

有曲率突变的轴对称壳 (波纹壳)的有限元解*

谢志成 付承诵 郑思樑

(北京清华大学基础部力学教研组 1980年2月29日收到)

摘 要

本文指出了在一般用直线单元的轴对称壳的有限元法中, 由于忽视了曲率对斜度变形的影响, 并不能用以处理曲率突变的轴对称壳问题. 本文提出了考虑曲率影响的、以壳的斜度变形为连续参数的直线单元有限元法, 并用以处理C型波纹壳的计算. 和Turner-Ford的实验结果比较, 以及和钱伟长教授的解析解^[2]比较, 都证明这个理论是正确的.

一、前 言

对于具有正负高斯曲率的轴对称壳体, 钱伟长教授在^[1]中已提出一个半圆弧细环壳理论的精确解, 又在^[2]中得出半圆弧粗环壳的解析解. 为了验证他的结果, 并能进一步研究其他因素(如壁厚变化)的影响, 在这里再提供这类壳体的一个有限元的数值解.

关于轴对称壳的有限元法问题, 从1963年 Crafton 等人用直线单元起^[3], 把 $u, w, \frac{dw}{ds}$ 作为连续参数, 至1966年 Stricklin^{[4], [5]} 等人用曲线单元, 把 $u, w, \frac{dw}{ds} - \frac{u}{R}$ 作为连续参数, 这类问题的线性解似乎已比较成熟. 直至今日, 大家都认为用直线单元和用曲线单元都能得到一个收敛于真解的结果, 它们只是精度有所不同而已^[6].

本文通过分析和计算, 指出了直线单元和曲线单元最根本的区别在于对壳的斜率变形是否考虑了曲率的影响. 对直线单元而言, 一般认为斜率变形只和挠度的导数 $\frac{dw}{ds}$ 有关, 和曲率 $\frac{1}{R}$ 无关. 对曲线单元, 则认为斜率变形既和 $\frac{dw}{ds}$ 有关, 而且也 and $\frac{u}{R}$ 有关. 当曲率连续变化时, 在有限元计算中只要求 $\frac{dw}{ds}$ 和 u, w 连续, 也必同时满足了 $\frac{dw}{ds} - \frac{u}{R}$ 的连续, 两种考虑是等价的. 但对于曲率有突变的壳体而言, $\frac{dw}{ds}$ 和 u 连续, 并不保证 $\frac{dw}{ds} - \frac{u}{R}$ 的连续, 因

* 钱伟长推荐.

此, 采用习惯的直线单元就一定会得出谬误的结果. 为了克服这种缺点, 本文提出了采用 $\frac{dw}{ds} - \frac{u}{R}$ 为连续变量的直线有限元法, 这样既保存了直线有限元法的简易性, 又保持了壳的本质的特性, 从而用较简单的方法, 获得了处理象波纹壳这一类轴对称壳的正确工具.

二、基本方程

图 1 表示壳单元的正向内力分量, 用 $\{\sigma\}$ 列阵表示:

$$\{\sigma\} = \{N_s, N_\theta, M_s, M_\theta\}^T \quad (2.1)$$

对应的变形分量用 $\{e\}$ 列阵表示:

$$\{e\} = \{e_s, e_\theta, \chi_s, \chi_\theta\}^T \quad (2.2)$$

其中 e_s, e_θ 表示壳单元的薄膜应变, 而 χ_s, χ_θ 则表示壳在子午线方向 S 和垂直于子午线方向 θ 的曲率的改变.

内力和变形之间有:

$$\{\sigma\} = [D]\{e\} \quad (2.3)$$

其中 $[D] = \frac{Et}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} [D_{11}] & 0 \\ 0 & [D_{22}] \end{bmatrix}$ (2.4)

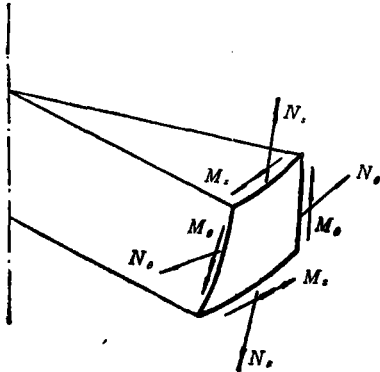


图 1

$$[D_{11}] = \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix}, \quad [D_{22}] = \frac{t^2}{12} [D_{11}] \quad (2.5)$$

E, ν 为材料的弹性系数和波桑系数; t 为壳单元的壁厚.

