

# 有限单元——力法解弹性理论平面问题

蒋 炜(上海工业建筑设计院)

(徐次达推荐 1980年3月18日收到)

## 摘 要

本文使用任意阶扇形单元, 提出了解弹性理论平面问题的一种力法方案. 其特点是节点少, 计算方便, 且可完全适应区域的形状特点.

## 一、前 言

目前用有限单元法分析平面问题时, 大多使用位移法. 众所周知, 位移法直接得到的是节点位移, 为求应力, 尚需求导, 所以, 由此确定的应力的计算精度不高, 而相应的应力场还是间断的. 但工程实践需要的恰是应力, 并不太在乎位移, 因此用力法求解就有其优越性了.

本文以任意阶多项式表示的, 可积的应力场为基础, 提出了一种力法计算平面问题的方案. 这种力法在计算上和位移法一样方便, 但却可得到一个在整个区域范围内连续, 并分片光滑的应力场. 本文方法的另一特点是使用扇形单元, 节点少且可完全适应区域的形状特点. 通过实例计算表明, 这里提出的, 确是一个很有实用意义的力法方案.

## 二、可 积 的 应 力 场

本文将选择如下的一个可积的应力场

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{E} \sigma_x = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k j(j+1) a_{\frac{(k+1)(k+2)}{2} + j + 1} x^{k-j} y^{j-1} \\ \frac{1}{E} \sigma_y = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k (k-j+1)(k-j+2) a_{\frac{(k+1)(k+2)}{2} + j - 1} x^{k-j} y^{j-1} \\ \frac{1}{E} \tau = - \left[ a_3 + a_1 x + a_2 y + \sum_{k=3}^n \sum_{j=1}^k j(k-j+1) a_{\frac{(k+1)(k+2)}{2} + j} x^{k-j} y^{j-1} \right] \end{array} \right. \quad (2.1)$$

作为逼近函数族.

由(2.1)式表示的应力分量, 是座标变量的 $n-1$ 次多项式, 其一般不满足静力平衡方程

式:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = E(2a_8 - a_2) \\ \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = E(2a_7 - a_1) \end{cases} \quad (2.2)$$

但不难发现<sup>[1]</sup>, 当 (2.1) 式中的  $\frac{(n+1)(n+4)}{2}$  个待定常数  $a_i$ , 满足  $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$  个关系:

$$\begin{aligned} & (k-j+1)(k-j+2)(k-j+3)(k-j+4) a_{\frac{(k+3)(k+4)}{2}+j-1} \\ & + 2j(j+1)(k-j+1)(k-j+2) a_{\frac{(k+3)(k+4)}{2}+j+1} \\ & + j(j+1)(j+2)(j+3) a_{\frac{(k+3)(k+4)}{2}+j+3} = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$k=1 \sim n-2, \quad j=1 \sim k$$

时, 却是可积的. ——与之相应的位移分量为

$$\begin{cases} u = -[(1+\nu)a_2 + 3a_8 - \nu a_8]y^2 - \sum_{k=3}^n \left[ -\frac{6}{k(k-1)} a_{\frac{k(k+5)}{2}-1} \right. \\ \quad \left. + (2+\nu) a_{\frac{k(k+5)}{2}+1} \right] y^k + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k \left[ \frac{j(j+1)}{k-j+1} a_{\frac{k(k+3)}{2}+j+2} \right. \\ \quad \left. - \nu(k-j+2) a_{\frac{k(k+3)}{2}+j} \right] x^{k-j+1} y^{j-1} \\ v = -2(1+\nu)a_4x - [(1+\nu)a_1 - \nu a_7 + 3a_6]x^2 \\ \quad - \sum_{k=0}^n \left[ \frac{6}{k(k-1)} a_{\frac{k(k+3)}{2}+4} + (2+\nu) a_{\frac{k(k+3)}{2}+2} \right] x^k \\ \quad + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k \left[ \frac{(k-j+1)(k-j+2)}{j} a_{\frac{k(k+3)}{2}+j} - \nu(j+1) a_{\frac{k(k+3)}{2}+j+2} \right] x^{k-j} y^j \end{cases} \quad (2.4)$$

这显然是坐标变量的  $n$  次多项式.

在满足条件(2.3)后, 应力场表达式(2.1)中, 就只剩下了  $\frac{(n+1)(n+4)}{2} - \frac{(n-1)(n-2)}{2}$

$= 4n + 1$  个独立常数. 在有限单元计算中, 它们可通过单元的广义节点力来表示.

本文将使用图 1 所示那样的扇形单元来进行区域的离散化. 这类单元的特点是只在其两条直边上, 每边设置  $n$  个节点, 至于其第三边, 则无节点, 且可取任意曲线形状, 因而可完全适应区域的形状特点.

现在该单元的三个顶点, 即节点 1,  $n$  与  $2n-1$  上, 取应力分量  $(\sigma_x, \sigma_y, \tau)$  为广义节点力, 在其他节点, 则取边界应力的法向、切向分量  $(\sigma_n, \tau_n)$ :

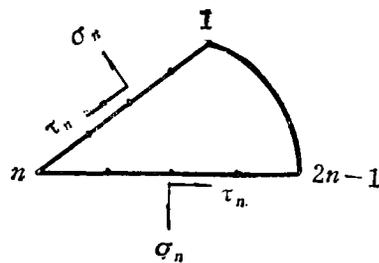


图 1

$$\begin{cases} \sigma_n = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + 2\tau lm \\ \tau_n = (\sigma_y - \sigma_x)lm + \tau(l^2 - m^2) \end{cases} \quad (2.5)$$

为广义节点力, 这样, 单元的 $2n-1$ 个节点, 就正好提供为确定 $4n+1$ 个独立常数 $a$ , 所需要的 $4n+1$ 个单元广义力:

$$\{F\} = [\sigma_{x_1}, \sigma_{y_1}, \tau_1, \sigma_{x_{2n-1}}, \sigma_{y_{2n-1}}, \tau_{2n-1}]^T \quad (2.6)$$

并且, 由于应力场(2.1)是坐标变量的 $n-1$ 次多项式, 所以当用这些广义节点力为有限元计算中的基本未知数时, 应力分量就可以连续地跨过单元的两条直边.

