应用数学和力学，第1卷第3期（1980年11月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

微分算子和边界双摄动的高阶椭圆型方程的狄立克雷问题

林宗池（福州 福建师范大学数学系）

（1980年2月5日收到）

摘　要

本文研究了在边界和算子摄动相结合的情况下高阶椭圆型方程解的渐近式的构造．如果非摄动问题A_0不在谱上，则摄动问题A_ε的渐近解可按小参数ε的次幂展开；如果A_0在谱上，则在A_ε的渐近解中出现有小参数ε的负幂；同时给出了有关的余项的估计．

一、问　题　的　提　出

在很多物理和力学的问题中，常出现最高阶导数项带有小参数的椭圆型方程．例如，研究预应力薄板的弯曲问题时，得到变系数的四阶椭圆型方程[1]：

$$D\nabla^4W-\left[n_x(x,\ y)\frac{\partial^2W}{\partial x^2}+n_y(x,\ y)\frac{\partial^2W}{\partial y^2}+2n_{xy}(x,y)\frac{\partial^2W}{\partial x\partial y}\right]=P(x,y)$$

当板充分薄时，D是小参数．在研究薄壳的变形时，将得到阶数更高的椭圆型方程和方程组[2]．在工程技术中还出现边界摄动的问题，例如，把平板焊接在柱壳（或柱筒）上，当柱壳截面切割不好，不是一个理想的平面时，所产生的焊接应力就有边界摄动问题．同样在扁球壳屋顶计算中，也有类似的问题．

1964年作者应用了Л．А．Люстерник 和М．И．Вишик 的方法[3]、[4]，研究了在边界摄动的情况下二阶椭圆型方程和四阶椭圆型方程解的渐近式[5]、[6]，1978年作者把这些结果推广到更高阶的椭圆型方程上去[7]．本文是前文的继续，研究了更一般的情况．高阶椭圆型方程在边界和算子摄动相结合的情况下的问题，在工程中代表周向加肋的圆柱壳或椭圆柱壳（如潜艇外壳或柱壳屋顶盖等），当周向肋和圆柱壳的焊接位置不正常时，由于外压或自重产生的焊接应力问题．圆柱壳的平衡方程是径向位移八阶微分方程式．其外部解或远程区域的解用薄膜理论就足够了（它是四阶微分方程），边界上的条件并不能完全满足．这样就可以用摄动法求出边界层的摄动解来满足这些边界条件．

设Ω为n维空间R_n的有界区域，$\partial\Omega_\varepsilon$表示摄动的边界，我们用$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$表示$R_n$内的任意一点．在$\Omega$内我们研究如下的摄动问题$A_\varepsilon$：

$$L_\varepsilon u_\varepsilon\equiv\sum_{i=1}^{2l}\varepsilon^i L_i u_\varepsilon+L_0 u_\varepsilon=f(x)\tag{1.1}$$

$$\left.\frac{\partial^s u_\varepsilon}{\partial\rho^s}\right|_{\partial\Omega_\varepsilon}\equiv\frac{\partial^s u_\varepsilon[\varepsilon\alpha(\varphi),\varphi]}{\partial\rho^s}=\psi_s[\varepsilon\alpha(\varphi),\varphi] \tag{1.2}$$

$$(s=0,1,2,\cdots,l+m-1)$$

其中$\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$是小参数，$L_0u_\varepsilon\equiv\sum_{|\alpha|\leqslant 2m}a_\alpha(x)D^\alpha u_\varepsilon$，$L_iu_\varepsilon\equiv\sum_{|\alpha|\leqslant 2m+i}a_\alpha(x)D^\alpha u_\varepsilon$，$(i=1,2,\cdots,2l)$，$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，$|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$，$D^\alpha=D_1^{\alpha_1}D_2^{\alpha_2}\cdots D_n^{\alpha_n}$，$D_s=\frac{\partial}{\partial x_s}$，$(s=1,2,\cdots,n)$.

假定算子L_0、L_{2l}分别为$2m$和$2l+2m$阶的椭圆型微分算子，即它们的特征多项式

$$P_0(x,\xi)=\sum_{|\alpha|=2m}a_\alpha(x)\xi^\alpha\geqslant\beta_0|\xi|^{2m}$$

$$P(x,\xi)=\sum_{|\alpha|=2m+2l}a_\alpha(x)\xi^\alpha\geqslant\beta_1|\xi|^{2m+2l}$$

对任意实向量$\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\neq0$及任意$x\in\Omega$都成立. β_0、β_1为某个正数，ξ^α应理解为表达式$\xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2}\cdots\xi_n^{\alpha_n}$.

当边界不摄动时，边界条件(1.2)退化为通常所谓的狄立克雷问题的边界条件，在这种情况下，M. И. Вишик 和 Л. А. Люстерник[3]、[4]、J. G. Bisjes[8]等都曾作过研究.当边界和算子都不摄动时，摄动问题A_ε退化为非摄动问题A_0:

$$L_0u_0=f(x)$$

$$\left.\frac{\partial^s u_0}{\partial\rho^s}\right|_{\partial\Omega_0}\equiv\frac{\partial^s u_0(0,\varphi)}{\partial\rho^s}=\psi_s(0,\varphi),\ (s=0,1,\cdots,m-1)$$

这个问题已有很多人详细地研究过，例如，M. И. Вишик[9]和O. B. Гусева[10]等.本文拓广改进了他们的工作.

摄动问题A_ε的解u_ε的特性与非摄动问题A_0是否在谱上有关，即$\lambda=0$是否退化算子L_0的特征值，解的特性是不同的，如果非摄动问题A_0不在谱上，则摄动问题A_ε的解u_ε的渐近式的构造比较简单，可按小参数ε的次幂展开. 如果非摄动问题A_0在谱上，则一般说来它是不可解的，如果摄动问题A_ε的解u_ε存在，则渐近式的构造就复杂得多，在展开式中将含有小参数ε的负幂，点$\varepsilon=0$是做为ε的函数u_ε的奇异点.在讨论上述各种情况之前，我们先对算子L_ε进行第二次的分解.

二、微分算子L_ε的第二次分解

在边界$\partial\Omega_0$的η——邻域内引进局部座标$(\rho,\varphi)=(\rho,\varphi_1,\cdots,\varphi_n)$，$(0,\varphi)$为边界$\partial\Omega_0$上的点座标，$\rho$表示其内法线上的点到边界的距离，$0\leqslant\rho<\eta$，当$\rho=0$时由$(0,\varphi)$确定了不摄动的边界$\partial\Omega_0$，当$\rho=\varepsilon\alpha(\varphi)$时，由$(\varepsilon\alpha(\varphi),\varphi)$定义了摄动的边界$\partial\Omega_\varepsilon$，其中$\alpha(\varphi)$是充分光滑的正值函数.