根据壳体理论, 在小位移的条件下一段圆弧壳上 ($R = \text{常数}$) 应变与位移的关系为

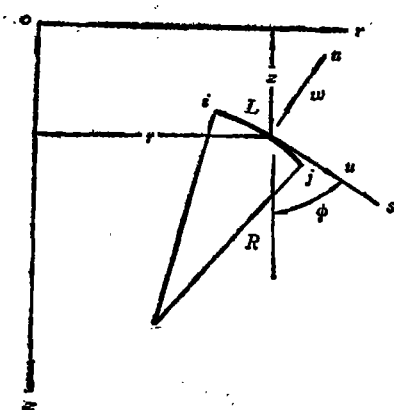


图 2

$$\{e\} = \begin{bmatrix} \frac{du}{ds} + \frac{w}{R} \\ \frac{1}{r}(w \cos \phi + u \sin \phi) \\ \frac{1}{R} \frac{du}{ds} - \frac{d^2 w}{ds^2} \\ \left(\frac{u}{R} - \frac{dw}{ds}\right) \frac{\sin \phi}{r} \end{bmatrix} \quad (2.6) \text{(注)}$$

其中 u, w 为壳在 s 方向和法线 n 方向的位移 (图 2); R 为一段圆弧壳在子午线方向 s 的曲率半径; r, z 表示壳上一点的坐标, ϕ 表示子午线 s 的切线与坐标轴 z 的夹角.

对这类壳体, 有限元的位移模式通常采取

注, 这里假定 R 在一段壳中不变.

$$\left. \begin{aligned} u &= \alpha_1 + L\alpha_2\xi \\ w &= \alpha_3 + L\alpha_4\xi + L^2\alpha_5\xi^2 + L^3\alpha_6\xi^3 \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

其中 L 为单元体的长度, ξ 为对应于 s 的无量纲量

$$s = L\xi \quad (2.8)$$

这是一个既简单又是协调的位移模式, 式中六个待定常数, 要依靠单元 $i-j$ 结点的独立参数来确定. 在这类壳的问题里, 我们选择了单元两端点 i 和 j 的位移 u_i, w_i, u_j, w_j 以及这两点的转角 β_i, β_j (斜率变形), 作为单元结点的独立自由度, 于是就有六个条件, 确定 (2.7) 式的六个待定常数, 即按 (2.7) 式和

$$\beta = \frac{dw}{ds} - \frac{u}{R} \quad (2.9)$$

利用条件:

$$\xi = 0, \quad u = u_i, \quad w = w_i, \quad \beta = \beta_i$$

$$\xi = 1, \quad u = u_j, \quad w = w_j, \quad \beta = \beta_j$$

求出 $\alpha_1 - \alpha_6$, 于是位移 u, w, β , 为

$$\{U\} = [N] \cdot \{W\} \quad (2.10)$$

其中 $\{U\} = \{u \ w \ \beta\}^T$, $\{W\} = \{u_i \ w_i \ \beta_i \ u_j \ w_j \ \beta_j\}^T$

$$[N] = \begin{bmatrix} 1-\xi & 0 & 0 \\ \frac{L}{R}(\xi-2\xi^2+\xi^3) & 1-3\xi^2+2\xi^3 & L(\xi-2\xi^2+\xi^3) \\ \frac{1}{R}(-3\xi+3\xi^2) & \frac{1}{L}(-6\xi+6\xi^2) & 1-4\xi+3\xi^2 \\ \xi & 0 & 0 \\ \frac{L}{R}(-\xi^2+\xi^3) & 3\xi^2-2\xi^3 & L(-\xi^2+\xi^3) \\ \frac{1}{R}(-3\xi+3\xi^2) & \frac{1}{L}(6\xi-6\xi^2) & -2\xi+3\xi^2 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

将(2.10)式代入(2.6), 即得

$$\{\varepsilon\} = [B] \cdot \{W\} \quad (2.12)$$

其中

$$[B] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} + \frac{L}{R^2}(\xi-2\xi^2+\xi^3) & \frac{1}{R}(1-3\xi^2+2\xi^3) & \frac{L}{R}(\xi-2\xi^2+\xi^3) \\ \frac{\sin\phi}{r}(1-\xi) & \frac{\cos\phi}{r}(1-3\xi^2+2\xi^3) & \frac{L\cos\phi}{r}(\xi-2\xi^2+\xi^3) \\ +\frac{L}{R}\frac{\cos\phi}{r}(\xi-2\xi^2+\xi^3) & \frac{1}{L^2}(6-12\xi) & \frac{1}{L}(4-6\xi) \\ \frac{1}{RL}(3-6\xi) & \frac{\sin\phi}{Lr}(6\xi-6\xi^2) & -\frac{\sin\phi}{r}(1-4\xi+3\xi^2) \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{lll} \frac{1}{L} + \frac{L}{R^2}(-\xi^2 + \xi^3) & \frac{1}{R}(3\xi^2 - 2\xi^3) & \frac{L}{R}(-\xi^2 + \xi^3) \\ \frac{\sin\phi}{r}\xi + \frac{L}{R}\frac{\cos\phi}{r}(-\xi^2 + \xi^3) & \frac{\cos\phi}{r}(3\xi^2 - 2\xi^3) & \frac{L}{r}\cos\phi(-\xi^2 + \xi^3) \\ \frac{1}{RL}(3 - 6\xi) & -\frac{1}{L^2}(6 - 12\xi) & \frac{1}{L}(2 - 6\xi) \\ \frac{\sin\phi}{Rr}(3\xi - 3\xi^2) & -\frac{\sin\phi}{Lr}(6\xi - 6\xi^2) & \frac{\sin\phi}{r}(2\xi - 2\xi^2) \end{array} \right\} \quad (2.13)$$

