

# 16个和20个自由度的四面体有限元的场函数表达式的显式

钱伟长 (清华大学基础课教学研究部)

(本文1979年10月收到)

## 摘 要

本文写出了16个和20个自由度的四面体有限元的场函数表达式的显式, 它们是用体积座标  $L_1, L_2, L_3, L_4$  来表达的。

## 一、引 言

在  $C^0$  连续性的四面体有限元中, 我们可以用4顶角的场函数  $\phi_i$  和它的导数值  $\phi_{xi}, \phi_{yi}, \phi_{zi}$  等16个参数表示的三次多项式场函数 (图1), 但这是不完备的。为了使三次多项式完备, 也有人建议增加四个界面重心结点上的场函数值作为参数。于是, 连同前面的16个参数, 共有20个参数。这样就能得到完备的三次多项式场函数 (图2), 这些场函数可以用  $x, y, z$  多项式表示<sup>[1], [2]</sup>, 也可以用体积座标的多项式<sup>[3]</sup>来表示。

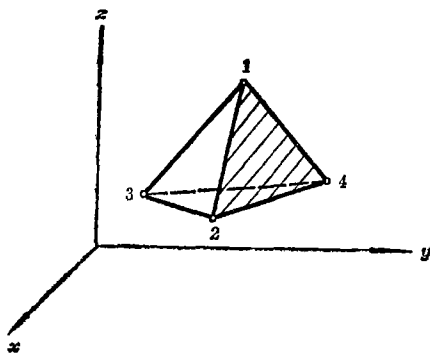


图1 在4角的结点上,  $\phi, \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z}$

已给共16个自由度

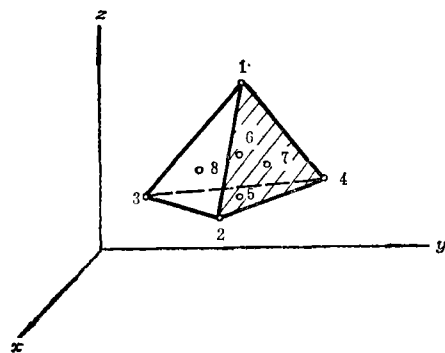


图2 在4角的结点上,  $\phi, \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z}$

已给在界面重心上,  $\phi$  已给, 共有20个自由度

他们<sup>[1], [2], [3]</sup>指出, 20个自由度的场函数是一个完备的三次  $x, y, z$  多项式, 如(1.1)式所示。

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) = & \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z + \alpha_5 xy + \alpha_6 yz + \alpha_7 zx + \alpha_8 x^2 + \alpha_9 y^2 \\ & + \alpha_{10} z^2 + \alpha_{11} xy^2 + \alpha_{12} yz^2 + \alpha_{13} zx^2 + \alpha_{14} x^2 y + \alpha_{15} y^2 z \end{aligned}$$

$$+ \alpha_{16} z^2 x + \alpha_{17} x^3 + \alpha_{18} y^3 + \alpha_{19} z^3 + \alpha_{20} x y z \quad (1.1)$$

费尔得<sup>[3]</sup>指出, 如果用体积坐标的三次式, 可以把16个自由度的场函数写成

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) = & \alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \alpha_3 L_3 + \alpha_4 L_4 + \alpha_5 L_1 L_2 + \alpha_6 L_1 L_3 + \alpha_7 L_1 L_4 \\ & + \alpha_8 L_2 L_3 + \alpha_9 L_2 L_4 + \alpha_{10} L_3 L_4 + \alpha_{11} (L_1^2 L_2 - L_1 L_2^2) \\ & + \alpha_{12} (L_1^2 L_3 - L_1 L_3^2) + \alpha_{13} (L_1^2 L_4 - L_1 L_4^2) + \alpha_{14} (L_2^2 L_3 - L_2 L_3^2) \\ & + \alpha_{15} (L_2^2 L_4 - L_2 L_4^2) + \alpha_{16} (L_3^2 L_4 - L_3 L_4^2) \end{aligned} \quad (1.2)$$

