

关于任意边界缺口或裂纹群问题 的一类解法 (I) 解析方法

欧阳甯 (上海复旦大学数学系)

(1979年12月20日收到)

摘 要

在工程断裂分析中任意边界缺陷如缺口或裂纹群是常见和重要的情况。本文推广穆斯赫利施维利方法作出了任意二维边界缺口或裂纹群问题的一类解法, 通过相继应用解析延拓、劳朗级数展开和共形映照, 我们最终获得支配问题的一组线性代数方程, 然后应用标准的线性代数方程组求解程序对问题就作出了解答。值得注意的是, 本文方法可用于作出缺陷表面具有任意的光滑载荷分布情况的解答。

如所知, 在工程实际的断裂分析中, 经常遇到边界缺陷的实际情况。此时缺陷发生于物体的边界上, 并在物体使用过程中发展为失稳扩展的裂纹, 导致物体破坏。这种缺陷可以是缺口或裂纹, 它们在边界上的分布常常具有任意不规则的性质。为了对这类边界缺陷物体进行正确的断裂分析, 就要求人们作出边界缺口或裂纹群问题的数学解答。

文献[1]曾作出了平面内部具有任意的缺口或裂纹群问题的解, 但它的方法不能处理远为复杂的边界缺陷问题。该文中, 将缺陷理想化为椭圆形状的空洞或裂纹。

本文应用复变函数论方法, 作出求解边界缺口或裂纹群问题的解析解法。首先利用自由表面边界条件和解析延拓技术, 将应力函数从两个减少为一个, 且余下的唯一未知应力函数在全平面除去若干个空洞或裂纹外是解析的。然后, 利用Laurent级数展开法将这一未知数表示为各缺陷处局部的负幂展开级数之和。这些级数的系数是待定的。利用共形映照方法各别地将空洞或裂纹外部一一映照到参数平面单位圆之外部, 我们得以在参数平面上表达各缺陷表面为自由的条件。利用这些条件, 最终能够决定Laurent级数的系数, 从而作出问题的解。

值得指出, 本文所给解析方法具有某种应用的广泛性。例如, 它可用于作出在缺陷表面具有某种光滑载荷分布的问题的解。

一、问题的陈述与简化

假设所考察的弹性体为带有一些半椭圆缺口或裂纹 C_j^- 的下半平面区域 D_j^- , 其在实轴上

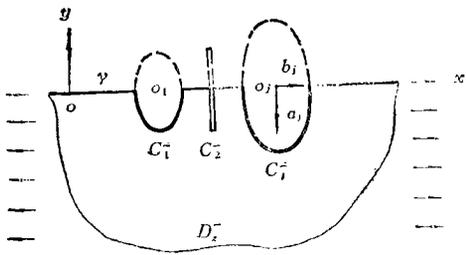


图1 边界缺口或裂纹群

的边界为 γ 。设在 $|x| = +\infty$ 处物体受有均匀拉应力 σ_{xx} ，而在物体的边界 $\gamma + \sum_{j=1}^N C_j^-$ 上不受力的作用。

根据Muskhelishvili[2]，区域 D_z^- 中重调和方程的解可用两个解析函数 $\varphi(z)$ ， $\psi(z)$ 来表示，且应力 σ_x ， σ_y ， τ_{xy} 和位移 u ， v 可用 $\varphi(z)$ ， $\psi(z)$ 表示如下：

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 2[\varphi(z) + \overline{\varphi'(z)}] = 4R_e[\varphi'(z)] \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 2[\overline{z}\varphi''(z) + \psi'(z)] \\ 2\mu(u + iv) &= K\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} \\ \mu &= \frac{E}{1+\nu} \\ K &= \begin{cases} 3-4\nu & (\text{平面应变}) \\ (3-\nu)/(1-\nu) & (\text{平面应力}) \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

其中 E 为弹性模数， ν 为泊松比。

设已知边界力 $f(s) = f_1(s) + if_2(s)$ ， s = 弧长，则 $\varphi(z)$ ， $\psi(z)$ 满足的边界条件为：

$$f(s) = (\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}) \Big|_{z(0)}^{z(s)} \quad (1.2)$$