将 (2.12) 式代入 (2.3), 得内力为

$$\{\sigma\} = [D] \cdot [B] \cdot \{W\} \quad (2.14)$$

在一般情况下, (2.13), (2.14) 式中的曲率 $\frac{1}{R}$ 和 ϕ 角以及 $[D]$ 中的壳的壁厚 t 都是坐标 $\xi(s)$ 的函数, 因而 (2.13), (2.14) 式是比较复杂的, 若采用习惯的直线单元简化计算, 即将 R 看成无穷大, (2.13) 式将变为很简单的形式.^[7]

$$[B] = \left\{ \begin{array}{lll} -\frac{1}{L} & 0 & 0 \\ \frac{\sin\phi}{r}(1-\xi) & \frac{\cos\phi}{r}(1-3\xi^2+2\xi^3) & \frac{L}{r}\cos\phi(\xi-2\xi^2+\xi^3) \\ 0 & \frac{1}{L^2}(6-12\xi) & \frac{1}{L}(4-6\xi) \\ 0 & \frac{\sin\phi}{Lr}(6\xi-6\xi^2) & -\frac{\sin\phi}{r}(1-4\xi+3\xi^2) \\ \frac{1}{L} & 0 & 0 \\ \frac{\sin\phi}{r}\xi & \frac{\cos\phi}{r}(3\xi^2-2\xi^3) & \frac{L}{r}\cos\phi(-\xi^2+\xi^3) \\ 0 & -\frac{1}{L^2}(6-12\xi) & \frac{1}{L}(2-6\xi) \\ 0 & -\frac{\sin\phi}{Lr}(6\xi-6\xi^2) & \frac{\sin\phi}{r}(2\xi-3\xi^2) \end{array} \right\} \quad (2.15)$$

再利用直线单元的几何条件 (图 3)

$$\begin{aligned} \sin\phi &= \frac{r_j - r_i}{L}, & \cos\phi &= \frac{z_j - z_i}{L} \\ L &= \sqrt{(r_j - r_i)^2 + (z_j - z_i)^2} \\ r &= r_i(1 - \xi) + r_j\xi \end{aligned} \quad (2.16)$$

和假设在一个单元中厚度 t 不变, 可直接求得单元刚度矩阵的各元素的显式 (见附录)。

若采用曲线单元, 需要再对 ϕ 角的变化作近似的假定, 例如假设 ϕ 角在单元内部是 ξ 的

二次函数

$$\phi(\xi) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 \quad (2.17)$$

从而得出曲率 $\frac{1}{R}$ 的变化规律 $\frac{1}{R} = \frac{d\phi}{ds}$

$= \frac{1}{L} \frac{d\phi}{d\xi}$, 再将 (2.13) (2.14) 式中的

变量 r, t 写成 ξ 的函数, 应用数值积分, 也能求得单元刚度矩阵各元素的值^[8].

当然这样做, 一般得不到这些元素的显式.

采用曲线单元, 无疑可以提高精度, 单元的划分也可以粗一些. 但从以上分析看出, 当单元的尺寸缩到足够小时, 把 ϕ 看作常数(直线元)或者把 ϕ 看作变量(曲线元), 将不会产生很大的差别, 因而引用直线元也常常得到正确的解答. 但是,

必须指出, 由于引用直线单元时没有把曲率考虑在内, 这就有可能破坏了单元之间的连续条件, 因而采用习惯的直线单元有时会得到错误的结果.