在局部座标中将每一个算子L_i表示为

$$L_i\equiv a_i(\rho,\varphi)\frac{\partial^{2m+i}}{\partial\rho^{2m+i}}+\sum_{r=1}^{2m+i}\widetilde{M}_{ir} \tag{2.1}$$

其中$\widetilde{M}_{ir}$是L_i中关于变量ρ的$2m+i-r(2m+i\geqslant r>1)$阶的一些导数项之和.

作变换$\rho=\varepsilon t$，则$\dfrac{\partial^s}{\partial\rho^s}=\varepsilon^{-s}\dfrac{\partial^s}{\partial t^s}$，这时(2.1)式可改写为：

$$L_i\equiv\varepsilon^{-(2m+i)}\left[a_i(\varepsilon t,\ \varphi)\right]\frac{\partial^{2m+i}}{\partial t^{2m+i}}+\sum_{r=1}^{2m+i}\varepsilon^r\tilde{\widetilde{M}}_{ir} \tag{2.2}$$

其中$\tilde{\widetilde{M}}_{ir}$含有关于$t$的$2m+i-r$阶的导数.

把(2.2)式代入(1.1)式得

$$L_\varepsilon u_\varepsilon\equiv\varepsilon^{-2m}\left[\sum_{i=0}^{2l}a_i(\varepsilon t,\varphi)\frac{\partial^{2m+i}u_\varepsilon}{\partial t^{2m+i}}+\sum_{r=1}^{2(l+m)}\varepsilon^r\widetilde{M}_r u_\varepsilon\right] \tag{2.3}$$

其中$\widetilde{M}_r=\sum\limits_{i=0}^{2l}\tilde{\widetilde{M}}_{ir}$（当$r>2m+i$时认为$\tilde{\widetilde{M}}_{ir}\equiv 0$）.

在$\rho=0$附近按Taylor公式展开每一个系数$a_i(\rho,\varphi)=a_i(\varepsilon t,\varphi)$：

$$a_i(\rho,\varphi)=a_i(\varphi)+\sum_{j=1}^{N}\rho^j a_{ij}(\varphi)+\rho^{N+1}a_{i,N}(\theta\rho,\varphi)$$

$$=a_i(\varphi)+\sum_{j=1}^{N}\varepsilon^j t^j a_{ij}(\varphi)+\varepsilon^{N+1}t^{N+1}a_{i,N}(\theta\varepsilon t,\varphi)$$

$$a_i(\varphi)=a_i(\rho,\varphi)\Big|_{\rho=0},\quad a_{ij}(\varphi)=\frac{1}{j!}\frac{\partial^j a_i(\rho,\varphi)}{\partial\rho^j}\Big|_{\rho=0}$$

类似地，展开算子$\varepsilon^r\widetilde{M}_r$的每一个系数$\varepsilon^r b(\rho,\varphi)$：

$$\varepsilon^r b(\rho,\varphi)=\varepsilon^r b(\varphi)+\varepsilon^r\sum_{j=1}^{N-r}\rho^j b_j(\varphi)+\varepsilon^r\rho^{N-r+1}b_{N-r}(\theta\rho,\varphi)$$

$$=\varepsilon^r b(\varphi)+\sum_{j=1}^{N-r}\varepsilon^{r+j}t^j b_j(\varphi)+\varepsilon^{N+1}t^{N+1}b_{N-r}(\theta\varepsilon t,\varphi)$$

把这些展式代入(2.3)式，我们得到

$$L_\varepsilon u_\varepsilon\equiv\varepsilon^{-2m}\left[M_0 u_\varepsilon+\sum_{r=1}^{N+1}\varepsilon^r M_r u_r\right] \tag{2.4}$$

其中

$$M_0=\sum_{i=0}^{2l}a_i(\varphi)\frac{\partial^{2m+i}}{\partial t^{2m+i}} \tag{2.5}$$

是一常微分算子，其系数关于t是一常数，算子$M_i(i<N+1)$的系数是次数$\leqslant i$的t的多项式，M_{N+1}的系数是$t^r(r\leqslant N+1)$乘上关于变量ρ、φ、ε的有界函数之和.

三、问题A_0不在谱上的情形

非摄动问题 A_0 不在谱上的情形，即齐次边值问题只有平凡解，此时非齐次边值问题均有唯一解．设非摄动问题A_0对于任意的$f(x)$有解，且当 $\varepsilon\neq 0$ 充分小时，摄动问题 A_ε 的解 u_ε 存在，在这种情形里，我们有如下的定理：

定理 1 如果1)问题A_0可解，2)问题A_ε一致可解，即它对所有充分小的ε和任意的$f(x)$都有解u_ε，并且

$$\|u_\varepsilon\|_2\leqslant c\|f(x)\|$$

其中$C>0$为不依赖于ε和$f(x)$的常数；$\|\ \|$，$\|\ \|_2$为 Бананов 范数，3)问题 A_ε 当 $\varepsilon\to 0$ 时正则退化为问题A_0，4)问题A_ε、A_0的系数、右端函数和区域边界都充分光滑，则问题 A_ε 的解u_ε有下列的渐近式：

$$u_\varepsilon=\left(u_0+\sum_{i=1}^{2l+2m}\varepsilon^i u_i\right)+\varepsilon^m\left(v_0+\sum_{i=1}^{3l+3m-1}\varepsilon^i v_i\right)+R$$

其中u_0是退化问题A_0的解，$u_i(i=1,2,\cdots,2l+2m)$由第一迭代过程得到，v_i $(i=0,1,\cdots,3l+3m-1)$是边界层函数，由第二迭代过程得到，余项$R=O(\varepsilon^{2l+2m+1})$．上面的递推过程和证明步骤与文[7]相同，这里不再重复．