若计算 $s = 0$ 到 s 的边界段上的合力矩 $M_0(s)$ ，则有

$$M_0(s) = R_e[\chi(z) - z\psi(z) - z\overline{z}\varphi'(z)] \Big|_{z(0)}^{z(s)} \quad (1.3)$$

其中 $\chi'(z) = \psi(z) \quad (1.4)$

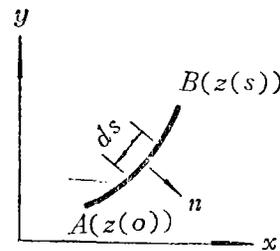


图2

为了进一步简化问题，我们需要下面的延拓定理。

定理 设 D_z^- 为下半平面的一个区域， D_z^- 的某边界段 γ 在实轴上。设函数 $g(z)$ ， $h(z)$ 解析于 D_z^- ，且在 γ 上满足条件： $g(z) = \overline{h(z)}$ 。则在 D_z^- 关于实轴的镜像区 D_z^+ 上定义：

$$g(z) = \overline{h(\bar{z})}, \quad z \in D_z^+ \quad (1.5)$$

时， $g(z)$ 在 $D_z^- + \gamma + D_z^+$ 上是解析的。

应用这一定理于我们的问题时，我们从实轴上边界段 γ 为自由的条件 $f(s) = 0$ 出发，定义：

$$\varphi(z) = -z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} \quad z \in D_z^+ \quad (1.6)$$

其中 $\overline{f(z)} = \overline{f(\bar{z})}$ 。由上述定理可知， $\varphi(z)$ 在 $D_z^- + \gamma + D_z^+$ 内解析，一旦在 $D_z^- + \gamma + D_z^+$ 内求得了 $\varphi(z)$ ，则另一应力函数 $\psi(z)$ 由下式可得：

$$\psi(z) = -\overline{\varphi(z)} - z\varphi'(z), \quad z \in D_z^- \quad (1.7)$$

问题也就获得了解决。在此，为了满足定理的条件，我们要对 $\varphi(z)$ 作某种要求，例如：

$$|\varphi'(z)| < A|z-x|^{-\alpha} \quad 0 \leq \alpha < 1 \quad (1.8)$$

对许多实际问题，这种要求总能满足。

这样，问题简化为求一个在区域 $D = D_z^- + \gamma + D_z^+$ 内的解析函数 $\varphi(z)$ ，它在边界

$C_j^-(j=1, 2, \dots, N)$ 上满足力的边界条件:

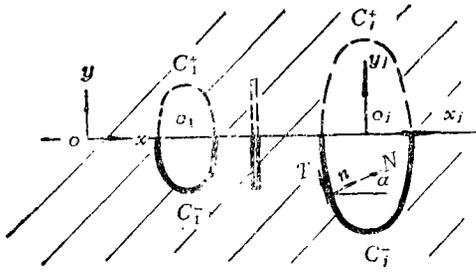


图 3

$$N - iT = \frac{1}{2} \{ (\sigma_y + \sigma_x - e^{2i\alpha} [(\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy})]), z \in C_j^- \quad (1.9)$$

其中 N 、 T 为法向力和切向力, α 的意义见图 3。

对于自由边界条件 $N - iT = 0$, 以(1.1)代入(1.9)得边界条件:

$$\begin{aligned} \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} - e^{2i\alpha} [(\bar{z} - z)\varphi''(z) \\ - \varphi'(z) - \overline{\varphi'(z)}] = 0, z \in C_j^- \end{aligned} \quad (1.10)$$