由单元节点上的广义力条件, 及应力场的可积条件(2.3), 可建立关于全部 $\frac{(n+1)(n+4)}{2}$ 个待定常数 $a$ 的联立方程式

$$[C]\{a\} = \frac{1}{E}\{F\} \quad (2.7)$$

其解

$$\{a\} = \frac{1}{E}[C]^{-1}\{F\} \quad (2.8)$$

于是, 如用 $t_{kj}$ 表示矩阵 $[C]^{-1}$ 的元素, 即有

$$a_k = \frac{1}{E} \sum_{i=1}^{4n+1} t_{ki} F_i \quad k = 1 \sim \frac{(n+1)(n+4)}{2} \quad (2.9)$$

从而再代入公式(2.1)、(2.4)中, 就可将单元的应力和位移通过单元广义节点力表示如:

$$\begin{cases} \sigma_x = \sum_{i=1}^{4n+1} R_i F_i \\ \sigma_y = \sum_{i=1}^{4n+1} S_i F_i \\ \tau = \sum_{i=1}^{4n+1} T_i F_i \end{cases} \quad (2.10)$$

$$\begin{cases} u = \frac{1}{E} \sum_{i=1}^{4n+1} M_i F_i \\ v = \frac{1}{E} \sum_{i=1}^{4n+1} N_i F_i \end{cases} \quad (2.11)$$

这里

$$\begin{cases} R_i = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k j(j+1) t_{\frac{k(k+3)}{2}+j+2, i} x^{k-j} y^{j-1} \\ S_i = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k (k-j+1)(k-j+2) t_{\frac{k(k+3)}{2}+j, i} x^{k-j} y^{j-1} \\ T_i = -[t_{4, i} + t_{1, i} x + t_{2, i} y + \sum_{k=3}^n \sum_{j=1}^k j(k-j+1) t_{\frac{k(k+3)}{2}+j+1, i} x^{k-j} y^{j-1}] \end{cases} \quad (2.12)$$

$$\left\{ \begin{aligned} M_i &= -[(1+\nu)t_{2i} + 3t_{6i} - \nu t_{3i}]y^2 - \sum_{k=3}^n \left[ \frac{6}{k(k-1)} t_{\frac{k(k+5)}{2}} - 1, i \right. \\ &\quad \left. + (2+\nu)t_{\frac{k(k+5)}{2}+1, i} \right] y^k + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k \left[ \frac{j(j+1)}{k-j+1} t_{\frac{k(k+3)}{2}+j+2, i} \right. \\ &\quad \left. - \nu(k-j+2)t_{\frac{k(k+3)}{2}+j, i} \right] x^{k-j+1} y^{j-1} \\ N_i &= -2(1+\nu)t_{4i}x - [(1+\nu)t_{1i} - \nu t_{7i} + 3t_{9i}]x^2 \\ &\quad - \sum_{k=3}^n \left[ \frac{6}{k(k-1)} t_{\frac{k(k+3)}{2}+4, i} + (2+\nu)t_{\frac{k(k+3)}{2}+2, i} \right] x^k \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^k \left[ \frac{(k-j+1)(k-j+2)}{j} t_{\frac{k(k+3)}{2}+j, i} - \nu(j+1)t_{\frac{k(k+3)}{2}+j+2, i} \right] x^{k-j} y^j \end{aligned} \right. \quad (2.13)$$

易于证明:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial R_i}{\partial x} + \frac{\partial T_i}{\partial y} &= 2t_{8i} - t_{2i} \\ \frac{\partial T_i}{\partial x} + \frac{\partial S_i}{\partial y} &= 2t_{7i} - t_{1i} \end{aligned} \right. \quad (2.14)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial M_i}{\partial x} &= R_i - \nu S_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} &= S_i - \nu R_i \\ \frac{\partial M_i}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial x} &= 2(1+\nu)T_i \end{aligned} \right. \quad (2.15)$$

由(2.10)式, 我们又可将边界应力通过广义节点力来表示. 以后需要用到单元边界应力的 $x$ 向,  $y$ 向分量, 其算式如下:

$$\left\{ \begin{aligned} X &= \sum_{i=1}^{n+1} X_i F_i \\ Y &= \sum_{i=1}^{n+1} Y_i F_i \end{aligned} \right. \quad (2.16)$$

其中

$$\begin{cases} X_i = R_i l + T_i m \\ Y_i = T_i l + S_i m \end{cases} \quad (2.17)$$

### 三、广 义 变 分 原 理

由于应力场(2.1)不是静力可能的, 所以必须应用广义变分原理.

