_{b}^{x}f_0(s)ds\right], & \text{当}\ 0\leqslant x\leqslant b\end{cases}$$

其中$\Psi_0^{(i)}$、$\Psi_1^{(i)}$，$(i=1,\ 2)$由(2.30)、(2.31)、(2.35)、(2.36)式给出。

三、渐近正确性的讨论

先考察(1)中(i)的情形。假设已作得解的一阶形式渐近近似式$y_{(1)}$（见(2.26)式）。以R_1表示真解与$y_{(1)}$的余项（又称误差）：

$$R_1=y-y_{(1)}$$

将$y=y_{(1)}+R_1$代入边值问题(2.1)—(2.2)，则得到关于R_1的边值问题：

$$L_\varepsilon[R_1]=-L_\varepsilon[y_{(1)}],\ (-a<x<b)\tag{3.1}$$

$$R_1(-a)=0,\ R_1(b)=0\tag{3.2}$$

可以证明

$$L_\varepsilon[y_{(1)}]=O(\varepsilon),\ (-a<x<b)\tag{3.3}$$

事实上，若展开$f(x;\varepsilon)=f_0(x)+\varepsilon f_1(x)+\varepsilon^2\bar{f}_2(x;\theta_1\varepsilon)$，$g(x;\varepsilon)=g_0(x)+\varepsilon\bar{g}_1(x;\theta_2\varepsilon)$，其中$0<\theta_1,\theta_2<1$，则有

$$L_\varepsilon[y_{(1)}]=\tilde{L}_\varepsilon[\tilde{y}_0+\varepsilon\tilde{y}_1]=\varepsilon^{-1}\left(K_0+\varepsilon K_1+\varepsilon^2\bar{K}_2+\varepsilon^3\bar{f}_2(x;\theta_1\varepsilon)\frac{\partial}{\partial x}\right)(\tilde{y}_0+\varepsilon\tilde{y}_1)$$

$$=\varepsilon^{-1}\left\{K_0[\tilde{y}_0]+\varepsilon(K_0[\tilde{y}_1]+K_1[\tilde{y}_0])+\varepsilon^2(K_1[\tilde{y}_1]+\bar{K}_2[\tilde{y}_0])\right.$$

$$\left.+\varepsilon^3\left(\bar{K}_2[\tilde{y}_1]+\bar{f}_2(x;\theta_1\varepsilon)\frac{\partial\tilde{y}_0}{\partial x}\right)+\varepsilon^4\bar{f}_2(x;\theta_1\varepsilon)\frac{\partial\tilde{y}_1}{\partial x}\right\}$$

其中

$$\bar{K}_2\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+f_1(x)\frac{\partial}{\partial x}+f_0(x)\bar{f}_2(x;\theta_1\varepsilon)\frac{\partial}{\partial\tilde{x}}+\bar{g}_1(x;\theta_2\varepsilon)$$

当 $|x|\geqslant\eta$ 时， 因 $K_0[\tilde{y}_0]=K_0[\tilde{y}_1]=K_1[\tilde{y}_0]=0$； $K_1[\tilde{y}_1]+\bar{K}_2[\tilde{y}_0]=O(1)\cdots$，$\bar{f}_2(x;\theta_1\varepsilon)\dfrac{\partial\tilde{y}_1}{\partial x}=O(1)$；所以

$$L_\varepsilon[y_{(1)}]=O(\varepsilon),\ \text{当}\ |x|\geqslant\eta$$

又当 $|x|\leqslant\eta$ 时，考虑到 $e^{-\tilde{x}}=\exp\left[-\dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int_{-a}^{x}f_0(s)ds\right]\leqslant\exp\left[-\dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int_{-a}^{\eta}f_0(s)ds\right]=O(\varepsilon^N)$（$N$ 是随意取定的正整数），有 $K_0[\tilde{y}_0]=K_0[A_0(x)+\psi_0(x)e^{-\tilde{x}}]=0$；$K_0[\tilde{y}_1]+K_1[\tilde{y}_0]=K_0\times[A_1(x)+\psi_1(x)e^{-\tilde{x}}]+K_1[A_0(x)+\psi_0(x)e^{-\tilde{x}}=O(\varepsilon^N)$；$K_1[\tilde{y}_1]+\bar{K}_2[\tilde{y}_0]=O(1)$；$\cdots$，$\bar{f}_2(x;\theta_1\varepsilon)\dfrac{\partial\tilde{y}_1}{\partial x}=O(1)$；所以

$$L_\varepsilon[y_{(1)}]=O(\varepsilon),\ \text{当}\ |x|\leqslant\eta$$

证毕。

从关于 R_1 的边值问题(3.1)—(3.2)（其中 $L_\varepsilon[y_{(1)}]=O(\varepsilon)$），可以应用常微分方程的极值原理[8]得到余项 R_1 按最大值模的估计；或应用文献[9]中判别算子是一致正的定理4′，得到余项 R_1 按 L_2 空间范数的估计。