四、非摄动问题A_0在谱上的情形

非摄动问题A_0在谱上的情形，即问题A_0不是对任何函数 $f(x)$ 都可解和对应于它的齐次边值问题有一个非平凡解$\bar{u}_0$．我们设问题A_ε当ε充分小时对任何 $f(x)$存在唯一的解 $u_\varepsilon(x)$，且对于某个n_1和齐次的边界条件，下列估式成立

$$\varepsilon^{n_1}\|u_\varepsilon\|_1\leqslant c\|f(x)\| \tag{4.1}$$

其中$\|\ \|_1$，$\|\ \|$是某个Бананов范数，C是常数．

下面再分两种情况进行讨论：

1．问题A_ε的连接函数不存在的情况

问题A_ε的连接函数的定义，我们将在后面给出．在这种情形里，我们先求问题 A_ε 在区域Ω内的形式渐近解为下列形式：

$$\bar{u}_\varepsilon=\frac{c_0\bar{u}_0}{\varepsilon}+(u_0+c_1\bar{u}_0)+\varepsilon(u_1+c_2\bar{u}_0)+\cdots$$
$$+\varepsilon^{2l+2m}(u_{2l+2m}+c_{2l+2m+1}\bar{u}_0)+\cdots \tag{4.2}$$

把上式代入(1.1)式比较同ε次幂的系数，得到确定$\bar{u}_0$、$u_i(i=0,1,2,\cdots)$的递推方程：

$$L_0\bar{u}_0=0 \tag{4.3}$$

$$L_0u_0=f(x)-L_1(c_0\bar{u}_0) \tag{4.4}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$L_0u_{2l+2m}=-\sum_{i=1}^{2l}L_i(u_{2l+2m-i}+c_{2l+2m+1-i}\bar{u}_0) \tag{4.5}$$

这个过程称为第一迭代过程，因为方程的阶数降低，因此，第一迭代过程所得的解一般不满足全部的边界条件(1.2)，这时在边界附近第一迭代过程的渐近展式与真解 u_ε 一般说来会有明显的误差，需要构造边界层校正项修正这种误差．我们在边界 η—邻域内构造边界层函$\bar{v}_\varepsilon$为如下形式：

$$\bar{v}_\varepsilon=\varepsilon^m\Big[\frac{c_0\bar{v}_0}{\varepsilon}+(v_0+c_1\bar{v}_0)+\varepsilon(v_1+c_2\bar{v}_0)+\cdots+\varepsilon^{2l+2m}(v_{2l+2m}+c_{2l+2m+1}\bar{v}_0)+\cdots\Big]$$

要求

$$L_\varepsilon\bar{v}_\varepsilon\equiv\Big\{\varepsilon^m\Big[\frac{c_0\bar{v}_0}{\varepsilon}+(v_0+c_1\bar{v}_0)+\cdots+\varepsilon^{2l+2m}(v_{2l+2m}+c_{2l+2m+1}\bar{v}_0)+\cdots\Big]\Big\}=0$$

把L_ε的第二分解式(2.4)代入上式，比较同ε次幂的系数，得到确定$\bar{v}_0$和 $v_i(i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$的递推方程：

$$M_0\ \bar{v}_0=0 \tag{4.6}$$

$$M_0v_0=-M_1(c_0\bar{v}_0) \tag{4.7}$$

$$M_0v_i=-\sum_{j=1}^{i}M_j(v_{i-j}+c_{i-j+1}\bar{v}_0)-M_{i+1}(c_0\bar{v}_0) \tag{4.8}$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots,2l+2m)$$

因为方程（1.1）是线性的，所以问题A_ε的解u_ε可写成如下形式：

$$u_\varepsilon=\frac{c_0\bar{v}_0}{\varepsilon}+(u_0+c_1\bar{u}_0)+\cdots+\varepsilon^{2l+2m}(u_{2l+2m}+c_{2l+2m+1}\bar{u}_0)$$

$$+\cdots+\varepsilon^m\Big[\frac{c_0\bar{v}_0}{\varepsilon}+(v_0+c_1\bar{v}_0)+\cdots+\varepsilon^{2l+2m}(v_{2l+2m}+c_{2l+2m+1}\bar{v}_0)+\cdots\Big] \tag{4.9}$$

级数（4.9）一般是渐近级数，我们只限于取具有余项R的有限和，即求 u_ε 具有以下的形式：

$$u_\varepsilon=\frac{c_0\bar{u}_0}{\varepsilon}+(u_0+c_1\bar{u}_0)+\varepsilon(u_1+c_2\bar{u}_0)+\cdots+\varepsilon^{2l+2m-1}(u_{2l+2m-1}+c_{2l+2m}\bar{u}_0)$$

$$+\varepsilon^{2l+2m}u_{2m+2l}+\varepsilon^m\Big[\frac{c_0\bar{v}_0}{\varepsilon}+(v_0+c_1\bar{v}_0)+\cdots+\varepsilon^{2l+2m-1}(v_{2l+2m-1}$$

$$+c_{2l+2m}\bar{v}_0)+\varepsilon^{2l+2m}v_{2l+2m}+R$$

把上式代入边界条件（1.2）并注意到所做的变换，我们得到

$$\frac{\partial^s u_\varepsilon}{\partial\rho^s}\Big|_{\partial\Omega_\varepsilon}\equiv\Big[\frac{c_0D_\rho^s\bar{u}_0}{\varepsilon}+D_\rho^su_0+c_1D_\rho^s\bar{u}_0+\cdots+\varepsilon^{2l+2m}D_\rho^su_{2l+2m}\Big]_{\rho=\varepsilon\alpha(\varphi)}$$

$$+\varepsilon^{m-s}\Big[\frac{c_0D_t^s\bar{v}_0}{\varepsilon}+D_t^sv_0+c_1D_t^s\bar{v}_0+\cdots+\varepsilon^{2l+2m}D_t^sv_{2l+2m}\Big]_{t=\alpha(\varphi)}$$

$$+D_\rho^sR|_{\rho=\varepsilon\alpha(\varphi)}=\psi_s[\varepsilon\alpha(\varphi),\varphi],(s=0,1,2,\cdots,l+m-1)$$