在一般情况下, 单元边界上可能给定如下四类边界条件

$$\text{I. } \begin{cases} X|_{S_1} = P_x \\ Y|_{S_1} = P_y \end{cases} \quad \text{III. } \begin{cases} X|_{S_3} = P_x \\ v|_{S_3} = v^* \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\text{I} \cdot \begin{cases} u|_{s_2} = u^* \\ v|_{s_2} = v^* \end{cases} \quad \text{IV} \cdot \begin{cases} y|_{s_4} = P_y \\ u|_{s_4} = u^* \end{cases}$$

于是, 可取广义泛函

$$\begin{aligned} \Pi = & - \iint \left( \frac{1}{2} \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} + \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} + F_x \\ \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + F_y \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right) dF \\ & + \int_{s_1} \begin{bmatrix} X - P_x \\ Y - P_y \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} ds + \int_{s_2} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} u^* \\ v^* \end{bmatrix} ds \\ & + \int_{s_3} \begin{bmatrix} X - P_x \\ Y \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} u \\ v^* \end{bmatrix} ds + \int_{s_4} \begin{bmatrix} X \\ Y - P_y \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} u^* \\ v \end{bmatrix} ds \end{aligned} \quad (3.2)$$

其在用(2.10)、(2.11)、(2.16)诸式代入后, 仍可写成一般熟知的形式

$$\Pi = \{F\}^T \left( \frac{1}{2} [K] \{F\} - \{\Delta\} \right) \quad (3.3)$$

其中

$$\left\{ \begin{aligned} K_{ij} = & -\frac{1}{E} \iint [R_i(R_j - \nu S_j) + S_i(S_j - \nu R_j) + 2(1 + \nu)T_i T_j \\ & + (2t_{8i} - t_{2i})M_j + (2t_{7i} - t_{1i})N_j + (2t_{8j} - t_{2j})M_i + (2t_{7j} - t_{1j})N_i] dF \\ & + \frac{1}{E} \int_{s_1} [(X_i M_j + X_j M_i) + (Y_i N_j + Y_j N_i)] ds \\ & + \frac{1}{E} \int_{s_3} (X_i M_j + X_j M_i) ds + \frac{1}{E} \int_{s_4} (Y_i N_j + Y_j N_i) ds \\ \Delta_i = & \frac{1}{E} \iint (F_x M_i + F_y N_i) dF + \frac{1}{E} \int_{s_1} (P_x M_i + P_y N_i) ds \\ & - \int_{s_2} (u^* X_i + v^* Y_i) ds + \int_{s_3} \left( \frac{1}{E} P_x M_i - v^* Y_i \right) ds \\ & + \int_{s_4} \left( \frac{1}{E} P_y N_i - u^* X_i \right) ds \end{aligned} \right. \quad (3.4)$$

在力法计算中, 一般称  $[K]$  为柔度矩阵,  $\{\Delta\}$  为广义节点位移. 但在这里, 由(3.4)式可见, 它们实为混杂的广义量.

由公式(2.15) 柔度矩阵在分部积分后, 可表示如

$$\begin{aligned} K_{ij} = & -\frac{1}{E} \iint [(2t_{8j} - t_{2j})M_i + (2t_{7j} - t_{1j})N_i] dF \\ & - \frac{1}{E} \int_{s_c + s_2} (X_i M_j + Y_i N_j) ds + \frac{1}{E} \int_{s_1} (X_i M_j + Y_i N_j) ds \\ & + \frac{1}{E} \int_{s_3} (X_i M_j - Y_i N_j) ds - \frac{1}{E} \int_{s_4} (X_i M_j - Y_i N_j) ds \end{aligned} \quad (3.5)$$

这里  $s_c = s - (s_1 + s_2 + s_3 + s_4)$ , 表示单元的其他边界部分, 也就是与区域内其他单元相邻接的公共边界部分.

利用表达式(3.5), 可算知:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} K_{i,j} F_i - \Delta_i = & -\frac{1}{E} \iint \left[ \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} + F_x \right) M_i + \left( \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + F_y \right) N_i \right] dF \\
& - \int_{s_c} (u X_i + v Y_i) ds + \frac{1}{E} \int_{s_1} [(X - P_x) M_i + (Y - P_y) N_i] ds \\
& - \int_{s_2} [(u - u^*) X_i + (v - v^*) Y_i] ds + \int_{s_3} \left[ \frac{1}{E} (X - P_x) M_i - (v - v^*) Y_i \right] ds \\
& + \int_{s_4} \left[ \frac{1}{E} (Y - P_y) N_i - (u - u^*) X_i \right] ds \quad (3.6)
\end{aligned}$$

由此能看出,按区域进行单元量迭加,最后得到的柔度方程,实质上是由如下一些类型的加权残数方程组合而成的:

1. 在单元区域内,有方程类型

$$\iint \left[ \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} + F_x \right) M_i + \left( \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + F_y \right) N_i \right] dF = 0 \quad (3.7)$$

2. 在给定边界条件 I—IV 的边界上,分别有

$$\begin{cases} \int_{s_1} [(X - P_x) M_i + (Y - P_y) N_i] ds = 0 \\ \int_{s_2} [(u - u^*) X_i + (v - v^*) Y_i] ds = 0 \\ \int_{s_3} \left[ \frac{1}{E} (X - P_x) M_i - (v - v^*) Y_i \right] ds = 0 \\ \int_{s_4} \left[ \frac{1}{E} (Y - P_y) N_i - (u - u^*) X_i \right] ds = 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

3. 在单元之间的公共边界上,有

$$\int_{s_c} [(u^{e1} X_i^{e1} + v^{e1} Y_i^{e1}) + (u^{e2} X_i^{e2} + v^{e2} Y_i^{e2})] ds = 0 \quad (3.9)$$

注意,当单元间公共边界是单元的直边 1-n 或 n-(2n-1) 时(图 1),由于,如前所述,应力场跨过这条边界是连续的,即有  $X_i^{e1} + X_i^{e2} = 0$ ,  $Y_i^{e1} + Y_i^{e2} = 0$ , 因而由 (3.9) 式就可得到跨过该边界的位移连续传递条件:

$$\int_{s_c} [(u^{e1} - u^{e2}) X_i + (v^{e1} - v^{e2}) Y_i] ds = 0 \quad (3.10)$$

在一般情况下,我们应尽量将单元的第三边,即 1-(2n-1) 边,取与区域的边界线重合,否则,由于应力场跨过这条边不连续,由 (3.9) 式就得不到连续性条件 (3.10). 这时,如果想得到更好的计算结果,就必须利用 Lagrange 乘子方法再加处理,以达到所需的连续性.

