

文章编号: 1000-0887(2005) 01-0032-08

# 三阶 WNND 格式的构造及在 复杂流动中的应用\*

刘 伟<sup>1</sup>, 赵海洋<sup>1</sup>, 谢昱飞<sup>2</sup>

(1. 国防科技大学 航天与材料工程学院, 长沙 410073;

2. 中国空气动力研究与发展中心, 四川 绵阳 621000)

(张涵信推荐)

摘要: 引入 Liu 的加权(weight)思想, 在 NND 格式的二阶模板基础上, 构造了空间三阶精度的 WNND 格式. 通过对线性波动方程、一维 Euler 方程和三维 Navier-Stokes 方程的数值模拟表明: WNND 格式在不增加模板插值点的前提下, 在对各种间断的分辨率和收敛特性等方面均优于 NND 格式. 采用 WNND 格式对升力体外形高超声速流场数值模拟表明: 升力体外形三维流场结构十分复杂, 攻角从  $0^\circ \sim 50^\circ$  变化时, 背风面表面极限流线依次由不分离、开式分离向起始于鞍、结点组合的高阶奇点的分离方式转化, 翼面横向分离亦随攻角增大而增大; 垂直于体轴的横截面流动拓扑结构与张涵信给出的理论分析一致, 大于  $20^\circ$  攻角后, 在部分横截面背风对称线上出现结构不稳定的鞍点相连现象.

关键词: 高阶格式; 数值模拟; 拓扑结构; 表面极限流线; N-S 方程; WNND 格式  
中图分类号: V211.3 文献标识码: A

## 引 言

现代航空、航天技术的发展对计算流体力学提出了更高的要求, 在一些复杂问题的应用中, 对高阶精度格式(三阶以上)的需求愈发迫切. 譬如: 在采用大涡模拟(LES)或直接数值模拟(DNS)的方法研究具有多种尺度的湍流问题时, 至少需要三阶或四阶以上精度的格式; 在采用二阶精度格式研究具有分离、漩涡等复杂流动时, 由于网格尺度对流动拓扑形态的影响, 往往需要生成结点数目巨大的网格, 而分析表明<sup>[1]</sup>: 采用高阶格式可以放宽对网格数的苛刻要求, 减少计算工作量; 此外, 对一些涉及诸如航空声学、热流、摩阻及非定常流动问题(要满足频谱控制原则)的计算也需要采用高精度格式. 目前, 国内外对高精度算法的研究方兴未艾, 提出了包括 ENO、WENO、ENN、紧致格式及谱方法等各种算法. 但不可否认, 相对 TVD 格式, 上述高精度算法仍不成熟, 如在边界处理、方程变换系数的高精度算法、鲁棒性, 以及在复杂问题的应用等方面仍有许多不足, 尚需做进一步的研究.

在高精度算法研究中, Liu 和 Osher<sup>[2]</sup>提出的 WENO 算法由于将 ENO 格式自适应选取插值

\* 收稿日期: 2004\_01\_08; 修订日期: 2004\_09\_30

基金项目: 国家自然科学基金(重大)资助项目(90205013)

作者简介: 刘伟(1965—), 男, 湖南长沙人, 副教授, 博士(联系人, Tel: + 86\_731\_4576131; Fax: + 86\_731\_4512301; E\_mail: fishfather6525@sina.com)

模板改进为对所有相关插值模板上的插值函数加权计算,在计算精度、并行效率及抑制虚假波动(类 Gibbs 现象)等方面均较 ENO 格式得到较大改进。事实上,应用 Liu 的加权思想,采用不同的模板插值方法,可以构造出不同的高阶加权型格式。本文即在张涵信提出的 NND 格式<sup>[3]</sup>模板基础上,构造出加权型三阶 WNND 格式,对半离散型标量方程分析表明,该格式是一种偏迎风型格式,在和 NND 格式涉及插值点数相同的情况下(都是五点格式),空间精度提高了一阶(光滑区三阶,激波附近二阶)。