把$\psi_s[\varepsilon\alpha(\varphi),\ \varphi]$，$\bar{u}_0[\varepsilon\alpha(\varphi),\ \varphi]$和$u_i[\varepsilon\alpha(\varphi),\ \varphi]$以及它们关于变量$\rho$的导数在 $\rho=0$ 附近按Taylor公式展开，代入上式，比较ε同次幂的系数，我们得 $\bar{u}_0$、$\bar{v}_0$、u_i、v_i 应满足的边界条件：

$$D_\rho^s\bar{u}_0(0,\varphi)=0\quad(s=0,1,\cdots,m-1) \tag{4.10}$$

$$\left.\begin{aligned}&D_\rho^s u_0(0,\varphi)=\psi_s(0,\varphi),\ (s=0,1,\cdots,m-2)\\&D_\rho^{m-1}u_0(0,\varphi)=\psi_{m-1}(0,\varphi)-c_0\alpha(\varphi)D_\rho^m\bar{u}_0(0,\varphi)-c_0D_t^{m-1}\bar{v}_0[\alpha(\varphi)]\end{aligned}\right\}\tag{4.11}$$

$$\left.\begin{aligned}
u_{2l+2m}(0,\varphi)=&\frac{[\alpha(\varphi)]^{2l+2m}}{(2l+2m)!}D_\rho^{2l+2m}\psi_0(0,\varphi)\\
&-\sum_{j=0}^{2l+m+2}c_j\frac{[\alpha(\varphi)]^{2l+2m+1-j}}{(2l+2m+1-j)!}D_\rho^{2l+2m+1-j}\bar{u}_0(0,\varphi)\\
&-\sum_{j=0}^{2l+2m-1}\frac{[\alpha(\varphi)]^{2l+2m-j}}{(2l+2m-j)!}D_\rho^{2l+2m-j}u_j(0,\varphi)\\
&-v_{2l+m}[\alpha(\varphi)]-c_{2l+m+1}\bar{v}_0[\alpha(\varphi)]\\
D_\rho u_{2l+2m}(0,\varphi)=&\frac{[\alpha(\varphi)]^{2l+2m}}{(2l+2m)!}D_\rho^{2l+2m}\psi_1(0,\varphi)\\
&-\sum_{j=0}^{2l+m+3}c_j\frac{[\alpha(\varphi)]^{2l+2m+1-j}}{(2l+2m+1-j)!}D_\rho^{2l+2m+2-j}\bar{u}_0(0,\varphi)\\
&-\sum_{j=0}^{2l+2m-1}\frac{[\alpha(\varphi)]^{2l+2m-j}}{(2l+2m-j)!}D_\rho^{2l+2m+1-j}u_j(0,\varphi)\\
&-D_tv_{2l+m+1}[\alpha(\varphi)]-c_{2l+m+2}D_t\bar{v}_0[\alpha(\varphi)]\\
D_\rho^{m-1}u_{2l+2m}(0,\varphi)=&\frac{[\alpha(\varphi)]^{2l+2m}}{(2l+2m)!}D_\rho^{2l+2m}\psi_{m-1}(0,\varphi)\\
&-\sum_{j=0}^{2l+2m}c_j\frac{[\alpha(\varphi)]^{2l+2m+1-j}}{(2l+2m+1-j)!}D_\rho^{2l+3m-j}\bar{u}_0(0,\varphi)\\
&-\sum_{j=0}^{2l+2m-1}\frac{[\alpha(\varphi)]^{2l+2m-j}}{(2l+2m-j)!}D_\rho^{2l+3m+1-j}u_j(0,\varphi)\\
&-D_t^{m-1}v_{2l+2m-1}[\alpha(\varphi)]-c_{2l+2m}D_t^{m-1}\bar{v}_0[\alpha(\varphi)]
\end{aligned}\right\}\tag{4.12}$$

$$\left.\begin{aligned}&D_t^m\bar{v}_0[\alpha(\varphi)]=-D_\rho^m\bar{u}_0(0,\varphi)\\&D_t^{m+j}\bar{v}_0[\alpha(\varphi)]=0,\ (j=1,2,\cdots,l-1)\end{aligned}\right\}\tag{4.13}$$

$$\left.\begin{aligned}&D_t^m v_0[\alpha(\varphi)]=\psi_m(0,\varphi)-c_0\alpha(\varphi)D_\rho^{m+1}\bar{u}_0(0,\varphi)-D_\rho^m u_0(0,\varphi)\\&D_t^{m+1}v_0[\alpha(\varphi)]=-c_0D_\rho^{m+1}u_0(0,\varphi)\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&D_t^{l+m-1}v_0[\alpha(\varphi)]=0\end{aligned}\right\}\tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}
D_t^m v_{2l+2m}[\alpha(\varphi)]=&\frac{[\alpha(\varphi)]^{2l+2m}}{(2l+2m)!}D_\rho^{2l+2m}\psi_m(0,\varphi)\\
&-\sum_{j=0}^{2l+2m}c_j\frac{[\alpha(\varphi)]^{2l+2m+1-j}}{(2l+2m+1-j)!}D_\rho^{2l+3m+1-j}\bar{u}_0(0,\varphi)
\end{aligned}$$

$$-\sum_{j=0}^{2l+2m}\frac{[\alpha(\varphi)]^{2l+2m-j}}{(2l+2m-j)!}D_\rho^{2l+3m-j}u_j(0,\varphi)$$

$$D_t^{m+1}v_{2l+2m}[\alpha(\varphi)]=\frac{[\alpha(\varphi)]^{2l+2m-1}}{(2l+2m-1)!}\psi_{m+1}(0,\varphi)$$

$$-\sum_{j=0}^{2l+2m}c_j\frac{[\alpha(\varphi)]^{2l+2m-j}}{(2l+2m-j)!}D_\rho^{2l+3m+1-j}\bar{u}_0(0,\varphi)\qquad(4.15)$$

$$-\sum_{j=0}^{2l+2m-1}\frac{[\alpha(\varphi)]^{2l+2m-1-j}}{(2l+2m-1-j)!}D_\rho^{2l+3m-j}u_j(0,\varphi)$$

$$D_t^{l+m-1}v_{2l+2m}[\alpha(\varphi)]=\frac{[\alpha(\varphi)]^{l+2m+1}}{(l+m+1)!}D_\rho^{l+2m+1}\psi_{l+m-1}(0,\varphi)$$

$$-\sum_{j=0}^{l+2m+2}c_j\frac{[\alpha(\varphi)]^{l+2m+2-j}}{(l+2m+2-j)!}D_\rho^{2l+3m+1-j}\bar{u}_0(0,\varphi)$$

$$-\sum_{j=0}^{l+2m+1}\frac{[\alpha(\varphi)]^{l+2m+1-j}}{(l+2m+2-j)!}D_\rho^{2l+3m-j}u_j(0,\varphi)$$

$$R|_{\rho=\varepsilon\alpha(\varphi)}=\Big\{\frac{[\alpha(\varphi)]^{2l+2m+1}}{(2l+2m+1)!}D_\rho^{2l+2m+1}\psi_0[\theta\,\varepsilon\alpha(\varphi),\varphi]$$