当单元的第三边不是区域的边界线,而是二个单元的公共边时(图 2),这条边显然没有理由取作曲线形状.在这种情况下,为了保证应力通过公共边  $bd$  的连续性,就得取泛函:

$$\Pi' = \Pi + \int_{s_0} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{bmatrix} ds \quad (3.11)$$

这里, 我们用  $s_0$  表示单元公共边  $bd$ , 以与一般的单元公共边  $s_c$  相区别, 而  $(\bar{u}, \bar{v})$  则是起到 Lagrange 乘子作用的单元边界位移场。

不难证明, 变分

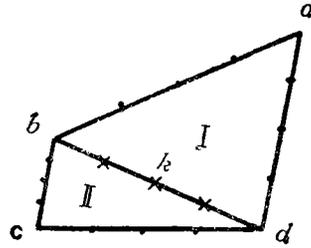


图 2

$$\begin{aligned} \delta \Pi' = & - \iint \left[ \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} + F_x \right) \delta u + \left( \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + F_y \right) \delta v \right] dF \\ & + \int_{s_1} [(X - P_x) \delta u + (Y - P_y) \delta v] ds \\ & - \int_{s_2} [(u - u^*) \delta X + (v - v^*) \delta y] ds \\ & + \int_{s_3} [(X - P_x) \delta u - (v - v^*) \delta Y] ds \\ & + \int_{s_4} [(Y - P_y) \delta v - (u - u^*) \delta X] ds \\ & - \int_{s_c} (u \delta X + v \delta Y) ds - \int_{s_0} [(u - \bar{u}) \delta X \\ & + (v - \bar{v}) \delta Y - (X \delta \bar{u} + Y \delta \bar{v})] ds \end{aligned} \quad (3.12)$$

因为边界位移场  $(\bar{u}, \bar{v})$  对于两个相邻单元相同, 所以由泛函  $\Pi'$  的极值要求, 由线积分  $s_0$  项, 就可得到跨过该公共边  $bd$  的应力连续条件。

现设边界位移场  $(\bar{u}, \bar{v})$  可通过有限个边界点处的广义位移  $\{\delta\}$ , 利用插值函数矩阵  $[L]$  表示如

$$\begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{bmatrix} = [L] \{\delta\} \quad (3.13)$$

则在代入(3.11)式后, 即有

$$\begin{aligned} \Pi' = & \{F\}^T \left( \frac{1}{2} [K] \{F\} + [A] \{\delta\} - \{\Delta\} \right) \\ = & \begin{bmatrix} F \\ \delta \end{bmatrix}^T \left( \frac{1}{2} \begin{bmatrix} K & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ \delta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta \\ 0 \end{bmatrix} \right) \end{aligned} \quad (3.14)$$

其中

$$[A] = \int_{s_0} \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \\ \vdots & \vdots \\ X_{4n+1} & Y_{4n+1} \end{bmatrix} [L] ds \quad (3.15)$$

由于在本文的计算中, 应力分量是  $n-1$  次多项式, 所以在实际计算时, 只要在公共边  $bd$  上选取  $n-2$  个点 (图 2), 然后令这二个单元的应力在这些点处相等, 则再考虑到二个顶点  $b, d$  处, 应力原已连续后, 应力场跨过整个边界  $bd$ , 自然也就连续了。

由(2.16)式, 上述应力强迫相等条件可表示为:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{4n+1} [X_i^{e_1}(x_k, y_k) F_i^{e_1} + X_i^{e_2}(x_k, y_k) F_i^{e_2}] = 0 \\ \sum_{i=1}^{4n+1} [Y_i^{e_1}(x_k, y_k) F_i^{e_1} + Y_i^{e_2}(x_k, y_k) F_i^{e_2}] = 0 \end{cases} \quad (3.16)$$

这样，利用Lagrange乘子 $(\lambda_k, \mu_k)$ ，即可将泛函 $\Pi'$ 取如

$$\Pi' = \Pi + \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{i=1}^{4n+1} [\lambda_k X_i(x_k, y_k) + \mu_k Y_i(x_k, y_k)] F_i \quad (3.17)$$

不难看出，泛函 $\Pi'$ 仍可写成(3.14)式的形式，

但

$$[A] = \begin{bmatrix} X_{11} & Y_{11} & X_{12} & Y_{12} & \cdots & X_{1, n-2} & Y_{1, n-2} \\ X_{21} & Y_{21} & X_{22} & Y_{22} & \cdots & X_{2, n-2} & Y_{2, n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{4n+1, 1} & Y_{4n+1, 1} & X_{4n+1, 2} & Y_{4n+1, 2} & \cdots & X_{4n+1, n-2} & Y_{4n+1, n-2} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

其中

$$\begin{cases} X_{i,j} = X_i(x_j, y_j) \\ Y_{i,j} = Y_i(x_j, y_j) \end{cases} \quad (3.19)$$

从上面的讨论可见，当单元的第三边 $1-(2n-1)$ (图1)是单元间的公共边界时，在最后的柔度方程中，除了方程类型(3.7)–(3.10)外，还将出现如(3.16)式那样的方程组。

### 四、柔度矩阵与广义节点位移的计算

应用本文提出的力法分析具体问题，可先按(3.4), (3.5)式计算单元的柔度矩阵  $K_{ij}$ 。广义节点位移  $\Delta_i$ ，一在必要情况下，再按(3.18)式算出补充矩阵  $A_{ij}$  一然后用一般熟知的直接刚度法，就可迭加出区域的柔度方程。