做为验证算例,本文采用 WNND 格式数值求解了线性波动方程、一维 Euler 方程、三维 Navier-Stokes 方程。最后数值模拟了升力体外形高超声速粘性绕流,给出了  $0^\circ \sim 50^\circ$  攻角变化时的流动拓扑结构,包括表面极限流线和横截面流线的拓扑形态。要指出的是,文献[4]从理论上分析当对称面附近存在分离泡时,对称子午线上两个奇点可能存在:结点\_结点、鞍点\_结点、结点\_鞍点、鞍点\_鞍点四种形态,但对钝锥的数值模拟只给出了结点\_结点形态。本文对升力体外形的数值模拟发现:当攻角为  $30^\circ$  时,对称子午线上两个奇点为结点\_结点形态,而当攻角为  $40^\circ$ 、 $50^\circ$  时,则呈现为鞍点\_结点形态,进一步验证了文献[4]的理论分析结论。

## 1 WNND 格式的构造

下面以一维双曲型方程(1)说明 WNND 格式的构造过程。所采用的基础格式为文献[5]给出的迎风型 NND 格式。

$$\partial U / \partial t + \partial F / \partial x = 0, \quad (1)$$

方程(1)采用空间三阶精度的 WNND 格式的半离散形式为:

$$\left( \partial U / \partial t \right)_i = -1 / \Delta x (F_{i+1/2} - F_{i-1/2}), \quad (2)$$

式中:

$$F_{i+1/2} = 1/2(F_i + F_{i+1}) + 1/2(A_{i+1/2}^+ H_{i+1/2}^L - A_{i+1/2}^- H_{i+1/2}^R).$$

$$H_{i+1/2}^L = -\Delta U_{i+1/2} + \omega_1^+ \Delta_{i-1/2} U + \omega_0^+ \Delta_{i+1/2} U,$$

$$H_{i+1/2}^R = -\Delta U_{i+1/2} + \omega_1^- \Delta_{i+1/2} U + \omega_0^- \Delta_{i+3/2} U.$$

加权系数  $\omega_i^\pm = \alpha_i^\pm \left( \sum_{j=0}^1 \alpha_j^\pm \right)$ ,  $\alpha_i^\pm = \frac{c_i^\pm}{(\varepsilon + IS_i^\pm)^2}$  ( $i = 0, 1$ ),  $\varepsilon$  为避免分母为零的常数,一般取  $10^{-5}$  到  $10^{-8}$  之间,本文取为  $10^{-6}$ ,系数  $c_0^+ = 2/3$ ,  $c_1^+ = 1/3$ ;  $c_0^- = 1/3$ ,  $c_1^- = 2/3$ 。  $IS_0^\pm, IS_1^\pm$  为网格模板的光滑度量系数,定义为

$$IS_1^+ = (U_{j-1} - U_j)^2, \quad IS_0^+ = (U_{j+1} - U_j)^2,$$

$$IS_1^- = (U_{j+1} - U_j)^2, \quad IS_0^- = (U_{j+2} - U_{j+1})^2.$$

事实上,在标量情况下,对半离散型的 WNND 格式分析表明:在光滑区,其空间差分近似于偏迎风型五点格式,即

$$\left\{ \partial F^+ / \partial x \right\}_i = (2F_{i+1}^+ + 3F_i^+ - 6F_{i-1}^+ + F_{i-2}^+) / (6\Delta x) + O(\Delta x^3),$$

$$\left\{ \partial F^- / \partial x \right\}_i = (-F_{i+2}^- + 6F_{i+1}^- - 3F_i^- - 2F_{i-1}^-) / (6\Delta x) + O(\Delta x^3),$$

在激波附近,由于权系数的控制,空间精度为二阶。和二阶 NND 格式相比,WNND 格式涉及空间插值点数相同(五点),但空间精度提高了一阶。

对定常流动:为提高计算效率,时间部分采用  $\Delta$  型的 ADI(Alternating Direction Implicit) 形式的隐式方法求解。对非定常流动:为提高非定常计算时间部分的离散精度,可采用具有 TVD 性质的三阶 Runge-Kutta 法进行离散。

## 2 验证算例

### 算例 1 数值求解线性波动方程

方程形式:  $u_t + u_x = 0, x \in [-1, 1], t = 0$  时

$$u_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}[G(x, \beta, z - \delta) + G(x, \beta, z + \delta) + 4G(x, \beta, z)] & -0.8 \leq x \leq 0.6, \\ 1 & -0.4 \leq x \leq 0.2, \\ 1 - |10(x - 0.1)| & 0 \leq x \leq 0.2, \\ \frac{1}{6}[F(x, \alpha, a - \delta) + F(x, \alpha, a + \delta) + 4F(x, \alpha, a)] & 0.4 \leq x \leq 0.6, \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