$$-\sum_{j=0}^{2l+2m}c_j\frac{[\alpha(\varphi)]^{2l+2m+2-j}}{(2l+2m+2-j)!}D_\rho^{2l+2m+2-j}\bar{u}_0[\theta\,\varepsilon\,\alpha(\varphi),\varphi]$$

$$-\sum_{j=0}^{2l+2m}\frac{[\alpha(\varphi)]^{2l+2m+1-j}}{(2l+2m+1-j)!}D_\rho^{2l+2m+1-j}u_0[\theta\,\varepsilon\,\alpha(\varphi),\varphi]$$

$$-\sum_{j=1}^{m-1}\varepsilon^{j-1}\Big[v_{2l+m+j}[\alpha(\varphi)]+c_{2l+m+1+j}\bar{v}_0[\alpha(\varphi)]$$

$$+\varepsilon^{m-1}v_{2l+2m}[\alpha(\varphi)]\Big]\Big\}\varepsilon^{2l+2m+1}\equiv r_0(\varepsilon,\varphi)\varepsilon^{2l+2m+1}$$

$$D_\rho R|_{\rho=\varepsilon\alpha(\varphi)}=\Big\{\frac{[\alpha(\varphi)]^{2l+2m+1}}{(2l+2m+1)!}D_\rho^{2l+2m+1}\psi_1[\theta\varepsilon\,\alpha(\varphi),\varphi]$$

$$-\sum_{j=0}^{2l+2m}c_j\frac{[\alpha(\varphi)]^{2l+2m+2-j}}{(2l+2m+2-j)!}D_\rho^{2l+2m+3-j}\bar{u}_0[\theta\,\varepsilon\,\alpha(\varphi),\varphi]\qquad(4.16)$$

$$-\sum_{j=0}^{2l+2m}\frac{[\alpha(\varphi)]^{2l+2m+1-j}}{(2l+2m+1-j)!}D_\rho^{2l+2m+2-j}u_j[\theta\,\varepsilon\,\alpha(\varphi),\varphi]$$

$$-\sum_{j=2}^{m-2}\varepsilon^{j-2}\,[D_t\,v_{2l+m+j}\,(\alpha(\varphi))+c_{2l+m+1+j}\,D_t\,\bar{v}_0(\alpha(\varphi))$$

$$+\varepsilon^{m-2}v_{2l+2m}(\alpha(\varphi))]\Big\}\varepsilon^{2l+2m+1}\equiv r_1(\varepsilon,\varphi)\varepsilon^{2l+2m+1}$$

$$D_t^{l+m-1}R|_{\rho=\varepsilon\alpha(\varphi)}=\Big\{\frac{[\alpha(\varphi)]^{l+2m+2}}{(l+2m+2)!}D_\rho^{l+2m+2}\psi_{l+m-1}[\theta\varepsilon\alpha(\varphi),\varphi]$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-\sum_{j=0}^{l+2m+3}c_j\frac{[\alpha(\varphi)]^{l+2m+3+j}}{(l+2m+3+j)!}D_\rho^{2l+3m+2-j}\bar{u}_0(0,\varphi)$$

$$-\sum_{j=0}^{l+2m+2}\frac{[\alpha(\varphi)]^{l+2m+2-j}}{(l+2m+2-j)!}D_\rho^{2l+3m+1-j}u_j(0,\varphi)\Big\}\varepsilon^{l+2m+2}$$

$$\equiv r_{l+m-1}(\varepsilon,\varphi)\varepsilon^{l+2m+2}$$

现在我们来逐个地确定 $\bar{u}_0$，$\bar{v}_0$，$\bar{u}_i$，$\bar{v}_i$ $(i=0,1,\cdots,2l+2m)$. 显然，$\bar{u}_0$ 是下列齐次边值问题的特征函数：

$$L_0\bar{u}_0=0 \tag{4.3}$$

$$D_\rho^s u_0(0,\varphi)=0,\ (s=0,1,\cdots,m-1) \tag{4.10}$$

为了在边界附近建立边界层函数$\bar{v}_0$，我们研究方程(4.6)和边界条件(4.13)的问题：

$$M_0\bar{v}_0=0 \tag{4.6}$$

$$\left.\begin{aligned}&D_t^m\ \bar{v}_0[\alpha(\varphi)]=-D_\rho^m\bar{u}_0(0,\varphi)\\&D_t^{m+j}\bar{v}_0[\alpha(\varphi)]=0\quad(j=1,2,\cdots,l-1)\end{aligned}\right\} \tag{4.13}$$

方程(4.6)是常系数（关于 t）的常微分方程，它的特征方程是

$$\lambda^{2m}\sum_{i=0}^{2l}a_i(\varphi)\ \lambda^i=0$$

如果此方程具有负的实数部分的根的个数等于l，即等于问题 A_ε 退化为问题A_0时所失去的边界条件的个数，则称问题A_ε正则退化为问题A_0[3].

我们假定退化是正则的，则方程(4.6)的通解有如下形式：

$$\bar{v}_0=\sum_{i=1}^{l}c_i(\varphi)e^{-\lambda_i(\varphi)t}=\sum_{i=1}^{l}c_i(\varphi)\ e^{-\lambda_i(\varphi)\frac{\rho}{\varepsilon}}$$

其中 $c_i(\varphi)$由边界条件(4.13)确定.

继之，为了确定u_0，我们研究下列问题：

$$L_0u_0=f(x)-L_1(c_0\bar{u}_0) \tag{4.4}$$

$$\left.\begin{aligned}&D_\rho^s\ u_0(0,\ \varphi)=\psi_s(0,\varphi),(s=0,1,\cdots,m-2)\\&D_\rho^{m-1}u_0(0,\varphi)=\psi_{m-1}(0,\varphi)-c_0\ \alpha(\varphi)D_\rho^m\bar{u}_0(0,\varphi)-c_0\ D_t^{m-1}\bar{v}_0[\alpha(\varphi)]\end{aligned}\right\} \tag{4.11}$$

为了这个问题的可解性，必须满足某些补充条件，这个条件由格林公式[11]：

$$\int_\Omega L_0\ u\cdot z_0\,dx-\int_\Omega u\cdot L_0^*\ z_0\,dx=\sum_{j=0}^{m-1}\int_{\partial\Omega_0}s_j\,u\cdot G_j\ z_0\,d\varphi+\sum_{j=0}^{m-1}\int_{\partial\Omega_0}B_j\cdot u\cdot T_j\ z_0\,d\varphi$$

得到，其中z_0是下列齐次共轭边值问题：

$$L_0^*z_0=0 \tag{4.17}$$

$$G_j\ z_0|_{\partial\Omega_0}=0 \tag{4.18}$$

的特征函数和$B_j(j=0, 1, \cdots, m-1)$是边界算子，我们假定B_j满足狄立克雷条件：

$B_j=\frac{\partial^j}{\partial\rho^j}$，这样的$B_j$在一定的条件下是存在的，它在文[11]中已指出.