此外, $\varphi(z)$ 还应满足无穷远处的边界条件:

$$\sigma_x |_{|x| \rightarrow \infty} = \sigma_{x\infty} \quad (1.11)$$

二、问题的解

1. 解的基本形式

除整体坐标系 $z = x + iy$ 之外, 我们引进以 O_j 为原点的平行于 x, y 轴的局部坐标系 $z_j = x_j + iy_j$, 这里已将缺陷从左到右进行编号。若以 γ_{jk} 记线段 $\overline{O_j O_k}$ 之长, 以 γ_j 记 $\overline{O O_j}$ 之长, 易见:

$$\left. \begin{aligned} z_k &= z_j - \gamma_{jk}, j < k \\ &= z_j + \gamma_{jk}, j > k \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

$$z = z_j + \gamma_j \quad (2.2)$$

在此为方便计, 已将座标 $z = x + iy$ 的原点取在诸 $O_j (j=1, 2, \dots, N)$ 的左边。又为了普遍起见, 认为以上的座标 z, z_j 等均已被某一特征长度 d 所除过, 因而是无量纲的。对于 $\varphi(z)$, 我们也同样地假设已进行了无量纲化, 即设 $\varphi(z)$ 已被 $\sigma_{x\infty} d$ 所除过。

这样, 我们设 $\varphi(z)$ 具有局部 Laurent 负幂展开级数之和的形式:

$$\varphi(z) = \varphi_0(z) + \sum_{k=1}^N \varphi_k(z_k) \quad (2.3)$$

其中

$$\varphi_k(z_k) = \sum_{n=0}^{\infty} F_{n,k} z_k^{-(n+1)} \quad (2.4)$$

而函数 $\varphi_0(z)$ 由无穷远处的边界条件(1.11)决定。

事实上, 设 $\varphi(0) = I_m \varphi'(0) = 0$, 则由(1.11)及(1.1)得出

$$\varphi_0(z) = -\frac{\sigma_{x\infty}}{4} z, \quad \psi_0(z) = -\frac{\sigma_{x\infty}}{2} z \quad (2.5)$$

在(2.9)中以 1 代替 $\sigma_{x\infty}$, 即得无量纲化的式子。

2. 在物理及参数平面上的展开

写下解的基本形式, 并运用无穷远处边界条件决定了 $\varphi_0(z)$ 之后, 剩下的问题就是根据缺陷表面为自由的条件决定展开式的诸系数 $F_{n,k} (n=0, 1, 2, \dots; k=1, 2, \dots, N)$.

为此, 我们在各缺陷 $C_j^- + C_j^+ (j=1, 2, \dots, N)$ 周围进行局部的 Laurent 展开, 可得 $\varphi(z)$ 的下述表式:

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (F_{n,j} z_j^{-(n+1)} + M_{n,j} z_j^{n+1}) \quad (2.6)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} F_{n,j} &= F_{n,j}^{(1)} + i F_{n,j}^{(2)} \\ M_{n,j} &= M_{n,j}^{(1)} + i M_{n,j}^{(2)} \\ M_{n,j}^{(1)} &= (M_{0,0}^{(1)}) \Delta_n^0 + \sum_{\rho=0}^{\infty} \sum_{k \neq j}^N (e_{n,j}^{\rho,k} F_{\rho,k}^{(1)} - f_{n,j}^{\rho,k} F_{\rho,k}^{(2)}) \\ M_{n,j}^{(2)} &= \sum_{\rho=0}^{\infty} \sum_{k \neq j}^N (f_{n,j}^{\rho,k} F_{\rho,k}^{(1)} + e_{n,j}^{\rho,k} F_{\rho,k}^{(2)}) \\ M_{0,0}^{(1)} &= \frac{1}{4} \\ \Delta_n^0 &= \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \\ \left\{ \begin{array}{l} e_{n,j}^{\rho,k} \\ f_{n,j}^{\rho,k} \end{array} \right\} &= \frac{(-1)^{\rho+1}}{(\gamma_{jk})^{n+\rho+2}} \binom{n+\rho+1}{\rho} \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} \{ (n+1)\beta_{jk} + (\rho+1)\beta_{jk} \} \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