为简化书写起见，现将(2.13)、(2.17)两式表示如

$$\begin{cases} M_i = \sum_{k=2}^{n+1} \sum_{l=1}^k a_{\frac{k(k-1)}{2}+l, i} x^{k-l} y^{l-1} \\ N_i = \sum_{k=2}^{n+1} \sum_{l=1}^k b_{\frac{k(k-1)}{2}+l, i} x^{k-l} y^{l-1} \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\begin{cases} X_i = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^k c_{\frac{k(k-1)}{2}+l, i} x^{k-l} y^{l-1} \\ Y_i = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^k d_{\frac{k(k-1)}{2}+l, i} x^{k-l} y^{l-1} \end{cases} \quad (4.2)$$

另外，我们再设外力和强迫位移都可展开成座标变量的多项式形式：

$$\begin{cases} F_x = \sum_{h=1}^a \sum_{g=1}^h \alpha_{\frac{h(h-1)}{2}+g} x^{h-g} y^{g-1} \\ F_y = \sum_{h=1}^a \sum_{g=1}^h \beta_{\frac{h(h-1)}{2}+g} x^{h-g} y^{g-1} \end{cases} \quad (4.3)$$

$$\begin{cases} p_x = \sum_{h=1}^r \sum_{k=1}^h \gamma_{\frac{h(h-1)}{2}+g} x^{h-g} y^{g-1} \\ p_y = \sum_{h=1}^r \sum_{k=1}^h \delta_{\frac{h(h-1)}{2}+g} x^{h-g} y^{g-1} \end{cases} \quad (4.4)$$

$$\begin{cases} u^* = \sum_{h=1}^{\mu} \sum_{g=1}^h \mu_{\frac{h(h-1)}{2}+g} x^{h-g} y^{g-1} \\ v^* = \sum_{h=1}^{\mu} \sum_{g=1}^h \nu_{\frac{h(h-1)}{2}+g} x^{h-g} y^{g-1} \end{cases} \quad (4.5)$$

则在代入(3.4)、(3.5)后,即可得到

$$\begin{aligned} K_{ij} = & -\frac{1}{E} \sum_{k=2}^{n+1} \sum_{l=1}^k [(2t_{8j} - t_{2j}) a_{\frac{k(k-1)}{2}+l,i} \\ & + (2t_{7j} - t_{1j}) b_{\frac{k(k-1)}{2}+l,i}] J_F(k-l, l-1) \\ & - \frac{1}{E} \sum_{k=2}^{n+1} \sum_{l=1}^k \sum_{h=1}^n \sum_{g=1}^h [a_{\frac{k(k-1)}{2}+l,j} c_{\frac{h(h-1)}{2}+g,i} \\ & + b_{\frac{k(k-1)}{2}+l,j} d_{\frac{h(h-1)}{2}+g,i}] J_{S_c+S_2}(k-l+h-g, l+g-2) \\ & + \frac{1}{E} \sum_{k=2}^{n+1} \sum_{l=1}^k \sum_{h=1}^n \sum_{g=1}^h [a_{\frac{k(k-1)}{2}+l,i} c_{\frac{h(h-1)}{2}+g,l} \\ & + b_{\frac{k(k-1)}{2}+l,i} d_{\frac{h(h-1)}{2}+g,j}] J_{S_1}(k-l+h-g, l+g-2) \\ & + \frac{1}{E} \sum_{k=2}^{n+1} \sum_{l=1}^k \sum_{h=1}^n \sum_{g=1}^h [a_{\frac{k(k-1)}{2}+l,i} c_{\frac{h(h-1)}{2}+g,i} \\ & - b_{\frac{k(k-1)}{2}+l,j} d_{\frac{h(h-1)}{2}+g,i}] J_{S_3}(k-l+h-g, l+g-2) \\ & - \frac{1}{E} \sum_{k=2}^{n+1} \sum_{l=1}^k \sum_{h=1}^n \sum_{g=1}^h [a_{\frac{k(k-1)}{2}+l,j} c_{\frac{h(h-1)}{2}+g,i} \\ & - b_{\frac{k(k-1)}{2}+l,i} d_{\frac{h(h-1)}{2}+g,i}] J_{S_4}(k-l+h-g, l+g-2) \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \Delta_i = & \frac{1}{E} \sum_{k=2}^{n+1} \sum_{l=1}^k \sum_{h=1}^n \sum_{g=1}^h [\alpha_{\frac{k(k-1)}{2}+g} a_{\frac{k(k-1)}{2}+l,i} \\ & + \beta_{\frac{h(h-1)}{2}+g} b_{\frac{k(k-1)}{2}+l,i}] J_F(k-l+h-g, l+g-2) \\ & + \frac{1}{E} \sum_{k=2}^{n+1} \sum_{l=1}^k \sum_{h=1}^n \sum_{g=1}^h [\gamma_{\frac{h(h-1)}{2}+g} a_{\frac{k(k-1)}{2}+l,i} \\ & + \delta_{\frac{h(h-1)}{2}+g} b_{\frac{k(k-1)}{2}+l,i}] J_{S_1}(k-l+h-g, l+g-2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^k \sum_{h=1}^{\mu} \sum_{g=1}^h \left[ \gamma \frac{h(h-1)}{2} + g \frac{c \cdot h(h-1)}{2} + l, i \right. \\
& + \left. \nu \frac{h(h-1)}{2} + g \frac{a \cdot h(h-1)}{2} + l, i \right] J_{S_2}(k-l+h-g, l+g-2) \\
& + \frac{1}{E} \sum_{h=2}^{n+1} \sum_{l=1}^h \sum_{h=1}^7 \sum_{k=1}^n \left[ \gamma \frac{h(h-1)}{2} + g \frac{a \cdot h(h-1)}{2} + l, i \right] J_{S_3}(k-l+h-g, l+g-2) \\
& + \left[ \delta \frac{h(h-1)}{2} + g \frac{b \cdot h(h-1)}{2} + l, i \right] J_{S_4}(k-l+h-g, l+g-2) \\
& - \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^k \sum_{h=1}^n \sum_{g=1}^h \left[ \nu \frac{h(h-1)}{2} + g \frac{a \cdot h(h-1)}{2} + l, i \right] J_{S_3}(k-l+h-g, l+g-2) \\
& + \left[ \mu \frac{h(h-1)}{2} + g \frac{c \cdot h(h-1)}{2} + l, i \right] J_{S_4}(k-l+h-g, l+g-2)
\end{aligned}$$