以图4a的两个相邻的单元④⑤为例. 在这两个单元的公共点 j 上, 壳的转角 β_j 应当连续, 即④和⑤单元在 j 点的转角应当相等

$$\beta_j^{\text{④}} = \left(\frac{dw}{ds}\right)_j^A - \left(\frac{u}{R}\right)_j^A = \left(\frac{dw}{ds}\right)_j^B - \left(\frac{u}{R}\right)_j^B = \beta_j^{\text{⑤}}$$

因为在 j 点上 $\left(\frac{u}{R}\right)_j^A = \left(\frac{u}{R}\right)_j^B$, 故

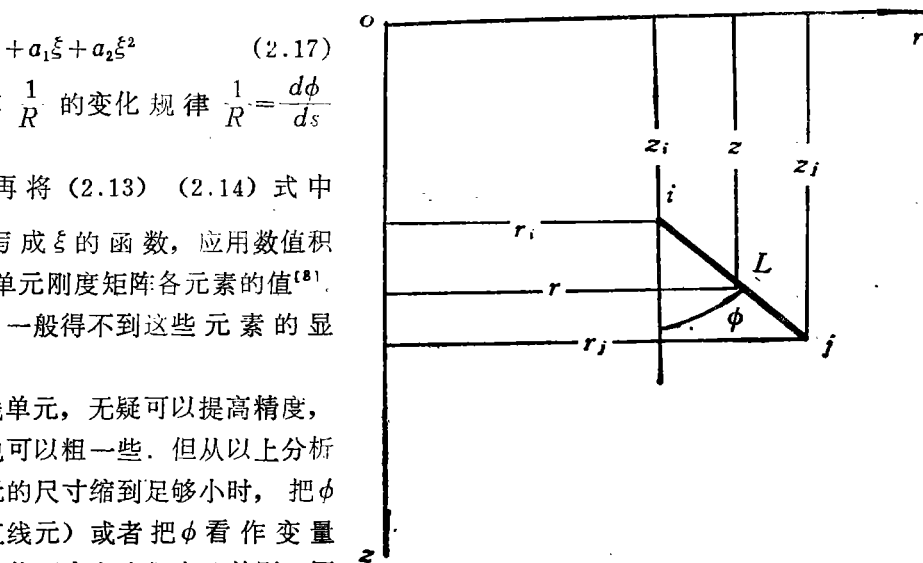


图 3

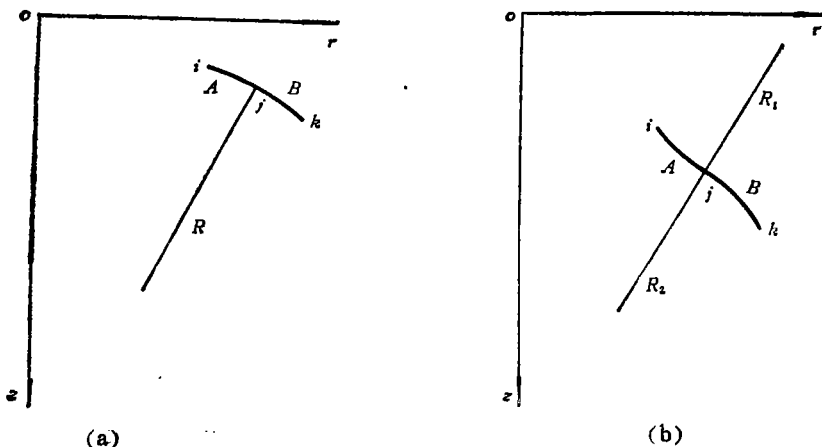


图 4

$$\left(\frac{dw}{ds}\right)_j^A = \left(\frac{dw}{ds}\right)_j^B \quad (2.18)$$

由此可见,若用直线 ijk 近似壳曲线 $R=\infty$, $\frac{u}{R}=0$, 所得出的单元的连续条件与(2.18)式相同. 也就是说,对曲率连续变化的壳体,引用直线单元没有破坏壳单元的实际连续条件,因而可以得到正确的有限元解答. 但是对图4.6的情况,单元在 j 点曲率发生突变,这时若引用直线单元,即略去 $\frac{u}{R}$ 的项,并引用 $\left(\frac{dw}{ds}\right)_i^A = \left(\frac{dw}{ds}\right)_i^B$ 的条件(这时 $R=\infty$),势必破坏壳体转角 β_i 的连续性, $\left(\frac{u}{r}\right)_i^A \neq \left(\frac{u}{R}\right)_i^B$, 导致有限元解的失效.

为了保证有限元解的收敛性,又想保留直线单元比较简单的几何特点,我们在 $[B]$ 矩阵中保留曲率的项 $\left(\frac{1}{R}\right)$ (2.13) 式,但仍近似地认为在一个单元内曲率、厚度均不变,其他的几何因素,如 r 、 ϕ 等均用直线单元的结果. 这样做,可以在各种情况下保证单元间转角近似连续,当单元取得足够小时,仍会取得满意的有限元的结果.