其中 β_{jk} 为 $\overline{O_j O_k}$ 与 OX 轴的夹角。 $\beta_{jk}=0$, 当 $j < k$ 时; $\beta_{jk}=\pi$, 当 $j > k$ 时。

为了表示 C_j^- 上 $\varphi(z)$ 所满足的边界条件 (1.10), 我们通过共形映照将 $C_j^- + C_j^+$ 的外部照到单位圆 $|\zeta|=1$ 的外部, 映照函数为:

$$\left. \begin{aligned} z_j &= \omega(\zeta) = \frac{e_j}{2} \left(R_j \zeta - \frac{1}{R_j \zeta} \right) \\ e_j &= \sqrt{a_j^2 - b_j^2} / d, \quad \varepsilon_j = b_j / a_j \\ R_j &= \left(\frac{1 + \varepsilon_j}{1 - \varepsilon_j} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

对于裂纹, $\varepsilon_j=0$, $R_j=1$.

设 $\varphi'(z)$ 在参数平面 $|\zeta|=1$ 附近的展开为

$$\Phi(\zeta) = \varphi'(z) = \sum_{m=0}^{\infty} (\alpha_{m,j} \zeta^m + \beta_{m,j} \zeta^{-m}) \quad (2.9)$$

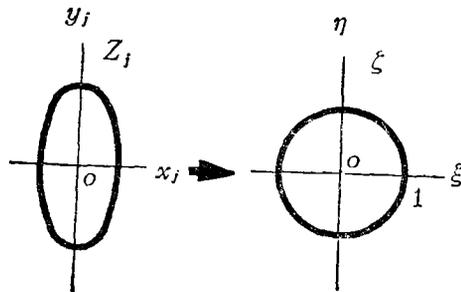


图 4

利用关系

$$\begin{aligned} R_j i \zeta &= \frac{i z_j}{e_j} \left\{ 1 + \left[1 - \left(\frac{e_j}{i z_j} \right)^2 \right]^{1/2} \right\} \\ (R_j i \zeta)^{-1} &= \frac{i z_j}{e_j} \left\{ 1 - \left[1 - \left(\frac{e_j}{i z_j} \right)^2 \right]^{1/2} \right\} \end{aligned} \quad (2.10)$$

以及

$$\begin{aligned} (i z_j)^{2p} &= \left(\frac{e_j}{2} \right)^{2p} \left[\binom{2p}{p} + \sum_{m=1}^p \binom{2p}{p-m} \right] \{ (R_j i \zeta)^{2m} + (R_j i \zeta)^{-2m} \} \\ (i z_j)^{2p+1} &= \left(\frac{e_j}{2} \right)^{2p+1} \sum_{m=0}^p \binom{2p+1}{p-m} \{ (R_j i \zeta)^{2m+1} + (R_j i \zeta)^{-(2m+1)} \} \end{aligned} \quad (2.11)$$

我们可得

$$\begin{aligned} \alpha_{2m+1, j} &= (-1)^{m-p} R_j^{2m+1} \sum_{\rho=m}^{\infty} (2\rho+2) \left(\frac{e_j}{2} \right)^{2\rho+1} \binom{2\rho+1}{\rho-m} M_{2\rho+1, j} \\ \alpha_{2m+2, j} &= (-1)^{m-p+1} R_j^{2m+2} \sum_{\rho=m+1}^{\infty} (2\rho+1) \left(\frac{e_j}{2} \right)^{2\rho} \binom{2\rho}{\rho-m-1} M_{2\rho, j} \\ &\quad (m=0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (2.12)$$

且

$$\begin{aligned} \varphi'(z) &= \Phi(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) M_{n, j} z_j^n + \sum_{m=0}^{\infty} \beta_{m, j} \zeta^{-m} \\ &\quad - \sum_{\rho=0}^{\infty} \left[(2\rho+1) \left(\frac{e_j}{2i} \right)^{2\rho} M_{2\rho, j} \sum_{m=0}^{\rho-1} \binom{2\rho}{\rho-m-1} (R_j i \zeta)^{-(2m+2)} \right. \\ &\quad \left. + (2\rho+2) \left(\frac{e_j}{2i} \right)^{2\rho+1} M_{2\rho+1, j} \sum_{m=0}^{\rho} \binom{2\rho+1}{\rho-m} (R_j i \zeta)^{-(2m+1)} \right] \end{aligned} \quad (2.13)$$