其中

$$G(x, \beta, z) = e^{-\beta(x-z)^2}, F(x, \alpha, a) = \sqrt{\max(1 - \alpha^2(x-a)^2, 0)}, \\ \alpha = 0.5, z = -0.7, \delta = 0.005, \alpha = 10, \beta = \lg(2/36\delta^2).$$

上式代表向右移动的一个包括 Gaussians 波、方波、尖三角波和半椭圆波的组合波形。图 1 给出了  $t = 2$  时, NND、WNN D 格式计算结果与解析解的比较, 计算网格数为 400, 给定周期性边界条件。两种差分格式的计算结果与理论值的趋势相同, 但三阶 WNN D 格式不管是在间断点、极值点还是在光滑区, 给出的结果都较二阶 NND 格式有不同程度的提高。

### 算例 2 黎曼问题求解

本算例为黎曼问题中经常用来考核格式的 Sod 问题。控制方程为一维 Euler 方程。初始条件为

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (1, 0, 1) & 0 \leq x \leq 0.5, \\ (0.125, 0, 0.1) & 0.5 < x \leq 1.0 \end{cases}$$

图 2 给出了 NND、WNN D 的计算结果和解析解的比较,  $t = 0.2$ , 计算网格点数为 50。从图中可以看出, 两种计算方法都能够有效地模拟激波、膨胀波及接触间断等流动现象, 但三阶精度的 WNN D 格式对膨胀波和接触间断的计算结果好于 NND 格式。

### 算例 3 三维球头绕流

控制方程为三维全 N\_S 方程, 采用本文构造的 WNN D 格式离散对流项, 粘性项采用中心差分离散。来流马赫数  $M_\infty = 7.0$ 。入口为来流条件, 出口采用外推法处理, 壁面给定法向压力零梯度条件。图 3 为 WNN D 格式和 NND 格式的壁面压强计算结果与 Lyubimov<sup>[6]</sup> 结果的比较, 图 4 为 WNN D 和 NND 格式所计算的等马赫线图。比较可知, WNN D 格式和 NND 格式压强计算结果基本一致, 但 WNN D 格式对激波捕捉分辨率相对高一些。图 5 为 NND、WNN D 格式的密度残值收敛曲线 ( $Res = \lg|\partial \rho / \partial t|_{\max}$ ), 易见 WNN D 格式的收敛特性强于 NND 格式, 残值可多降 2~3 个量级。

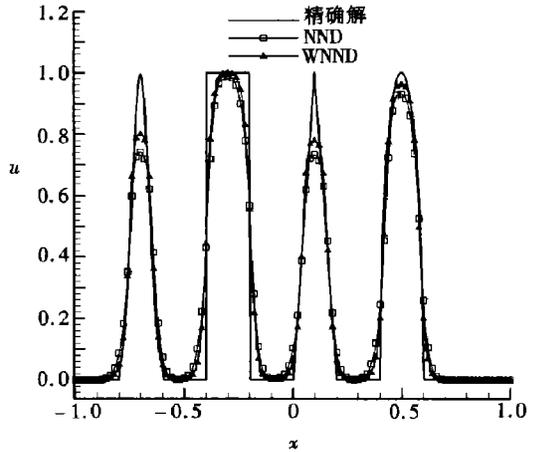


图 1 线性波动方程计算结果比较

从上述线性波动方程、Euler 方程及 N\_S 方程的数值结果可以看出: 在 NND 格式模板上采

用加权(weight)思想构造的 WNND 格式形式简单,在不增加插值点的基础上提高了计算精度(三阶),在激波、膨胀波及接触间断的分辨率和收敛特性方面均优于二阶精度的 NND 格式。