把(4.4)、(4.11)、(4.17)、(4.18)式代入格林公式得

$$\int_\Omega (f(x)-L_1c_0\bar{u}_0)z_0\,dx=\sum_{j=0}^{m-1}\int_{\partial\Omega_0}\psi_j(0,\varphi)\ T_j\ z_0\ d\varphi$$
$$-c_0\int_{\partial\Omega_0}\left\{\alpha(\varphi)D_\rho^m\bar{u}_0(0,\varphi)+D_t^{m-1}\bar{v}_0[\alpha(\varphi)]\right\}T_{m-1}z_0\,d\varphi \tag{4.19}$$

为了对任意函数$f(x)$可以满足（由于选择c_0而得的）这个条件，当且仅当c_0的系数不等于零，即

$$M=\int_\Omega L_1\bar{u}_0\ z_0\,dx-\int_{\partial\Omega_0}[\alpha\ (\varphi)\ D_\rho^m\bar{u}_0(0,\varphi)-D_t^{m-1}\bar{v}_0(\alpha(\varphi))T_{m-1}\ z_0]d\varphi\neq 0 \tag{4.20}$$

如果这个条件成立，则从(4.19)得到

$$c_0=\frac{1}{M}\left[\int_\Omega f(x)z_0\,dx-\sum_{j=0}^{m-1}\int_{\partial\Omega_0}\psi_j(0,\varphi)\,T_j\ z_0\,d\varphi\right]$$

求出c_0后，我们就可以从问题(4.4)，(4.11)中定出满足附加条件

$$\int_\Omega u_0\ \bar{u}_0\ dx=0$$

的特解u_0. 然后，我们再确定如下的边界层函数：

$$M_0\ v_0=-M_1\ c_0\ \bar{v}_0 \tag{4.7}$$

$$\left.\begin{array}{l}D_t^m v_0[\alpha(\varphi)]=\psi_m(0,\varphi)-c_0\ \alpha(\varphi)D_\rho^{m+1}\bar{u}_0(0,\varphi)-D_\rho^m\ u_0(0,\varphi)\\ D_t^{m+1}v_0[\alpha(\varphi)]=-c_0\ D_\rho^{m+1}u_0(0,\varphi)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ D_t^{l+m-1}v_0[\alpha(\varphi)]=0\end{array}\right\} \tag{4.14}$$

其中$\bar{v}_0$、$\bar{u}_0$、c_0都是前面已经确定了的，因此，我们可以求出边界层函数v_0为下面形式：

$$v_0=v_0^*+\sum_{j=1}^{l}\ c_{j,0}(\varphi)e^{-\lambda_j t}=\sum_{j=0}^{l}P_{j,0}(t,\varphi)e^{-\lambda_j t}$$

其中v_0^*是常系数非齐次常微分方程(4.7)的特解，

比如说可以用选择系数法求得，而第二项是齐次方程的通解，$P_{j,0}(t,\varphi)$是t的多项式.

设我们已经确定了c_i，u_i，v_i（$i\leqslant 2l+2m-1$），我们再由方程(4.5)和边界条件(4.12)的问题中求出c_{2l+2m}和u_{2l+2m}，由这个问题的可解性条件

$$\int_\Omega\left[-\sum_{i=1}^{2l}\ L_i(u_{2l+2m-i}+c_{2l+2m+1-i}\ \bar{u}_0)\right]z_0\ dx$$

$$=\sum_{j=0}^{m-1}\int_{\partial\Omega_0}D_\rho^j u_{2l+2m}\ (0,\varphi)\ T_j\ z_0\ d\varphi$$

中求出c_{2l+2m}为下面形式

$$c_{2l+2m}=\frac{1}{M}\Big\{\int_{\Omega}\Big[-L_1 u_{2l+2m-1}-\sum_{i=2}^{2l}L_i(u_{2l+2m-i}+c_{2l+2m+1-i}\bar{u}_0)\Big)\Big]z_0\,dx$$

$$-\sum_{j=0}^{m-2}\int_{\partial\Omega_0}D_\rho^j\ u_{2l+2m}\ (0,\ \varphi)\ T_j\ z_0\ d\varphi$$

$$-\int_{\partial\Omega_0}\Big[\frac{(\alpha(\varphi))^{2l+2m}}{(2l+2m)!}D_\rho^{2l+2m}\ \psi_{m-1}\ (0,\varphi)$$

$$+\sum_{j=0}^{2l+2m-1}c_j\ \frac{[\alpha(\varphi)]^{2l+2m+1-j}}{(2l+2m+1-j)!}D_\rho^{2l+3m-j}\,\bar{u}_0(0,\varphi)$$

$$+\sum_{j=0}^{2l+2m-1}\frac{[\alpha(\varphi)]^{2l+2m-j}}{(2l+2m-j)!}D_\rho^{2l+3m+1-j}\ u_j(0,\varphi)$$

$$+D_t^{m-1}\ v_{2l+2m-1}[\alpha(\varphi)]T_{m-1}\ z_0 d\varphi$$

其中

$M=\int_\Omega L_1u_0z_0dx+\int_{\partial\Omega_0}\alpha(\varphi)D_\rho^m\bar{u}_0(0,\varphi)+D_t^{m-1}\bar{v}_0[\alpha(\varphi)]T_{m-1}z_0d\varphi\neq 0$ 求出 C_{2l+2m} 以后，我们再从方程（4.5）和边界条件（4.12）的问题中求出满足条件

$$\int_\Omega u_{2l+2m}\,\bar{u}_0dx=0$$

的特解 u_{2l+2m}.

继之，从方程（4.8）和边界条件（4.15）的问题中求出边界层函数为下列形式

$$v_{2l+2m}=\sum_{j=1}^{l}P_{j,2l+2m}(t,\varphi)e^{-\lambda_j t}$$

其中 $P_{j,2l+2m}(t,\varphi)$ 为 t 的多项式.