但是, 我们有下列关系 [3]:

$$\left. \begin{aligned} (R_j i \zeta)^{-2m} &= \sum_{n=m}^{\infty} A_{n-m, 2m} \left(\frac{e_j}{i z_j} \right)^{2n} \\ (R_j i \zeta)^{-(2m+1)} &= \sum_{n=m}^{\infty} A_{n-m, 2m+1} \left(\frac{e_j}{i z_j} \right)^{2n+1} \\ A_{n-m, 2m} &= \frac{m}{2^{2n} n} \binom{2n}{n-m} \\ A_{n-m, 2m+1} &= \frac{2m+1}{2^{2n+1} (2n+1)} \binom{2n+1}{n-m} \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

以(2.14)代入(2.13), 并比较 z_j 的负幂项系数, 得:

$$F_{2n,j} = (2n+1)^{-1} \left\{ \sum_{p=0}^{\infty} (2p+1) 2^{-2p} \left(\frac{e_j}{i} \right)^{2p+2n+2} M_{2p,j} \sum_{m=0}^{p-1,n} \binom{2p}{p-m-1} A_{n-m-1,2m+2} \right. \\ \left. + \sum_{m=0}^{n+1} R_{2j}^{2m} (-1)^{m+n+1} e_j^{2n+2} A_{n-m+1,2m} \beta_{2m,j} \right\} \quad (2.15a)$$

$$F_{2n+1,j} = (2n+2)^{-1} \left\{ \sum_{p=0}^{\infty} (2p+2) 2^{-(2p+1)} \left(\frac{e_j}{i} \right)^{2p+2n+4} M_{2p+1,j} \sum_{m=0}^{p,n+1} \binom{2p+1}{p-m} A_{n-m+1,2m+1} \right. \\ \left. + \sum_{m=0}^{n+1} R_j^{2m+1} (-1)^{m+n-1} e_j^{2n+3} A_{n-m+1,2m+1} \beta_{2m+1,j} \right\} \quad (2.15b)$$

$$(n=0,1,2,\dots)$$

这样, 通过在物理平面和参数平面上的局部展开, 引进了 $4N$ 组复参数列 $F_{n,j}$, $M_{n,j}$, $\alpha_{n,j}$, $\beta_{n,j}$ ($n=0,1,2,\dots; j=1,2,\dots,N$), 并已有关系(2.7)、(2.12)和(2.15)联系它们。为了确定这些参数, 还要补充缺陷表面的边界条件。

3. 缺陷表面自由的条件

在物理平面上, 这个条件已写如(1.10)式, 即

$$\varphi'(z_j) + \overline{\varphi'(z_j)} - e^{2i\alpha} \{ \overline{(z_j - z_j)} \varphi''(z_j) - \varphi'(z_j) - \overline{\varphi'_j(z_j)} \} = 0 \quad z_j \in C_j^- \quad (2.16)$$

现在将此条件转到参数平面的缺陷边界 $\xi = \sigma = e^{i\theta}$ ($\pi \leq \theta \leq 2\pi$)上, 为此, 注意到关系

$$e^{2i\alpha} = \frac{\sigma \omega'(\sigma)}{\sigma \overline{\omega'(\sigma)}} = \frac{R_j \sigma^2 + R_j^{-1}}{R_j + R_j^{-1} \sigma^2} \quad (2.17)$$

又 $\varphi'(z_j) = \Phi(\sigma)$, $\varphi''(z_j) = \Phi'(\sigma)/\omega'(\sigma)$, (2.16)变为

$$H(\sigma) \equiv (R_j + R_j^{-1} \sigma^2) (\Phi(\sigma) + \overline{\Phi(\sigma)}) - \{ (R_j + R_j^{-1}) (\sigma - \sigma^3) \Phi'(\sigma) \\ + (R_j \sigma^2 + R_j^{-1}) (\Phi(\sigma) + \overline{\Phi(\sigma)}) \} = 0 \\ \sigma = e^{i\theta}, \quad \pi \leq \theta \leq 2\pi \quad (2.18)$$