关于其它情形，可以类似地讨论形式近似式的渐近性。只是对于非共振的情形需注意到：当 $-\eta\leqslant x\leqslant-\dfrac{\eta}{2}$ 时，$\exp\left[-\dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int_{-a}^{x}f_0(s)ds\right]\leqslant\exp\left[-\dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int_{-a}^{-\eta}f_0(s)ds\right]=O(\varepsilon^N)$；当 $|x|\leqslant\dfrac{\eta}{2}$ 时，$y_0\equiv0$； 当 $\dfrac{\eta}{2}\leqslant x\leqslant\eta$ 时，$\exp\left[-\dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int_{b}^{x}f_0(s)ds\right]\leqslant\exp\left[-\dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int_{b}^{\eta}f_0(s)ds\right]=O(\varepsilon^N)$。

例：作为一个简单例子，考察边值问题：

$$\varepsilon y''+2\alpha xy'-\alpha\beta y=0,\ (0<\varepsilon\ll1,\ -1<x<1)$$

$$y(-1)=A,\ y(1)=B$$

的解的极限性态，其中假设 $\alpha<0$。在文献[10]中曾通过求出它的真解得出解的极限性态。

在此例中，$f_0(x)=2\alpha x$，$f_0'(x)=2\alpha<0$，$g_0(x)=-\alpha\beta$，$l=-\dfrac{g_0(0)}{f_0'(0)}=\dfrac{\beta}{2}$，$I\equiv\displaystyle\int_{-1}^{1}f_0(s)ds=0$。下面分两种情形讨论：

（i） 若l是非负的整数，即$\beta=2l$，$(l=0,1,2,\cdots)$。这时，存在共振现象[5]，从（1）的情形(iii)知（见(2.27)式）

$$y_0=C_0x^{\frac{\beta}{2}}+\Phi_0(x)\exp\left[\frac{\alpha(1-x^2)}{\varepsilon}\right]$$

其中

$$\Phi_0(x)=\begin{cases}\dfrac{D_0}{2\alpha}x^{-1-\frac{\beta}{2}}, & \text{当 } |x|\geqslant\eta\\ \varphi_0(x), & \text{当 } |x|\leqslant\eta\end{cases}$$

$\varphi_0(x)$是连接$\Phi_0(-\eta)$和$\Phi_0(\eta)$的无限次可微函数，和C_0、D_0确定于线性代数方程组：

$$A=C_0(-1)^{\frac{\beta}{2}}+\frac{D_0}{2\alpha}(-1)^{-1-\frac{\beta}{2}}$$

$$B=C_0+\frac{D_0}{2\alpha}$$

解得 $C_0=\dfrac{1}{2}\left[(-1)^{-\frac{\beta}{2}}A+B\right]$，$D_0=\alpha\left[(-1)^{-1-\frac{\beta}{2}}A+B\right]$，所以

$$y_0=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left[(-1)^{-\frac{\beta}{2}}A+B\right]x^{\frac{\beta}{2}}+\dfrac{1}{2}\left[(-1)^{-1-\frac{\beta}{2}}A+B\right]x^{-1-\frac{\beta}{2}}\exp\left[\dfrac{\alpha(1-x^2)}{\varepsilon}\right] & \text{当 } |x|\geqslant\eta\\ \dfrac{1}{2}\left[(-1)^{-\frac{\beta}{2}}A+B\right]x^{\frac{\beta}{2}}+\varphi_0(x)\exp\left[\dfrac{\alpha(1-x^2)}{\varepsilon}\right], & \text{当 } |x|\leqslant\eta\end{cases}$$