其中

$$L_i = \frac{1}{6V} (a_i + b_i x + c_i y + d_i z) \quad (1.3)$$

$$6V = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad (1.4)$$

$$\left. \begin{aligned} a_i = -(-1)^i \begin{vmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_k & y_k & z_k \\ x_l & y_l & z_l \end{vmatrix} & \quad b_i = (-1)^i \begin{vmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_k & z_k \\ 1 & y_l & z_l \end{vmatrix} \\ c_i = -(-1)^i \begin{vmatrix} 1 & x_i & z_i \\ 1 & x_k & z_k \\ 1 & x_l & z_l \end{vmatrix} & \quad d_i = (-1)^i \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_k & y_k \\ 1 & x_l & y_l \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

这里  $i, j, k, l$  为 1 2 3 4 1 2 3 4 的循环标号。利用了这些体积坐标后, 有关导数为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \phi}{\partial L_i} \frac{\partial L_i}{\partial x} = \frac{1}{6V} \sum_{i=1}^4 b_i \frac{\partial \phi}{\partial L_i} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \phi}{\partial L_i} \frac{\partial L_i}{\partial y} = \frac{1}{6V} \sum_{i=1}^4 c_i \frac{\partial \phi}{\partial L_i} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} &= \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \phi}{\partial L_i} \frac{\partial L_i}{\partial z} = \frac{1}{6V} \sum_{i=1}^4 d_i \frac{\partial \phi}{\partial L_i} \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

但是, 我们发现, 不论16个自由度的四面体元素, 或20个自由度的四面体元素, 都可以直接用体积坐标写出插值函数  $N_i, N_{x_i}, N_{y_i}, N_{z_i}$  等的显式, 而不必从(1.2)式中求解  $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_{16}$  那样来写出  $[N]$ , 这样就省去了求大型逆矩阵的一步手续。

## 二、16个自由度的四面体有限元场函数

对于16个自由度的场函数(图1), 有

$$\phi(x, y, z) = [N] \{\phi\} = \sum_{i=1}^4 \{N_i \phi_i + N_{x_i} \phi_{x_i} + N_{y_i} \phi_{y_i} + N_{z_i} \phi_{z_i}\} \quad (2.1)$$

其中

$$\phi_i = \phi(x_i, y_i, z_i)$$

$$\phi_{x_i} = \frac{\partial \phi}{\partial x}(x_i, y_i, z_i), \quad \phi_{y_i} = \frac{\partial \phi}{\partial y}(x_i, y_i, z_i), \quad \phi_{z_i} = \frac{\partial \phi}{\partial z}(x_i, y_i, z_i) \quad (2.2)$$

$N_i, N_{x_i}, N_{y_i}, N_{z_i}$ 为

$$N_i = L_i^2(3 - 2L_i) \quad (2.3a)$$

$$N_{x_i} = 6V \begin{vmatrix} L_j & L_k & L_l \\ c_j & c_k & c_l \\ d_j & d_k & d_l \end{vmatrix} L_i^2 = 6V L_i^2 (B_{ki}L_j + B_{lj}L_k + B_{jk}L_l) \frac{1}{\Delta_i} \quad (2.3b)$$

$$N_{y_i} = 6V \begin{vmatrix} b_j & b_k & b_l \\ L_j & L_k & L_l \\ d_j & d_k & d_l \end{vmatrix} L_i^2 = 6V L_i^2 (C_{ki}L_j + C_{lj}L_k + C_{jk}L_l) \frac{1}{\Delta_i} \quad (2.3c)$$

$$N_{z_i} = 6V \begin{vmatrix} b_j & b_k & b_l \\ c_j & c_k & c_l \\ L_j & L_k & L_l \end{vmatrix} L_i^2 = 6V L_i^2 (D_{ki}L_j + D_{lj}L_k + D_{jk}L_l) \frac{1}{\Delta_i} \quad (2.3d)$$