下面采用 WNND 格式研究高超声速粘性流场的拓扑结构。

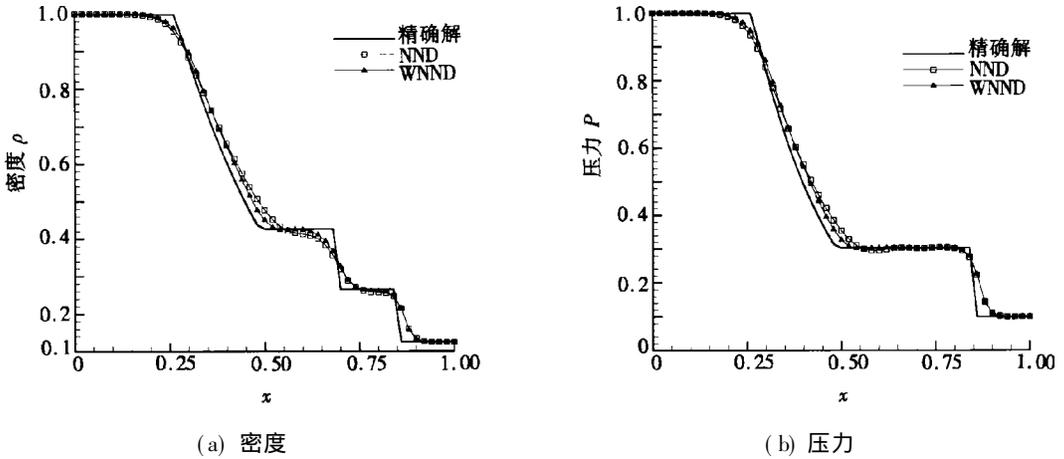


图 2 Sod 问题计算结果比较(50 个网络点)

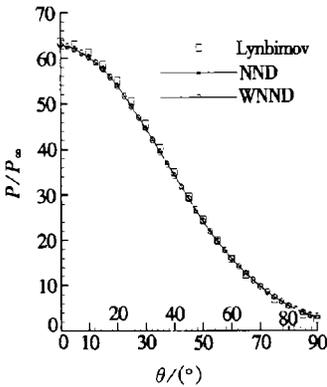


图 3 壁面压强分布

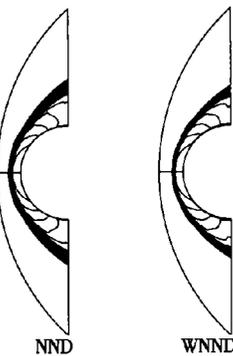


图 4 马赫数等值线图

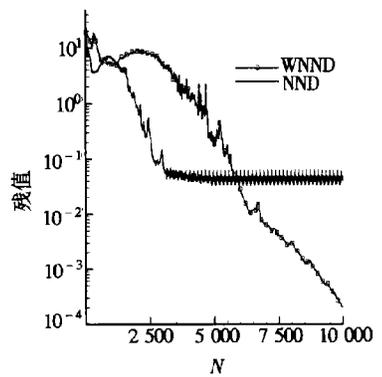


图 5 残值收敛曲线比较

### 3 升力体外形粘性绕流拓扑结构研究

涉及流动分离和旋涡运动的流场结构分析理论在上世纪八九十年代取得了不少进展,特别是张涵信<sup>[7,8]</sup>在流动分离的识别和定性描述、横截面(垂直于体轴或垂直于物面)流态拓扑结构分析,以及旋涡沿涡轴的分叉演变规律等方面的系统研究成果对揭示流动机理和发现新的物理规律起重要的指导作用。

本节数值模拟升力体外形的高超声速绕流。升力体外形由球冠接长轴相同、短轴不同的椭圆面组成。迎风面、背风面及侧面母线与体轴夹角分别为  $3^\circ$ 、 $10^\circ$ 、 $15^\circ$ ;机翼后掠角为  $55^\circ$ ;全长为 16 倍头部半径。其三维空间网格通过求解抛物化的椭圆型方程生成,采用 ADI 形式的隐式 WNND 格式求解全 NS 方程。计算条件为  $M = 8$ ,  $\alpha = 0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 50^\circ$ ,  $Re = 2 \times 10^6$ , 等温壁,层流态,计算网格数为  $135 \times 101 \times 61$ (流向  $\times$  周向  $\times$  径向)。通过对表面极限流线和垂直于体轴的横截面流线的计算分析,特别是背风面分离起始点附近的流动分析,研究了升力体外形高超声速流场拓扑结构。