根据最小位能原理:

$$\delta\Pi = \sum \int_0^1 L \int_0^1 \{ \delta U \} \{ e \} 2\pi r d\xi - \sum \int_0^1 L \int_0^1 \{ \delta U \} \{ q \} 2\pi r d\xi - \sum 2\pi r \{ \delta U \} \{ F \} = 0$$

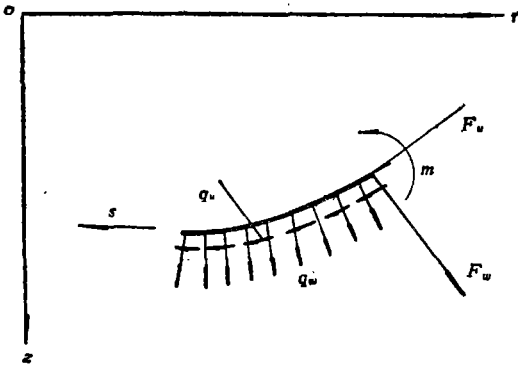


图 5

其中 $\{U\}$, $\{U\}$ 分别表示单元上任一点的位移:

$$\{U\} = \{u, w\}$$

$$\{U\} = \{u, w, \beta\}$$

$\{q\}$ 表示单元上分布载荷, $\{F\}$ 表示单元上集中力和集中力偶的列阵(图5)

$$\{q\} = \{q_s, q_w\}^T$$

$$\{F\} = \{F_s, F_w, m\}^T$$

将(2.10), (2.12), (2.14)等式代入后,从最小位能原理将得到单元的和整体的刚度矩阵以及相应的平衡方程式.

最小位能原理:

$$\frac{\delta\Pi}{2\pi} = \{ \delta \bar{W} \} \left(\sum \int_0^1 [B]^T [D] \cdot [B] r d\xi \right) \{ \bar{W} \} - \{ \delta \bar{W} \} \left(\sum \int_0^1 [\bar{N}]^T \{ q \} r d\xi \right) - \{ \delta \bar{W} \} \left(\sum [r_i + (r_j - r_i) \xi] [N]^T \{ F \} \right) = 0 \quad (2.19)$$

其中 $\{ \bar{W} \}$ 表示壳体所有结点的独立参数, $[\bar{N}]$ 表示 $[N]$ 矩阵前两行组成的矩阵(2.11).

单元刚度矩阵:

$$[K_s] = L \int_0^1 [B]^T [D] [B] r d\xi \quad (2.20)$$

若用 $\{\bar{N}_q\}$ 表示 $\sum \int_0^1 [\bar{N}]^T \{q\} r d\xi$, 用 $\{\bar{N}_F\}$ 表示 $\sum [r_i + (r_i - r_i)\xi][N]^T \{F\}$, 则

总刚度矩阵 $[K]$ 和平衡方程式为:

$$[K] = \sum [K_s] \quad (2.21)$$

$$[K]\{\bar{W}\} = \{\bar{N}_q\} + \{\bar{N}_F\} = \{P\} \quad (2.22)$$

$$\{P\} = \{\bar{N}_q\} + \{\bar{N}_F\}$$

三、计 算 题 例

为了使分析的结果与Turner-Ford¹⁹的实验结果比较,我们用上述的方法计算了 Turner-Ford 实验所用的三种 C型壳的模型. 这三种模型的尺寸如下:

Turner-Ford实验模型

模 型	a (cm)	R_0 (cm)	t (cm)
B	4.953	17.6022	0.1397
C	5.0038	17.6022	0.4318
D	2.4892	17.6022	0.13716

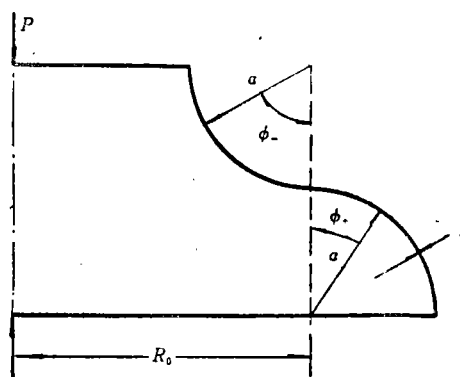


图 6

按钱伟长教授引进的参数

$$\mu = \sqrt{3(1-\nu^2)} a^2 / R_0 t$$

这三种模型的 μ 值为:

模 型	B	C	D
μ	16.5	5.43	4.24

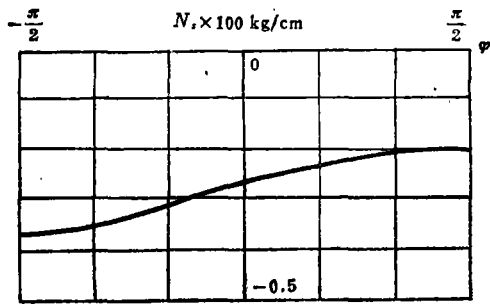
①以B模型为例,比较略去壳曲率的直线有限元解(图7)和考虑曲率影响的直线有限元解的结果(图8),这些结果都是在 P 力为3000kg作用下求得的.计算结果表明,两种方法的结果完全不同,后一种(图8)与[9]的结果相符,前一种结果则是错误的.过去许多作者利用直线单元处理的都是一些曲率不变的或曲率连续变化的壳体,斜率变形不连续的现象没有显露出来,因而他们的结果也是正确的.