式中

$$\begin{cases} J_F(\alpha, \beta) = \iint_F x^\alpha y^\beta dF \\ J_S(\alpha, \beta) = \int_S x^\alpha y^\beta ds \end{cases} \quad (4.7)$$

关于积分(4.7)的计算问题, 我们已获得了有限形式的解. 例如, 对于任意的  $m$  边多边形区域 (图 3)

$$\begin{aligned}
J_F(\alpha, \beta) = & - \frac{1}{(\alpha+1)(\beta+1)} \sum_{k=1}^m \sum_{j=0}^{\beta+1} \sum_{i=0}^{\alpha} \left( \prod_{h=0}^i \frac{\alpha-i+h}{h} \right) \left( \prod_{k=0}^j \frac{\beta-h+2}{\alpha+h+1} \right) \\
& \cdot (x_{k+1} - x_k)(y_{k+1} - y_k)^i x_k^{\alpha-i} x_k^j y_k^{\beta-j+1} \quad (4.8)
\end{aligned}$$

对于任意直线 (图 4)

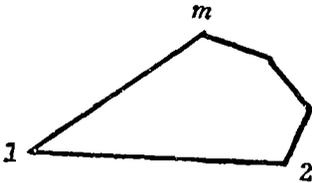


图 3

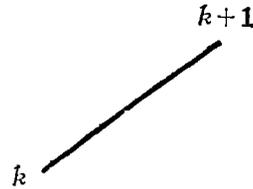


图 4

$$\begin{aligned}
J_S(\alpha, \beta) = & \frac{\sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2}}{\alpha+1} \sum_{i=0}^{\alpha} \sum_{j=0}^{\beta} \left( \prod_{h=0}^i \frac{\alpha-i+h}{h} \right) \\
& \cdot \left( \prod_{k=1}^j \frac{\beta-h+1}{\alpha+h+1} \right) x_{k+1}^{\alpha-i} x_k^i (y_{k+1} - y_k)^i y_k^{\beta-j} \quad (4.9)
\end{aligned}$$

## 五、极坐标系统的应用

对于我们提出的这类扇形单元族, 也可以很方便地利用极坐标系统来求解. 在极坐标系统中的可积应力场可取<sup>(1)</sup>

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{E} \sigma_r &= - \sum_{k=2}^{n+1} k(k-1)(a_{4k-4} \cos k\theta + a_{4k-3} \sin k\theta) r^{k-2} \\ &\quad - \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)(k-2)(a_{4k+2} \cos k\theta + a_{4k+3} \sin k\theta) r^k \\ \frac{1}{E} \sigma_\theta &= 2a_2 + (a_1 \cos \theta + a_3 \sin \theta) r + \sum_{k=2}^{n+1} k(k-1)(a_{4k-4} \cos k\theta \\ &\quad + a_{4k-3} \sin k\theta) r^{k-2} + \sum_{k=2}^{n-1} (k+1)(k+2)(a_{4k+2} \cos k\theta + a_{4k+3} \sin k\theta) r^k \\ \frac{1}{E} \tau &= \frac{1}{2} [(a_1 - 2a_6) \sin \theta - (a_3 - 2a_7) \cos \theta] r \\ &\quad + \sum_{k=2}^{n+1} k(k-1)(a_{4k-4} \sin k\theta - a_{4k-3} \cos k\theta) r^{k-2} \\ &\quad + \sum_{k=2}^{n-1} k(k+1)(a_{4k+2} \sin k\theta - a_{4k+3} \cos k\theta) r^k \end{aligned} \right. \quad (5.1)$$

而与之相应的位移分量，不难求得为：

$$\left\{ \begin{aligned} u &= 2(1-\nu)a_2 r - \frac{1}{2} [(va_1 - 2a_6) \cos \theta + (\nu a_3 - 2a_7) \sin \theta] r^2 \\ &\quad - \sum_{k=2}^{n+1} k(1+\nu)(a_{4k-4} \cos k\theta + a_{4k-3} \sin k\theta) r^{k-1} \\ &\quad - \sum_{k=2}^{n-1} [(k-2) + (k+2)\nu](a_{4k+2} \cos k\theta + a_{4k+3} \sin k\theta) r^{k+1} \\ v &= \frac{1}{2} \{ [(2+\nu)a_1 - 2(1+2\nu)a_6] \sin \theta - [(2+\nu)a_3 - 2(1+2\nu)a_7] \cos \theta \} r^2 \\ &\quad + \sum_{k=2}^{n+1} k(1+\nu)(a_{4k-4} \sin k\theta - a_{4k-3} \cos k\theta) r^{k-1} \\ &\quad + \sum_{k=2}^{n-1} [(k+4) + k\nu](a_{4k+2} \sin k\theta - a_{4k+3} \cos k\theta) r^{k+1} \end{aligned} \right. \quad (5.2)$$

现取扇形单元如图 5 所示，由(5.1)式可看到，在单元的二直边  $\theta = \theta_1$ ,  $\theta = \theta_2$  上，应力分量是矢径  $r$  的  $n-1$  次多项式，所以类似于直角坐标系统情况，在每一直边上要选取  $n$  个节点。