由于

$$\Phi(\sigma) = \varphi'(z_j) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_{n,j} \sigma^n + \beta_{n,j} \sigma^{-n}) \quad (2.19)$$

并引进函数

$$E(\sigma) = \begin{cases} \Phi(\sigma) - \sum_{m=0}^{\infty} (\alpha_{m,j} \sigma^m + \beta_{m,j} \sigma^{-m}), & 0 \leq \theta \leq \pi \\ \Phi(\sigma) - \sum_{m=0}^{\infty} (\alpha_{m,j} \sigma^m + \beta_{m,j} \sigma^{-m}) + \lambda H(\sigma), & \pi \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \quad (2.20)$$

(λ : 任意常数)

可以看出, $E(\sigma) \equiv 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, 根据Fourier展开定理[4], 这表示

$$\int_0^{2\pi} \sigma^{-k} \Phi(\sigma) d\theta = 2\pi \alpha_{k,j} \quad k=1,2,\dots,$$

$$= 2\pi \beta_{k,j} \quad k=-1,-2,\dots$$

$$= 2\pi(\alpha_{0,j} + \beta_{0,j}) \quad k=0 \quad (2.21)$$

$$G_k = \int_0^{2\pi} \sigma^{-k} H(\sigma) d\theta = 0, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (2.22)$$

其中(2.21)仅说明 α, β 为 $\Phi(\sigma)$ 的 Fourier 系数。(2.22)即为所需的缺陷表面自由的条件。

以 $\Phi(\sigma)$ 的展开式(2.9)代入(2.22), 经过整理得:

$$G_{2p-1} = \sum_{m=0}^{\infty} (W_{2m,j}^p \alpha_{2m,j} + x_{2m,j}^p \bar{\alpha}_{2m,j} + Y_{2m,j}^p \beta_{2m,j} + z_{2m,j}^p \bar{\beta}_{2m,j})$$

$$W_{2m,j}^p = 2i \left[\frac{(2m-1)R_j + (2m+1)R_j^{-1}}{2m-2p+1} + \frac{(1-2k)R_j - (2k+1)R_j^{-1}}{2m-2p+3} \right]$$

$$x_{2m,j}^p = 2i \left[\frac{R_j}{2m+2p-1} + \frac{R_j^{-1}}{2m-2p+1} + \frac{R_j^{-1}}{2m+2p-3} + \frac{R_j}{2m-2p+3} \right]$$

$$Y_{2m,j}^p = 2i \left[\frac{(2m+1)R_j + (2m-1)R_j^{-1}}{2m+2p-1} - \frac{(1+2m)R_j - (1-2m)R_j^{-1}}{2m+2p-3} \right]$$

$$z_{2m,j}^p = -2i \left[\frac{R_j}{2m-2p+1} + \frac{R_j^{-1}}{2m+2p-1} + \frac{R_j^{-1}}{2m-2p+3} + \frac{R_j}{2m+2p-3} \right] \quad (2.23)$$

$$G_{2p} = \sum_{m=1}^{\infty} (W_{2m-1,j}^p \alpha_{2m-1,j} + x_{2m-1,j}^p \bar{\alpha}_{2m-1,j} + Y_{2m-1,j}^p \beta_{2m-1,j} + z_{2m-1,j}^p \bar{\beta}_{2m-1,j}) + R_{2p}$$

$$W_{2m-1,j}^p = -2i \left[\frac{R_j}{2m-2p-1} + \frac{R_j^{-1}}{2m-2p+1} - \frac{(2m-1)(R_j + R_j^{-1})}{2m-2p+1} \right. \\ \left. - \frac{R_j}{2m-2p+1} - \frac{R_j^{-1}}{2m-2p-1} \right]$$