②求出模型B、C、D内外表面的应力(切向和环向应力).与钱伟长教授的一般解比较,两种结果符合得很好(图9-11).在图9-11中,也同时画出Turner-Ford的实验结果.从这些结果看到,理论与实验也是大致相符的.由于五十年代实验技术条件的限制,使得理论与实验结果有偏差,这是可以理解的.

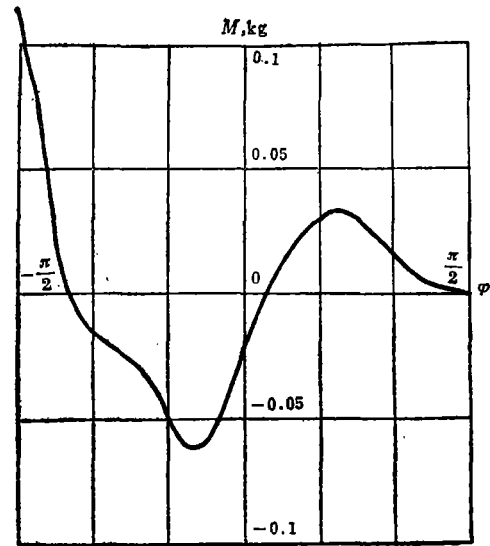
③ 求出模型B、C、D三种模型的一个全波节的轴向位移 δ 。与Turner-Ford实验结果比较，(图12)，结果说明，除B模型外(疑Turner-Ford的结果有误)，两者也是符合的。图12中的直线，是细环壳理论的近似结果。与一般解比较一致。

除了上述的Turner-Ford实验模型外，我们还计算了[10]实验模型的应力和位移，应力的结果列于图13—14中，位移的结果就是图12中的E点。图13表示按模型的平均厚度 $t_0=0.14\text{cm}$ 来计算的结果，图中也给出了钱伟长教授的精确解[2]。两种结果很好地符合。由于波纹壳膨胀成型的加工工艺，波纹壳实际上不是等厚的。按[10]中测量结果，厚度 t 的变化大致按如下规律：

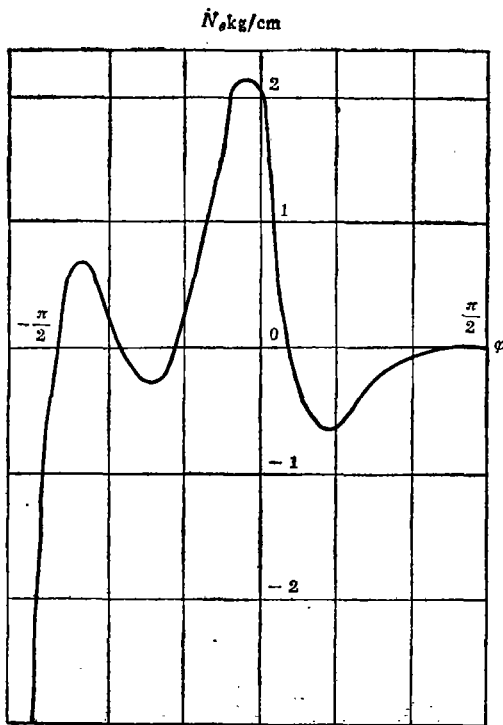
$$rt = 2.8542 \text{ cm}^2$$



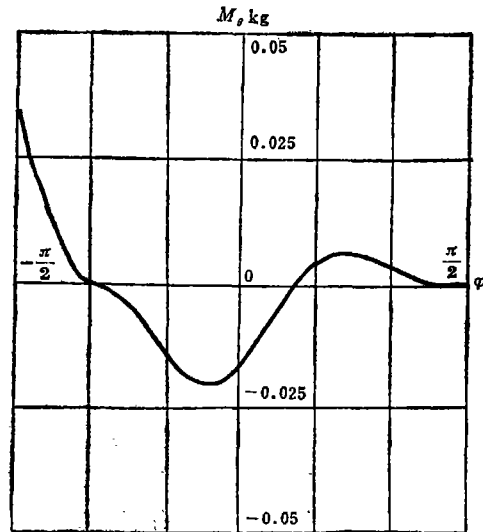
(a)