利用极坐标系统来求解平面问题有二个优点。首先，在应力场表达式(5.1)中，只有  $4n+1$  个待定常数  $a_i$ ，而不像直角坐标系统中相应的表达式(2.1)那样，含有  $\frac{(n+1)(n+4)}{2}$  个系数。其次，在直边上， $(\sigma_n, \tau_n) = (\sigma_\theta - \tau)$ ，因而和公式(2.5)不同，不再需要计算单元边界的方向余弦。有鉴于这二个原因，计算就自然地简化了。

由单元节点上的广义力条件，我们可以建立类似于(2.7)那样的联立方程，其解仍可表示如

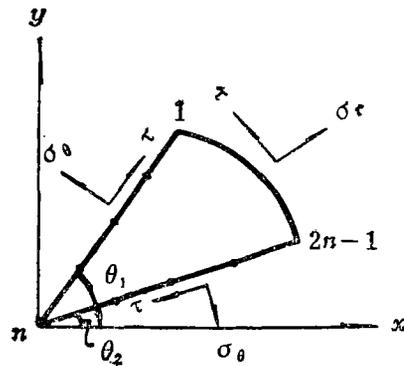


图 5

$$a_k = \frac{1}{E} \sum_{i=1}^{4n+1} t_i F_i \quad k=1 \sim 4n+1 \quad (5.3)$$

于是代入(5.1)、(5.2)两式中, 就有

$$\begin{cases} \sigma_r = \sum_{i=1}^{4n+1} R_i F_i \\ \sigma_\theta = \sum_{i=1}^{4n+1} S_i F_i \\ \tau = \sum_{i=1}^{4n+1} T_i F_i \end{cases} \quad (5.4)$$

$$\begin{cases} u = \frac{1}{E} \sum_{i=1}^{4n+1} M_i F_i \\ v = \frac{1}{E} \sum_{i=1}^{4n+1} N_i F_i \end{cases} \quad (5.5)$$

其中

$$\begin{cases} R_i = - \sum_{k=2}^{n+1} k(k-1)(t_{4k-4}, \cos k\theta + t_{4k-3}, \sin k\theta)r^{k-2} \\ \quad - \sum_{k=0}^{n-1} k(k+1)(k-2)(t_{4k+2}, \cos k\theta + t_{4k+3}, \sin k\theta)r^k \\ S_i = 2t_{2i} + (t_{1i} \cos \theta + t_{3i} \sin \theta)r + \sum_{k=2}^{n+1} k(k-1)(t_{4k-4}, \cos k\theta + t_{4k-3}, \sin k\theta)r^{k-2} \\ \quad + \sum_{k=2}^{n-1} (k+1)(k+2)(t_{4k+2}, \cos k\theta + t_{4k+3}, \sin k\theta)r^k \\ T_i = \frac{1}{2} [(t_{1i} - 2t_{0i}) \sin \theta - (t_{3i} - 2t_{7i}) \cos \theta]r \\ \quad + \sum_{k=2}^{n+1} k(k-1)(t_{4k-4}, \sin k\theta - t_{4k-3}, \cos k\theta)r^{k-2} \\ \quad + \sum_{k=2}^{n-1} k(k+1)(t_{4k+2}, \sin k\theta - t_{4k+3}, \cos k\theta)r^k \end{cases} \quad (5.6)$$

$$\begin{cases} M_i = 2(1-\nu)t_{2i}r - \frac{1}{2} [(vt_{1i} - t_{0i}) \cos \theta + (vt_{3i} - 2t_{7i}) \sin \theta]r^2 \\ \quad - \sum_{k=2}^{n+1} k(1+\nu)(t_{4k-4}, \cos k\theta + t_{4k-3}, \sin k\theta)r^{k-1} \\ \quad - \sum_{k=2}^{n-1} [(k-2) + (k+2)\nu](t_{4k+2}, \cos k\theta + t_{4k+3}, \sin k\theta)r^{k+1} \end{cases} \quad (5.7)$$

$$\begin{cases} N_i = \frac{1}{2} [(2+\nu)t_{1i} - 2(1+2\nu)t_{0i}] \sin \theta - [(2+\nu)t_{3i} - 2(1+2\nu)t_{7i}] \cos \theta \} r^2 \\ \quad + \sum_{k=2}^{n+1} k(1+\nu)(t_{4k-4}, \sin k\theta - t_{4k-3}, \cos k\theta)r^{k-1} \\ \quad + \sum_{k=2}^{n-1} [(k+4) + k\nu](t_{4k+2}, \sin k\theta - t_{4k+3}, \cos k\theta)r^{k+1} \end{cases}$$

以后的讨论就和直角坐标系统情况完全类似，这里从略。

## 六、算例——径向均载作用下的圆盘计算

设有圆形区域如图 6 所示，其上作用着单位径向拉力。由于对称，故可取第一象限的  $1/4$  圆为一个单元，作为计算的基础，并设置水平及垂直支座连杆如图示。为了简化计算，我们取  $n=2$ 。

由(2.1)式，当  $n=2$  时，有

$$\begin{cases} \frac{1}{E}\sigma_x = 2a_5 + 2a_8x + 6a_9y \\ \frac{1}{E}\sigma_y = 2a_3 + 6a_6x + 2a_7y \\ \frac{1}{E}\tau = -(a_4 + a_1x + a_2y) \end{cases} \quad (6.1)$$