当$\varepsilon\to0$时，在$(-1,1)$内

$$y\to\frac{1}{2}\left[(-1)^{-\frac{\beta}{2}}A+B\right]x^{\frac{\beta}{2}}$$

与文献[10]中第8章第一节情形(iii)的结果是一致的。

（ii） 若l不是非负整数，即$\beta=2l$，$(l\neq0,1,2,\cdots)$。这时，不存在共振现象，从（2）知（见(2.29)式）

$$y_0=\begin{cases}\Psi_0^{(1)}(x)\exp\left[\dfrac{\alpha(1-x^2)}{\varepsilon}\right], & \text{当 } -1\leqslant x\leqslant0\\ \Psi_0^{(2)}(x)\exp\left[\dfrac{\alpha(1-x^2)}{\varepsilon}\right], & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant1\end{cases}$$

其中

$$\Psi_0^{(1)}(x)=\begin{cases}\dfrac{D_0^{(1)}}{2\alpha}x^{-1-\frac{\beta}{2}}, & \text{当 } -a\leqslant x\leqslant-\eta\\ \varphi_0(x), & \text{当 } -\eta\leqslant x\leqslant0\end{cases}$$

$$\Psi_0^{(2)}(x)=\begin{cases}\dfrac{D_0^{(2)}}{2\alpha}x^{-1-\frac{\beta}{2}}, & \text{当 } \eta\leqslant x\leqslant b\\ \varphi_0(x), & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant\eta\end{cases}$$

和$D_0^{(1)}=(-1)^{1+\frac{\beta}{2}}2\alpha A$, $D_0^{(2)}=2\alpha\beta$，即

$$y_0=\begin{cases} A(-x)^{-1-\frac{\beta}{2}}\exp\left[\dfrac{\alpha(1-x^2)}{\varepsilon}\right], & 当 -a\leqslant x\leqslant -\eta \\ \varphi_0(x)\exp\left[\dfrac{\alpha(1-x^2)}{\varepsilon}\right], & 当 |x|\leqslant\eta \\ Bx^{-1-\frac{\beta}{2}}\exp\left[\dfrac{\alpha(1-x^2)}{\varepsilon}\right], & 当 \eta\leqslant x\leqslant b \end{cases}$$

当$\varepsilon\to 0$时，在$(-1, 1)$内

$$y\to 0$$

与文献[10]中第8章第1节情形(ii)的结果是一致的。

注：若代替条件(2.3)而成立 $f_x'(x;0)=f_0'(x)>0$，则$\int_{-a}^{x}f_0(s)ds<0$，当$-a<x<0$；$\int_{b}^{x}f_0(s)ds<0$，当$0<x<b$；无论在端点$x=-a$或$x=b$都不允许出现边界层，这时上面的方法无效。

参 考 文 献

1. Ackerberg, R. C., and O'Malley, R. E. Jr, Boundary layer problem exhibiting resonance, Studies in *Appl. Math.*, 49, 3, (1970), 277—295.
2. Grasman, J., and Matkowsky, B. J., A variational approach to singularly perturbed boundary value problems for ordinary and partial differential equations with turning points, *SIAM J. Appl. Math.*, 32, 3,(1977), 588—597.
3. Nayfeh, A. H., *Perturbation Methods*, Wiley, New York, (1973).
4. Cook,L. P.,and Eckhaus, W., Resonance in a boundary value problem of singular perturbation type, Studies in *Appl. Math.*, 52., 2, (1973), 129—139.
5. Matkowsky, B. J., On boundary layer problem exhibiting resonance, *SIAM Rev.* 17, 1, (1975), 82—100.
6. Niijima, K., On the behavior of solutions of a singularly perturbed boundary value problems with a turning point, *SIAM J. Math. Anal.*, 9, 2(1978), 298—
7. Olver, F. W. J., Sufficient conditions for Ackerberg-O'Malley resonance, *SIAM J. Math. Anal.*, 9, 2, (1978), 328—355.
8. Protter M. H., and Weinberger, H. F., *Maximum Principles in Differential Equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, (1967).
9. Вишик, М. И., и Люстерник, Л. А., Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром, УМН 12, 5, (1957), 3—122.
10. O'Malley, R. E., Jr., *Introduction to Singular Perturbations*, Acad. Press, New York and London, (1974).

On the Boundary Value Problems for a Class of Ordinary Differential Equations with Turning Points

Jiang Fu-ru (*Fudan University, Shanghai*)

Abstract

In this paper we study the boundary value problems for a class of ordinary differential equations with turning points by the method of multiple scales. The paradox in[1] and the variational approach in [2] are avoided. The uniformly valid asymptotic approximations of solutions have been constructed. We also study the case which does not exhibit resonance.