函数v_i ($i=0$, 1, …) 只是在边界η—邻域内有定义，为了得出在整个区域Ω 有定义的边界层函数，把它们乘上平滑函数$\Phi(\rho-\varepsilon\alpha(\varphi))\in c^\infty(\Omega)$，当 $\rho-\varepsilon\alpha(\varphi)>\frac{2\eta}{3}$ 时，$\Phi(\rho-\varepsilon\alpha(\varphi))=0$，当 $\rho-\varepsilon\alpha(\varphi)<\frac{\eta}{3}$时，$\Phi(\rho-\varepsilon\alpha(\varphi))=1$，$0\leqslant\Phi(\rho-\varepsilon\alpha(\varphi))\leqslant 1$，($0\leqslant\rho-\varepsilon\alpha(\varphi)\leqslant\eta$)，我们把乘积 $\Phi(\rho-\varepsilon\alpha(\varphi))v_i$ 仍表为 v_i.

最后，我们对余项进行估计，以R表示边值问题A_ε的真解与形式渐近解的余项：

$$R=u_\varepsilon-\Big[\frac{c_0\bar{u}_0}{\varepsilon}+(u_0+c_1\bar{u}_0)+\cdots+\varepsilon^{2l+2m-1}(u_{2l+2m-1}+c_{2l+2m}\bar{u}_0)+\varepsilon^{2l+2m}u_{2l+2m}$$

$$-\varepsilon^m\Big[\frac{c_0\bar{v}_0}{\varepsilon}+(v_0+c_1\bar{v}_0)+\cdots+\varepsilon^{2l+2m-1}(v_{2l+2m-1}+c_{2l+2m}\bar{v}_0)+\varepsilon^{2l+2m}v_{2l+2m}$$

我们有

$$L_\varepsilon R=L_\varepsilon u_\varepsilon-\Big[\sum_{i=1}^{2l}\varepsilon^i L_i+L_0\Big]\Big[\frac{c_0\bar{u}_0}{\varepsilon}+(u_0+c_1\bar{u}_0+\cdots+\varepsilon^{2l+2m}u_{2l+2m}-\varepsilon^{-m}\Big(M_0$$

$$+\sum_{i=1}^{2l+2m}\varepsilon^i M_i\Big)\Big[\frac{c_0\bar{v}_0}{\varepsilon}+(v_0+c_1\bar{v}_0)+\varepsilon(v_1+c_2\bar{v}_0)+\cdots+\varepsilon^{2l+2m}v_{2l+2m}\Big]$$

$$=f(x)-f(x)-\varepsilon^{2l+2m+1}\Big[L_1u_{2l+2m}+\sum_{i=2}^{2l}L_i(u_{2l+2m+1-i}+c_{2l+2m+2-i}\bar{u}_0)$$

$$+\varepsilon L_2u_{2l+2m}+\sum_{j=3}^{2l}L_j(u_{2l+2m+2-j}+c_{2l+2m+3-j}\bar{u}_0)+\cdots+\varepsilon^{2l-1}L_{2l}u_{2l+2m}\Big]$$

$$-\varepsilon^{2l+m+1}\Big[M_1v_{2l+2m}+\sum_{i=2}^{2l+2m}M_i(v_{2l+2m+1-i}+c_{2l+2m+2-i}\bar{v}_0)+\varepsilon M_2v_{2l+2m}$$

$$+\sum_{j=3}^{2l+2m}M_j(v_{2l+2m+2-j}+c_{2l+2m+3-j}\bar{v}_0)\Big]$$

$$=-(\bar{u}_{2l+2m}+\bar{v}_{2l+2m})\varepsilon^{2l+2m+1}$$

以R_1表示具有$2l+2m$阶的导数的有界函数，且满足边界条件（4.16），例如，可以设

$$R_1=\Phi(\rho-\varepsilon\alpha(\varphi))[r_0(\varepsilon,\varphi)\varepsilon^{2l+2m+1}+(\rho-\varepsilon\alpha(\varphi))r_1(\varepsilon,\varphi)\varepsilon^{2l+2m+1}+\cdots$$

$$+\frac{(\rho-\varepsilon\alpha(\varphi))^{l+m-1}}{(l+m-1)!}r_{l+m-1}(\varepsilon,\varphi)\varepsilon^{l+2m+2}]$$

$$0\leqslant\rho-\varepsilon\alpha(\varphi)\leqslant\eta$$

则$R_1=O(\varepsilon^{l+2m+2})$，这时

$$R=R_1+R_2 \tag{4.20$'$}$$

其中R_2是下列方程的解

$$L_\varepsilon R_2=-(\bar{u}_{2l+2m}+\bar{v}_{2l+2m}+L_\varepsilon R_1)\varepsilon^{l+m+1+\min(l,m+1)}$$

$$D_\rho^s R|_{\rho=\varepsilon\alpha(\varphi)}=0,\quad (s=0,1,\cdots,l+m-1)$$

因此，根据估式（4.1）得

$$\varepsilon^{n_1}\|R_2\|_1\leqslant M_0\varepsilon^{l+m+1+\min(l,m+1)}$$

即

$$\|R_2\|_1\leqslant M_0\varepsilon^{l+m+1+\min(l,m+1)-n_1}$$

再从（4.20)$'$式得

$$\|R\|_1\leqslant\|R_1\|_1+\|R_2\|_1\leqslant M_1\varepsilon^{l+2m+2}+M_0\varepsilon^{l+m+1+\min(l,m+1)-n_1}$$

$$=O(\varepsilon^{l+m+1+\min(l,m+1)-n_1})$$

由此，我们得到下面定理：

定理2 如果 1）$\lambda=0$是退化算子L_0的特征值，即齐次边值问题 $L_0\bar{u}_0=0$，$D_\rho^s\bar{u}_0(0,\varphi)=0$，$(s=0,1,\cdots,m-1)$ 有一个非平凡解$\bar{u}_0$且没有关于问题A_ε的$\bar{u}_0$的连接函数；2）对于充分小的ε和任意的$f(x)$，问题A_ε有唯一的解u_ε，同时对某个n_1和齐次边界条件估式（4.1）成立；3）问题A_ε正则退化为问题A_0；4）问题A_ε、A_0的系数、右端函数及区域边界都充分光

滑；5)格林公式中的边界算子B_j满足狄立克雷条件：

$$B_j=\frac{\partial^j}{\partial\rho^j}(j=0,\ 1,\ \cdots,\ m-1)$$

则摄动问题A_ε的解u_ε可按如下的ε次幂展开：

$$u_\varepsilon=\left[\frac{c_0\bar{u}_0}{\varepsilon}+(u_0+c_1\bar{u}_0)+\cdots+\varepsilon^{2l+2m}u_{2l+2m}\right]+\varepsilon^m\left[\frac{c_0\bar{v}_0}{\varepsilon}\right.$$

$$\left.+(v_0+c_1\bar{v}_0)+\cdots+\varepsilon^{2l+2m}v_{2l+2m}\right]+R$$

其中$\bar{u}_0$是齐次边值问题的特征函数，$u_i(i=0,1,\cdots,2l+2m)$从第一迭代过程得到，$\bar{v}_0$和$\bar{v}_j(j=0,1,\cdots,2l+2m)$由第二迭代过程得到，$c_k$（$k=0,\ 1,\ \cdots,\ 2l+2m$）是由可解性条件确定的常数，余项$R=O(\varepsilon^{l+m+1+\min(l,m+1)-n_1})$.