其中 $ijkl$ 为循环标号(次序按1 2 3 4 1 2 3 4)

$$B_{ij} = c_i d_j - c_j d_i, \quad C_{ij} = d_i b_j - d_j b_i, \quad D_{ij} = b_i c_j - b_j c_i \quad (2.4)$$

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} b_j & b_k & b_l \\ c_j & c_k & c_l \\ d_j & d_k & d_l \end{vmatrix} \quad (2.5)$$

根据(1.3)式, (2.3b), (2.3c), (2.3d)还可以进一步简化

$$\left. \begin{aligned} N_i &= L_i^2(3 - 2L_i) \\ N_{x_i} &= 6V L_i^2 (B_{ki}a_j + B_{lj}a_k + B_{jk}a_l + \Delta_i x) \frac{1}{\Delta_i} \\ N_{y_i} &= 6V L_i^2 (C_{ki}a_j + C_{lj}a_k + C_{jk}a_l + \Delta_i y) \frac{1}{\Delta_i} \\ N_{z_i} &= 6V L_i^2 (D_{ki}a_j + D_{lj}a_k + D_{jk}a_l + \Delta_i z) \frac{1}{\Delta_i} \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

我们很易从(2.3)式校核 $N_{x_i}, N_{y_i}, N_{z_i}, N_i$ 是满足插值函数的要求的。从这些插值函数中, 也能计算弹性力学三维问题的刚度矩阵。

## 三、20个自由度的四面体有限元场函数

对于20个自由度的场函数而言, (图2) 有

$$\phi(x, y, z) = [N] \{\phi\} = \sum_{i=1}^4 \{N_i \phi_i + N_{4+i} \phi_{4+i} + N_{x_i} \phi_{x_i} + N_{y_i} \phi_{y_i} + N_{z_i} \phi_{z_i}\} \quad (3.1)$$

其中

$$N_i = L_i^2(3 - 2L_i) - 7L_i(L_j L_k + L_j L_l + L_k L_l) \quad i=1, 2, 3, 4 \quad (3.2a)$$

$$N_{4+i} = 27L_j L_l L_k \quad i=1, 2, 3, 4 \quad (3.2b)$$

$$N_{x_i} = 6V \begin{vmatrix} L_j & L_k & L_l \\ c_j & c_k & c_l \\ d_j & d_k & d_l \\ b_j & b_k & b_l \\ c_j & c_k & c_l \\ d_j & d_k & d_l \end{vmatrix} (L_i^2 - L_j L_k - L_j L_l - L_k L_l) \quad (3.2c)$$

$$N_{y_i} = 6V \begin{vmatrix} b_j & b_k & b_l \\ L_j & L_k & L_l \\ d_j & d_k & d_l \\ b_j & b_k & b_l \\ c_j & c_k & c_l \\ d_j & d_k & d_l \end{vmatrix} (L_i^2 - L_j L_k - L_j L_l - L_k L_l) \quad (3.2d)$$

$$N_{z_i} = 6V \begin{vmatrix} b_j & b_k & b_l \\ c_j & c_k & c_l \\ L_j & L_k & L_l \\ b_j & b_k & b_l \\ c_j & c_k & c_l \\ d_j & d_k & d_l \end{vmatrix} (L_i^2 - L_j L_k - L_j L_l - L_k L_l) \quad (3.2e)$$

利用(2.4)、(2.5)式, 上式也可以写成

$$N_i = L_i^2(3 - 2L_i) - 7L_i(L_j L_k + L_j L_l + L_k L_l) \quad (3.3a)$$

$$N_{i+4} = 27L_j L_l L_k \quad (3.3b)$$

$$N_{x_i} = 6V(L_i^2 - L_j L_k - L_j L_l - L_k L_l) (B_{ki} L_j + B_{lj} L_k + B_{jk} L_l) \frac{1}{\Delta_i} \quad (3.3c)$$

$$N_{y_i} = 6V(L_i^2 - L_j L_k - L_j L_l - L_k L_l) (C_{ki} L_j + C_{lj} L_k + C_{jk} L_l) \frac{1}{\Delta_i} \quad (3.3d)$$

$$N_{z_i} = 6V(L_i^2 - L_j L_k - L_j L_l - L_k L_l) (D_{ki} L_j + D_{lj} L_k + D_{jk} L_l) \frac{1}{\Delta_i} \quad (3.3e)$$