#### 3.1 表面极限流线

图6为攻角从 $0^\circ \sim 50^\circ$ 变化时升力体外形背风面表面极限流线变化过程。从图中可看出,在 $0^\circ$ 攻角时背风面没有出现明显的分离现象;当攻角增大到 $10^\circ$ 时,上翼面和背风面开始产生横向分离,其中背风面的分离属于起始于正常点的开式分离结构,但还没有二次分离现象产生;攻角到 $20^\circ$ 时,上翼面横向分离区增大,同时发生二次分离,其主分离线、二次分离线及二次附着线十分清晰,背风面的分离仍属于开式分离结构;当攻角继续增大到 $30^\circ$ 时,翼面上横向分离区进一步增大,背风面除主分离线外,二次分离线及二次附着线在后体开始趋于模糊。对于三维分离线起始点形态的研究是分离流中较为复杂的问题之一,但其性质是控制三维分离类型和分离特性的主要因素。对本例来说, $30^\circ$ 攻角时的分离形态已属于起始于鞍、结点组合的高阶奇点的分离结构,从图中可以看到,分离起始点是由两个鞍点 $S$ 和一个分离型结点 $N$ 组成的鞍点型( $S\_N\_S$ )高阶奇点。此外,在分离型结点 $N$ 下游还有一个附着型结点 $N$ ,在两个结点之间形成纵向分离区,这一点可从图7对称面流线图清晰看出。当攻角增大到 $40^\circ$ 时,除上翼面分离区进一步增大外,背风面二次分离结构向头部延伸,而后体二次分离线及二次附着线模糊部分进一步增大,而头部分离起始点处的表面拓扑结构也发生较大变化,此时的分离形态则属于起始于两个分离型螺旋结点 $N$ 和一个鞍点 $S$ 组合的高阶奇点(为 $N\_S\_N$ 结点型高阶奇点)的分离结构,主分离线上呈现出鞍、结点交错分布的形态,这和文献[8]的理论分析结论是一致的,此时,背风面同样存在纵向分离区; $50^\circ$ 攻角时,除上翼面分离区大小基本不再变化外,其余结构与 $40^\circ$ 攻角时基本相同。

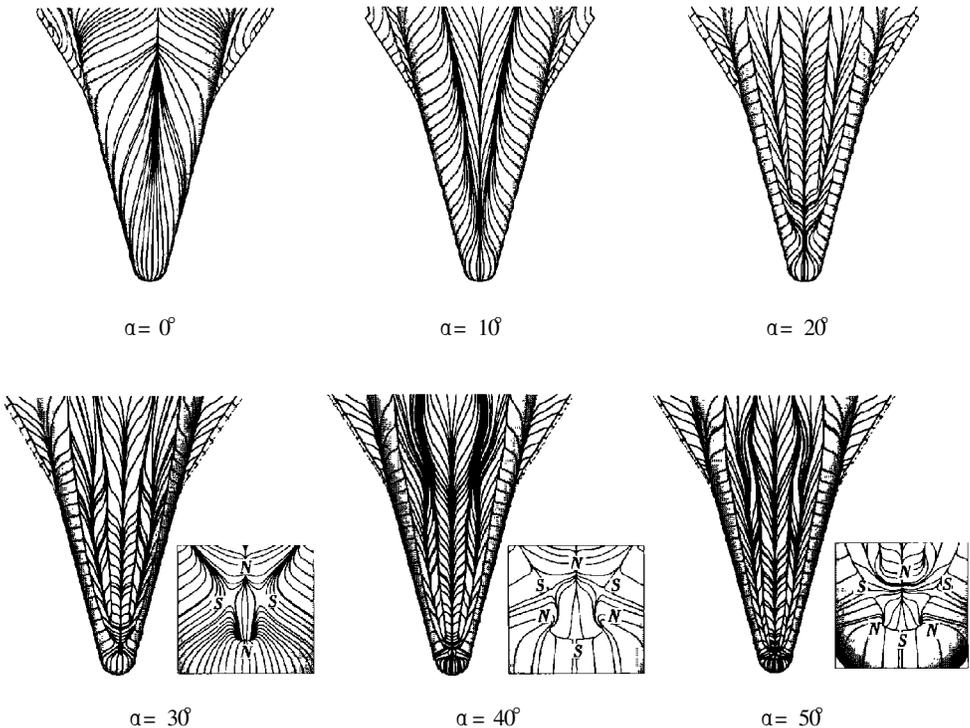


图6 升力体外形表面极限流线( $0^\circ \sim 50^\circ$ 攻角)