2．问题A_ε的连接函数存在的情况

现在假定条件（4.20）不成立，这时问题A_ε的解u_ε的渐近式将找到为如下形式：

$$u_\varepsilon=\frac{c_0\bar{u}_0}{\varepsilon^k}+\frac{c_0\bar{u}_1+c_1\bar{u}_0}{\varepsilon^{k-1}}+\cdots+\frac{c_0\bar{u}_{k-1}+\cdots+c_{k-1}\bar{u}_0}{\varepsilon}+[u_0+(c_1\bar{u}_{k-1}+\cdots$$

$$+c_k\bar{u}_0)+\cdots+\varepsilon^s[u_s+(c_{s+1}\bar{u}_{k-1}+\cdots+c_{k+s}\bar{u}_0)]+\cdots+\varepsilon^m\left\{\frac{c_0\bar{v}_0}{\varepsilon^k}+\frac{c_0\bar{v}_1+c_1\bar{v}_0}{\varepsilon^{k-1}}\right.$$

$$+\cdots+\frac{c_0\bar{v}_{k-1}+\cdots+c_{k-1}\bar{v}_0}{\varepsilon}+[v_0+(c_1\bar{v}_{k-1}+\cdots+c_k\bar{v}_0)]+\cdots+\varepsilon^s[v_s+(c_{s+1}\bar{v}_{k-1}$$

$$\left.+\cdots+c_{k+s}\bar{v}_0)]+\cdots\right\}\tag{4.21}$$

其中c_i，$\bar{u}_i$，u_i，$\bar{v}_i$，v_i的求法同前面类似，如果问题的参数充分光滑，则所有这些项都能逐步求得.

我们指出，系数c_0是在第k步以后遇到，在确定函数u_0时同时确定.

现在我们可以给出连接函数的定义：

定义　我们称函数$\bar{u}_1$，$\bar{u}_2$，$\cdots$，$\bar{u}_{k-1}$为关于特征函数$\bar{u}_0$的连接函数，而函数$\bar{v}_0$，$\bar{v}_1$，$\cdots$，$\bar{v}_{k-1}$为关于问题A_ε的$\bar{u}_0$的连接边界层.

定理3　设当$\varepsilon\neq0$充分小、方程（1.1）的系数和右边部分充分光滑时问题A_ε可解，且对于某个n_1和齐次的边界条件估式（4.1）成立. 此外，设非摄动问题A_0在谱上，同时对应的齐次边值问题为简单起见，只有一个特征函数$\bar{u}_0$，有$\bar{u}_0$的连接函数，且问题A_ε正则退化为问题A_0和边界算子B_j满足狄立克雷条件：$B_j=\dfrac{\partial^j}{\partial\rho^j}$，则对于问题$A_\varepsilon$的解$u_\varepsilon$来说渐近展式(4.21)是正确的. 其中$\bar{u}_1$，$\bar{u}_2$，$\cdots$，$\bar{u}_{k-1}$是关于问题$A_\varepsilon$的$\bar{u}_0$的连接函数，而$\bar{v}_0$，$\bar{v}_1$，$\cdots$，$\bar{v}_{k-1}$是连接边界层，常数$c_i$和函数$u_i$，$v_i$等类似于前面的方法确定.

参 考 文 献

1. Timoshenko, S., Woinowsky-Krieger, S., Theory of Plates and Shells 2nd ed., N. Y. McGraw-Hill(1959).
2. Rutten, H. S., "Theory and Design of Shells on the Basis of Asymptotic Analysis" Holland(1973).
3. Вишик М. И. и Люстерник, Л. А., Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром, УМН, 12, вып. 5, (1957).
4. Вишик М. И. и Люстерник, Л. А., Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосапряж.нных и несамосопряжённых дифференциальных уравнений I УМН 15 вып. 3 (1960).
5. Линь Цзун-чи (林宗池). Возмущение решений и возмущение собственных значений и собственных функций эллиптических уравнений второго порядка при возмущении границы ДАН СССР, том 157, №4, 784—787(1964).
6. Линь Цзун-чи (林宗池). Асимптотика решений линейных дифференциальных уравнений при сочетаний возмущения границы с возмущением оператора, УМН, Т. XIX, вып. 5, (1964).
7. 林宗池，在边界和算子摄动相结合的情况下高阶椭圆型方程解的渐近式（上），福建师大学报，（自然科学版）第二期，(1979).
8. Besjes, J. G., Singular perturbation problems for linear elliptic differential operators of arbitrary order, J. Math. and appl. Vol 49—50. (1975) 24—41.
9. Вишик М. И., О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений. Матем сб. 29(1951). 615—676.
10. Гусева. О. В., О краевых задачах для сильно эллиптических систем. ДАН. 102. №6(1955), 1069—1072.
11. Lions. J. L. and Magenes, E., Non-Homogeneous Boundary value problem and Applications. Springerverlag, New York, Heideberg Berlin(1972).

ЗАДАЧА ДИРИХЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРВНЕНИЯ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА ДЛЯ ДВОИХ ВОЗМУЩЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА И ГРАНИЦЫ

Линь цзун чи

(фучжоу математический факультет фуцзяньского педагагического университета)

КОНСПЕКТ

В настоящей статье рассмотрено построение асимптотики решений эллиптического уравнения высшего порядка при сочтании возмущения границы с возмущением оператора. Если невозмущённая задача A_0 не находится на спектре, то асимптотическое решение возмущённой задачи A_ε разложено по степеням малого параметра ε; если A_0 находится на спектре, то в асимптотическом решении A_ε появляются члены отрицательных степеней малого параметра ε; причём заданы оценки соответствующих остальных членов.