## 四、场函数的连续性问题

这里可以看到, 不论是16个自由度的形状函数(2.3)式, 还是20个自由度的形状函数(3.2)式, 都是 $L_1, L_2, L_3, L_4$ 所组成的三次式, 也是 $x, y, z$ 的三次式。在四面体的任意界面上, 形状函数一定也是界面座标(设为 $p, q$ )的三次式, 它们共有10个待定常数。对于16个自由度的四面体有限元而言, 在每一界面一共只有9个已给的结点条件, 即角点上的已给函数值(共3个), 和角点上的场函数对界面座标的导数 $\frac{\partial\phi}{\partial p}, \frac{\partial\phi}{\partial q}$ (共6个), 它们是从角

点上的空间座标导数 $\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}$ 求得, 这样一共只有9个已给条件, 不足以决定10个

待定常数。因此, 在界面各角点上保证 $\phi, \frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}$ 的值和邻元素的相关值相等,

并不能保证 $\phi$ 在界面上各点都连续。但是, 我们可以证明在四面体棱线上的场函数, 是保证连续的。这是因为场函数在棱线上必然是棱线座标(设为 $t$ )的三次多项式 $\phi = \alpha_1 + \alpha_2 t + \alpha_3 t^2 + \alpha_4 t^3$ , 共有四个待定常数 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ , 它们可以从已给的两端角点的 $\phi, \frac{\partial\phi}{\partial t}$ 来决定,

$\frac{\partial\phi}{\partial t}$ 是可以从该角点上的 $\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}$ 计算求得的。所以16个自由度的形状函数, 只能

在相邻各元素间, 保证场函数在棱线上连续, 但不能保证在界面上各点都连续。场函数的导数, 除了在角点上连续外, 即使在棱线上也是不连续的。

对于20个自由度的四面体有限元而言, 场函数在界面上也是界面座标( $p, q$ )的三次式, 共有10个待定常数, 它是由该界面的三个角点上已给的场函数值, 和界面重心的已给的3个场函数值, 和已给的6个场函数对界面座标 $p, q$ 的导数, 以及界面重心的已给场函数等唯一地决定的。所以场函数在界面上是和邻元素的场函数是连续的, 所以, 在各棱线上, 相关邻元素的场函数也是连续的。所以, 20个自由度的有限元场函数是到处连续的。当然, 它还不不足以保证界面上的法向导数连续。这是有 $C^0$ 连续性的有限元, 也是协调的。

### 参 考 文 献

1. Argyris, J. H., Fried, I. and Scharpf, D. W.. The TET20 and TEA8 elements for the matrix displacement method. *Aeronautical Journal* **72**, 691, 618—623(1968)
2. Rashid, Y. R., Smith, P. D. and Prince, N.. On further application of the finite element method to three dimensional elastic analysis. Proceeding IUTAM Symposium of High Speed Computing of Elastic Structures. University of Liege, Belgium, August (1970)
3. Fjeld, S. A.. "Three-dimensional theory of elasticity". Finite Element Method in Stress Analysis, Holand, I. and Bell, K. (edited) Tapir Press, Trondheim, Norway, 333—363 (1969)

## The Explicit Forms of Field Functions in Tetrahedron Element with 16 and 20 Degrees of Freedom

Chien Wei-zang (*Tsinghua University, Peking*)

### Abstract

In this paper, the explicit forms of field functions in tetrahedron elements with 16 and 20 degrees of freedom are given in terms of volume coordinates  $L_1, L_2, L_3, L_4$  of tetrahedron.