这样，将节点坐标值代入，并求解后，可得形状函数：

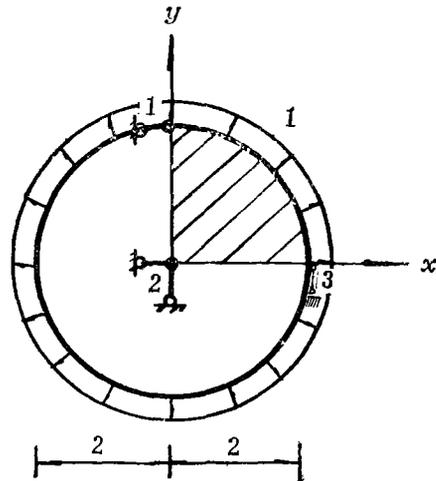


图 6

$$\begin{cases} R_1 = \frac{1}{2}y \\ R_2 = 0 \\ R_3 = 0 \\ R_4 = \frac{1}{2}(2-x-y) \\ R_5 = 0 \\ R_6 = 0 \\ R_7 = \frac{1}{2}x \\ R_8 = 0 \\ R_9 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} S_1 = 0 \\ S_2 = \frac{1}{2}y \\ S_3 = 0 \\ S_4 = 0 \\ S_5 = \frac{1}{2}(2-x-y) \\ S_6 = 0 \\ S_7 = 0 \\ S_8 = \frac{1}{2}x \\ S_9 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} T_1 = 0 \\ T_2 = 0 \\ T_3 = \frac{1}{2}y \\ T_4 = 0 \\ T_5 = 0 \\ T_6 = \frac{1}{2}(2-x-y) \\ T_7 = 0 \\ T_8 = 0 \\ T_9 = \frac{1}{2}x \end{cases} \quad (6.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M_1 = \frac{1}{2}xy \\ M_2 = -\frac{\nu}{2}xy \\ M_3 = \frac{1+\nu}{2}y^2 \\ M_4 = \frac{1}{4}(4x-x^2-2xy-\nu y^2) \\ M_5 = -\frac{1}{4}(4\nu x-\nu x^2-2\nu xy-y^2) \\ M_6 = -\frac{1+\nu}{2}y^2 \\ M_7 = \frac{1}{4}(x^2+\nu y^2) \\ M_8 = -\frac{1}{4}(\nu x^2+y^2) \\ M_9 = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} N_1 = -\frac{1}{4}(x^2+\nu y^2) \\ N_2 = \frac{1}{4}(\nu x^2+y^2) \\ N_3 = 0 \\ N_4 = -\frac{1}{4}(4\nu y^2-x^2-2\nu xy-\nu y^2) \\ N_5 = \frac{1}{4}(4y-\nu x^2-2xy-y^2) \\ N_6 = \frac{1+\nu}{2}(4-x)x \\ N_7 = -\frac{\nu}{2}xy \\ N_8 = \frac{1}{2}xy \\ N_9 = \frac{1+\nu}{2}x^2 \end{array} \right. \quad (6.3)$$

单元的边界条件为:

$$\left\{ \begin{array}{l} Y|_{12}=0 \\ u|_{12}=0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} X|_{23}=0 \\ v|_{23}=0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} X|_{31}=\cos\theta \\ Y|_{31}=\sin\theta \end{array} \right. \quad (6.4)$$

于是由公式(3.4)、(3.5)可知

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{ij} = -\frac{1}{E} \iint [(2t_{6j}-t_{2j})M_i + (2t_{7j}-t_{1j})N_i] dF \\ \quad + \frac{1}{E} \int_1^2 (R_i M_j - T_i N_j) ds - \frac{1}{E} \int_2^3 (T_i M_j - S_i N_j) ds \\ \quad + \frac{1}{E} \int_3^1 [(R_j \cos\theta + T_j \sin\theta)M_i + (T_j \cos\theta + S_j \sin\theta)N_i] ds \\ \Delta_i = \frac{1}{E} \int_3^1 (M_i \cos\theta + N_i \sin\theta) ds \end{array} \right. \quad (6.5)$$

由此算得柔度方程如(6.6)式, 其解为

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1 = F_2 = F_4 = F_6 = F_7 = F_8 = 1 \\ F_3 = F_5 = F_9 = 0 \end{array} \right. \quad (6.7)$$

从而再代入(2.10)、(2.11)式中, 即可求得应力分量与位移分量:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = 1 \\ \sigma_y = 1 \\ \tau = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} u = \frac{1-\nu}{E}x \\ v = \frac{1-\nu}{E}y \end{array} \right. \quad (6.8)$$

——这一结果显然与精确解一致。



## 七、结 束 语

由于工程实际中主要关心的是应力的而不是位移值，所以在有限元计算中，力法应该说比位移法更理想。可是迄今为止，能够实用的力法方案似乎还不多见；而由上面的讨论可以看到，本文提出的力法，除了基本未知数的选取，和单元基本泛函表达式方面，有所不同外，在其他做法上，和位移法实质上并没有什么大的差别，所以很容易用类似于大家熟知的直接刚度法那样的方法，来编制计算程序。这是本文方法的一个特点。

本文方法的另一特点是使用任意阶的扇形单元。这种扇形单元的每条直边上，可根据计算精度要求的需要，而设置任意数量的节点。换言之，我们得到的是扇形单元族的通解。因此，由此编制的计算程序，不仅可使用任意阶的扇形单元，而且还容许我们在同一区域中根据需要而使用不同阶数的单元，这样就提供了很大的灵活性。扇形单元的再一特点是其第三边可取任意曲线形状，因此就可以完全与所讨论区域的边界吻合，从而消除相应的离散误差。所附算例获得了精确解答案，这显然是一般有限单元法所做不到的。

本文曾由同济大学教授徐次达老师审阅并诸多指导，敬此致谢。

### 参 考 文 献

- 1 蒋炜，弹性理论平面问题中由应力函数积分位移分量的一般方法，上海力学，1，1。（1980），23—37
2. Pian, T. H. H. and Tong, P., Basis of Finite Element Methods for Solid Continua, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1, 1. (1969), 3—28.

## The Finite-Element Force Method for Solving Plane Problems of Elasticity

Jiang Wei

(The Shanghai Institute of Industrial Building Design)

### Abstract

Using elements in the form of sectors, the author has devised a plan for solving plane problems of elasticity by the force method. The method is characterized by a smaller number of nodes, a more convenient computation and a perfect adaptability to the particular shape of the region in question.