在这里要着重指出的是,文献[4]在理论上分析当对称面附近存在分离泡时,对称子午线上两个奇点可能存在4种形态(结点\_结点、鞍点\_结点、结点\_鞍点、鞍点\_鞍点),但对钝锥的数值模拟仅给出了结点\_结点形态。而从本文对升力体外形的数值模拟可以看到:当攻角为 $30^\circ$ 时,对称子午线上两个奇点为结点\_结点形态,而当攻角为 $40^\circ$ 、 $50^\circ$ 时,则呈现为鞍点\_结点形态,

进一步验证了文献[4]的理论分析结果。此外,考虑到迎风面驻点附近还有一个结点,可以看到,上述拓扑结构依然满足Lighthill对截锥体表面奇点总数的拓扑规则:  $\sum N - \sum S = 1$ 。

### 3.2 垂直于体轴的横截面流线

横截面流动特征是实验、数值计算及理论分析研究分离流和涡运动空间结构的常用方法,Hunt<sup>[9]</sup>在1978年首次给出了截面流线奇点数目的拓扑规律,但结论仅适用于截面轮廓线是截面流线的特殊情况,而张涵信在文献[7]给出了适用于任何截面的奇点数目拓扑规律。对于本文所研究的双连通区域且外边界无奇点的情况,其垂直于体轴的横截面流线拓扑规律为

$$\sum N + \frac{1}{2} \sum N' - \sum S - \frac{1}{2} \sum S' = -I(C), \quad (3)$$

式中 $N$ 、 $S$ 分别为截面内结点和鞍点数目, $N'$ 、 $S'$ 分别为截面边界上的半结点和半鞍点数目, $I(C)$ 为绕截面内边界闭曲线上的Poincare指数,当横截面处于或不处于纵向分离区(只有一个)时, $I(C)$ 分别为0或1。

限于篇幅,本文仅给出攻角为 $30^\circ$ 、 $40^\circ$ 时垂直于体轴的横截面流线图, $50^\circ$ 攻角时的情况与 $40^\circ$ 类似。图8为 $30^\circ$ 攻角时垂直于体轴的横截面流线图( $X/R$ 分别为1.73、7.51、16)。图8(a)处于纵向分离区内,背分区有两个螺旋结点, $I(C)$ 指数为0,奇点总数满足(3)式拓扑规律( $\sum N = 2, \sum N' = \sum S' = 0, \sum S = 2$ )。图8

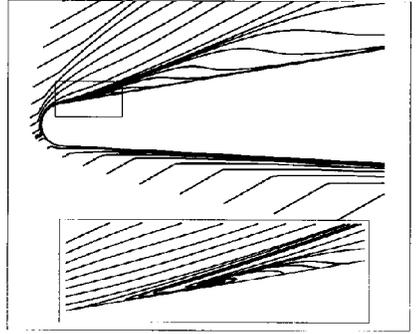


图7 对称面流线图( $30^\circ$ 攻角)

(b)、8(c)背风面由于横向分离卷起两个分离涡,并在对称线上出现两个鞍点相连,由流动稳定性理论知属于不稳定情况。奇点总数也满足(3)式规律( $\sum N = 2, \sum N' = \sum S' = 0, \sum S = 3, I(C) = 1$ )。

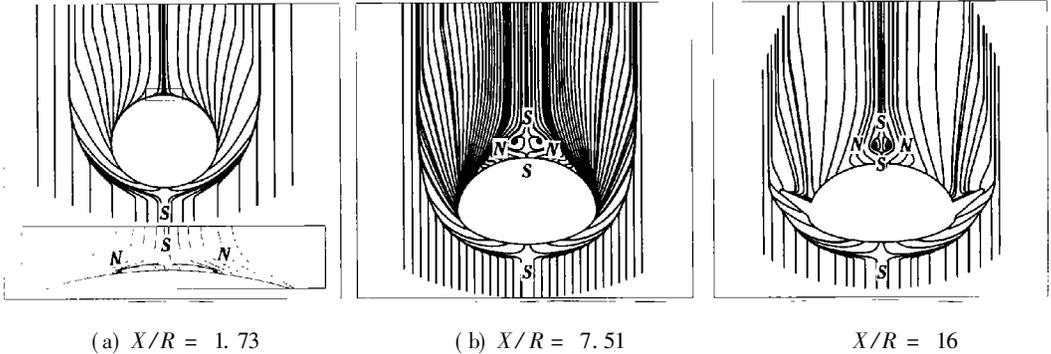


图8 垂直于体轴截面流线( $30^\circ$ 攻角)