$$x_{2m-1,j}^p = 2i \left[\frac{R_j}{2m+2p-1} + \frac{R_j^{-1}}{2m+2p-3} + \frac{R_j}{2m-2p+1} + \frac{R_j^{-1}}{2m-2p-1} \right]$$

$$Y_{2m-1,j}^p = 2i \left[\frac{R_j}{2m+2p-1} + \frac{R_j}{2m+2p-3} + \frac{(2m-1)(R_j + R_j^{-1})}{2m+2p-1} \right. \\ \left. - \frac{(2m-1)(R_j + R_j^{-1})}{2m+2p-3} - \frac{R_j}{2m+2p-3} - \frac{R_j^{-1}}{2m+2p-1} \right]$$

$$z_{2m-1,j}^p = -2i \left[\frac{R_j}{2m-2p-1} + \frac{R_j^{-1}}{2m-2p+1} + \frac{R_j}{2m+2p-3} + \frac{R_j^{-1}}{2m+2p-1} \right]$$

$$R_{2p} = \begin{cases} \gamma_{2p}, & p > 1 \\ \gamma_{2p} + \bar{\alpha}_{0,j} R_j^{-1} \pi, & p = 1 \\ \bar{\alpha}_{21p1,j} \pi R_j - \bar{\alpha}_{21p1+2,j} \pi R_j + \beta_{21p1,j} (\pi R_j - \pi R_j^{-1}) \\ \quad + 2|p| \pi (R_j + R_j^{-1}) + \beta_{21p1+2,j} (\pi (R_j^{-1} - R_j)) \\ \quad - \pi (2|p| + 2) (R_j + R_j^{-1}) - \bar{\beta}_{21p1+2,j} \pi R_j - \bar{\beta}_{21p1,j} \pi R_j^{-1}, & p < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{2p} = & \alpha_{2p-2,j} (\pi (R_j^{-1} - R_j)) + (2p-2) \pi (R_j + R_j^{-1}) + \alpha_{2p,j} (\pi (R_j - R_j^{-1})) \\
& - 2p \pi (R_j + R_j^{-1}) + \bar{\alpha}_{2p-2,j} \pi R_j - \bar{\alpha}_{2p,j} \pi R_j^{-1} \\
& + \bar{\beta}_{2p,j} \pi R_j + \bar{\beta}_{2p-2,j} \pi R_j^{-1}
\end{aligned} \tag{2.24}$$

这样, 由

$$G_k = 0, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{2.25}$$

我们得到了 α 、 β 间的一组线性关系。

至此, 问题的求解化为根据条件 (2.7)、(2.12)、(2.15) 和 (2.24) 解出诸系数 $F_{n,j}$, $M_{n,j}$, $\alpha_{n,j}$, $\beta_{n,j}$ 。这是一个解线性代数方程组的问题。在具体计算时, 可取展开式的有限项, 然后在计算机上应用标准的解线代数方程组的程序得出解答。

参 考 文 献

1. Isida, M., Bulletin JSME, 13, 59 (1970).
2. Muskhelishvili, M. I., Some basic problems of mathematical theory of elasticity, (1953).
3. Hayashi, T., Trans. JSME, 25, 159(1959).
4. Zygmund, A., Trigonometrical series, (1952).

On a Class of Methods for Solving Problems of Random Boundary Notches and/or Cracks

Ouyang Chang (*Department of Mathematics, Fudan University*)

Abstract

In engineering fracture analysis, random boundary imperfections as notches or cracks are common and important. In this paper, we have worked out a class of methods for solving two-dimensional problems of random boundary notches and/or cracks by an extension of Muskhelishvili's method. Through successive applications of analytic continuation, Laurent series expansion and conformal mapping, we finally arrived at a set of linear algebraic equations governing the problem. Then standard computing program of linear algebraic equations may be used to complete the solution. It is noticed that the present method may give solutions for the cases in which there are certain smooth load distributions on the notch surfaces.