图9为 $40^\circ$ 攻角时垂直于体轴的横截面流线图( $X/R$ 分别为1.05、1.40、7.51、16)。图9(a)、图9(b)是处于背风面纵向分离泡内的两种拓扑形态,图9(a)在背风面距壁面对称线附近存在一个由两个附着结点和一个鞍点组成的高阶奇点( $N_S N$ ),奇点总数满足拓扑规律( $\sum N = 2, \sum N' = \sum S' = 0, \sum S = 2, I(C) = 0$ )。;图9(b)则是分离区内的另一种拓扑形态,背风面存在4个螺旋结点,奇点总数同样满足(2)式( $\sum N = 4, \sum N' = \sum S' = 0, \sum S = 4, I(C) = 0$ )。;图9(c)、图9(d)与图8(b)、图8(c)结构基本相同。

此外,仔细分析上述各个横截面流线图中对称线上奇点数目可以发现,对于本文物面子午线与体轴倾角大于零的情况,截面不处于纵向分离区内时,其迎风对称线上奇点总数为奇数个

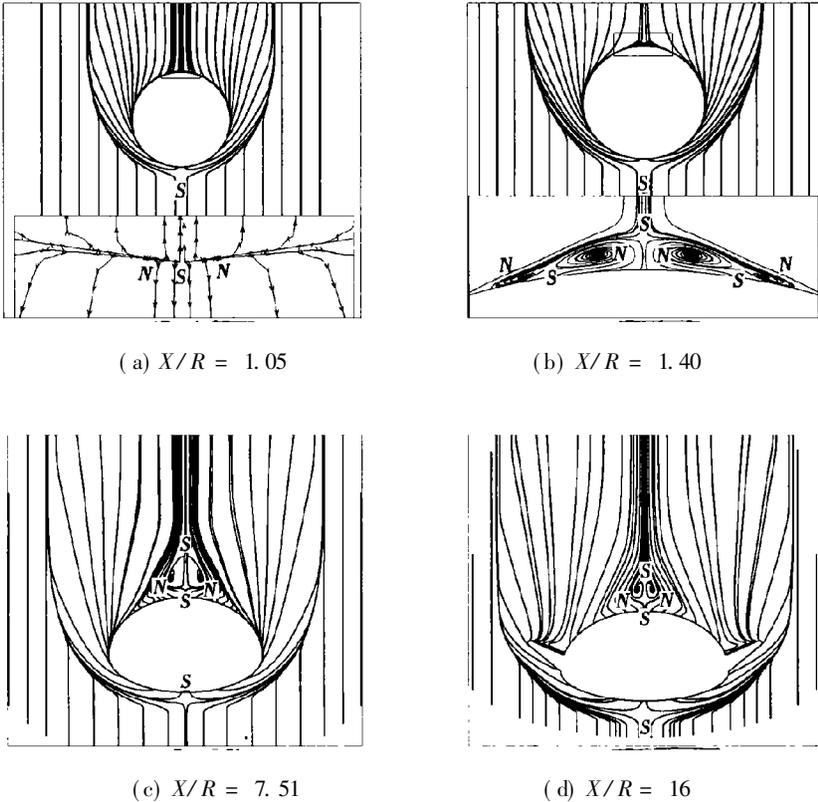


图9 垂直于体轴截面流线(40°攻角)

(1个),背风对称线上奇点总数为偶数个(0个或2个);而当截面背风区处于纵向分离区内时,其背风对称线上奇点总数为奇数个(1个),迎风对称线上(没有纵向分离)奇点总数为奇数个(1个),和文献[7]的理论分析一致。

## 4 结 论

1) 本文在NND格式的二阶模板基础上,采用加权思想构造了具有空间三阶精度的WNND格式。通过对线性波动方程、一维Euler方程及三维全NS方程的数值实验表明:三阶精度的WNND格式在不增加插值点的前提下,在对各种间断的分辨率和收敛特性等方面均优于NND格式。

2) 采用WNND格式对升力体外形高超声速流场的数值模拟表明:升力体外形三维流场结构十分复杂,攻角从0°~50°变化时,背风面依次由不分离、开式分离向起始于鞍、结点组合的高阶奇点的分离方式转化,而高阶奇点依攻角不同,还呈现出鞍点型高阶奇点S<sub>N</sub>S(30°攻角)和结点型高阶奇点N<sub>S</sub>N(40°、50°攻角);垂直于体轴的横截面流动拓扑结构与文献[7]给出的理论分析结论一致,大于20°攻角后,在部分横截面背风对称线上出现结构不稳定的鞍点相连现象。

致谢 本文工作得到了中国空气动力研究与发展中心张涵信院士的指导,作者在此表示衷心感谢。

## [参 考 文 献]

- [1] ZHANG Han\_xin. On problems to develop physical analysis in CFD[A]. In: ZHANG Han\_xin Ed. Proceedings of the Fourth Asian Computational Fluid Dynamics Conference [C]. Mianyang, Chengdu, China, 2000, 3-19.

- [2] Liu X D, Osher S, Chan T. Weighted essentially non\_oscillatory schemes[ J]. Journal of Computational Physics, 1994, **115**: 200—212.
- [3] Zhang H X, Zhuang F G. NND schemes and their applications to numerical simulation of two and three dimensional flows[ J]. Advances in Applied Mechanics, 1992, 29(193): 764—785.
- [4] 张航, 刘金合, 国义军. 弹体高超声速绕流流态随攻角的演化[ A]. 见: 张涵信 编. 第七届全国涡运动与分离流会议文集[ C]. 北京, 2002.
- [5] SHEN Qing, ZHANG Han\_xin, GAO Shu\_chun. A new upwind NND scheme for euler equations and its application to the supersonic flow[ A]. In: ZHANG Han\_xin Ed. Proceedings of the Seventh China Computational Fluid Dynamics Conference[ C]. Chengdu: University of Electronic and Technology of China Press, 1994, 49—55.
- [6] Lynbimov A N, Rusanov V V. Gas flow past blunt bodies[ R]. NASA TT\_F715, 1973.
- [7] 张涵信. 分离流和涡运动横截面流态的拓扑[ J]. 空气动力学学报, 1997, **15**(1): 1—12.
- [8] 张涵信, 邓小刚. 三维定常分离流和涡运动的定性分析研究[ J]. 空气动力学学报, 1992, **10**(1): 8—20.
- [9] Hunt J C R, Abell C J, Peterka J A, et al. Kinematical studies of the flows around free or surface mounted obstacles, applying topology to vlow visualization[ J]. Journal of Fluid Mechanics, 1978, **86**: 179—200.

## Construction of Third\_Order WNN D Scheme and Its Application in Complex Flow

LIU Wei<sup>1</sup>, ZHAO Hai\_yang<sup>1</sup>, XIE Yu\_fei<sup>2</sup>

(1. College of Aerospace and Material Engineering, National University of  
Defense Technology, Changsha 410073, P. R. China;

2. China Aerodynamics Research and Development Center, Mianyang, Sichuan 621000, P. R. China)

**Abstract:** According to the Liu's weighted idea, a space third\_order WNN D scheme was constructed based on the stencils of second\_order NND scheme. It was applied in solving linear\_wave equation, 1D Euler equations and 3D Navier\_Stokes equations. The numerical results indicate that the WNN D scheme which doesn't increase interpolated point (compared to NND scheme) has more advantages in simulating discontinues and convergence than NND scheme. Applying WNN D scheme to simulating the hypersonic flow around lift\_body shows: With the AoA (angle of attack) increasing from  $0^\circ$  to  $50^\circ$ , the structure of limiting streamline of leeward surface changes from unseparating, open\_separating to separating, which occurs from the combined\_point (which consists of saddle and node points). The separating area of upper wing surface is increasing with the AoA's increasing. The topological structures of hypersonic flowfield based on the sectional flow patterns perpendicular to the body axis agree well with ZHANG Han\_xin's theory. Additionally, the unstable\_structure phenomenon which is showed by two saddles connection along leeward symmetry line occurs at some sections when the AoA is bigger than  $20^\circ$ .

**Key words:** high order scheme; numerical simulation; topological structure; limiting streamline of surface; Navier\_Stokes equation; WNN D scheme