(c)



(b)



(d)

图7

或

$$rt^{\frac{3}{2}} = 1.063316 \text{ cm}^{\frac{3}{2}}$$

前者按实测结果和体积不变原理近似，后者则更为精确地符合实测结果。按上述两种壁变化规律求得模型的应力列于图14中。计算结果表明：对于细环壳，厚度的变化对壳的应力影响不大。

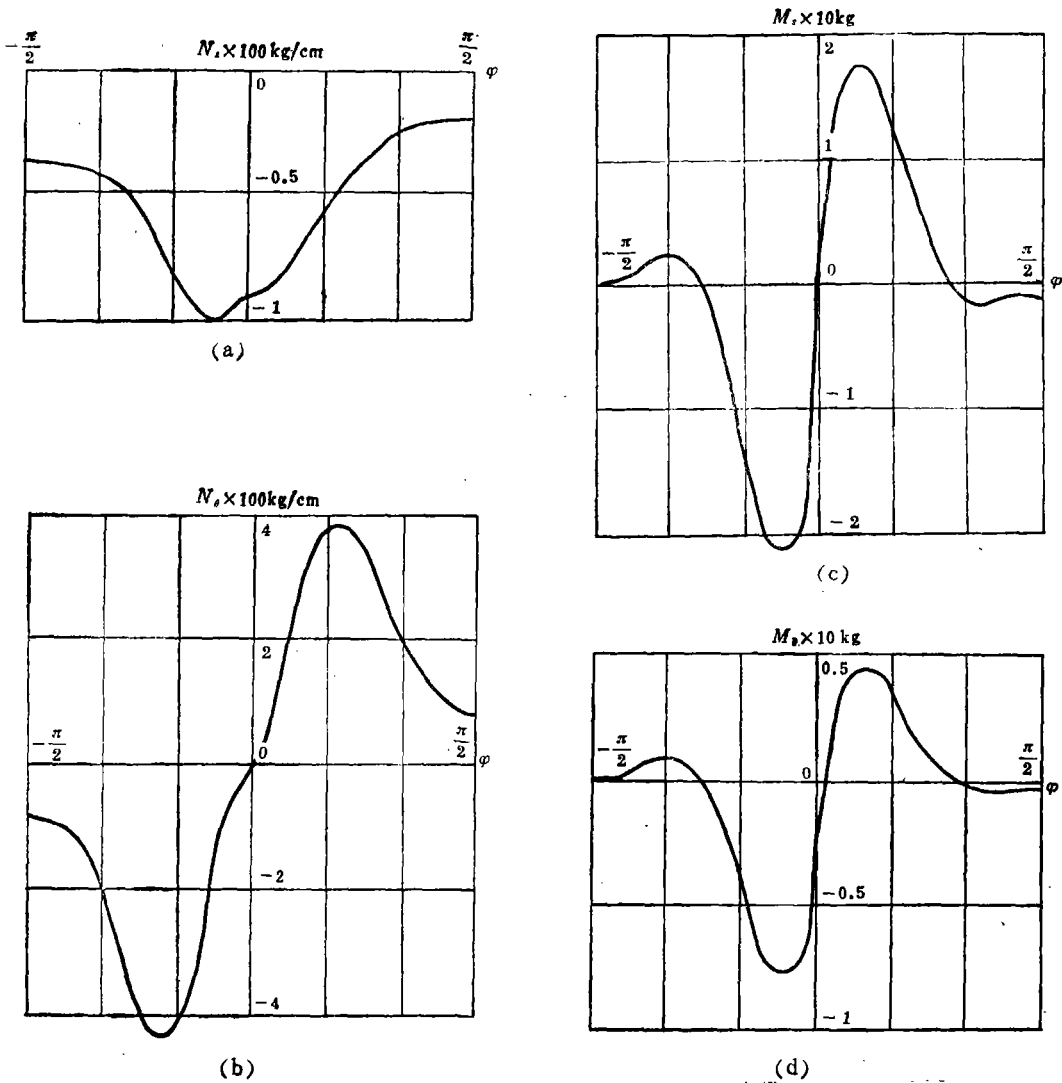


图 8

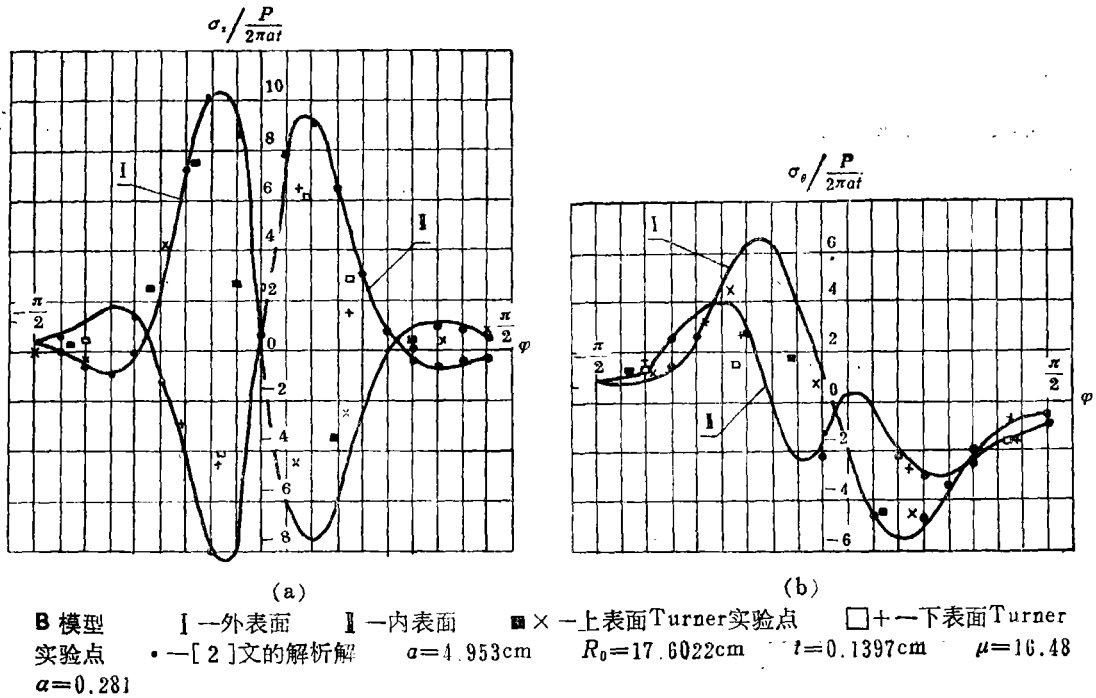


图 9

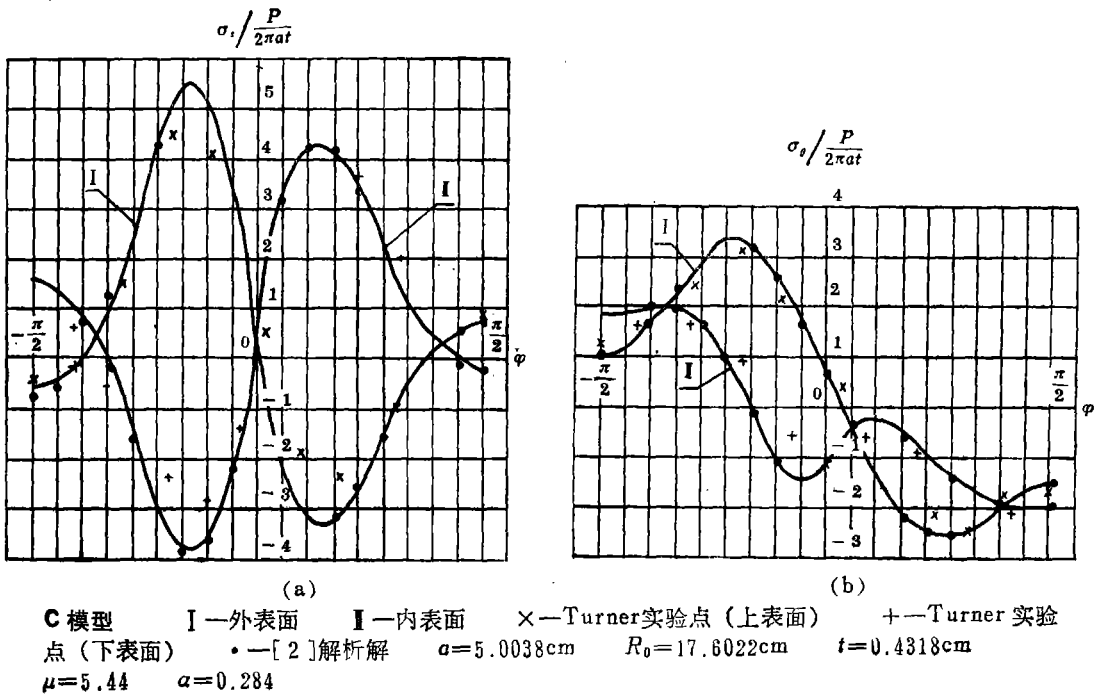
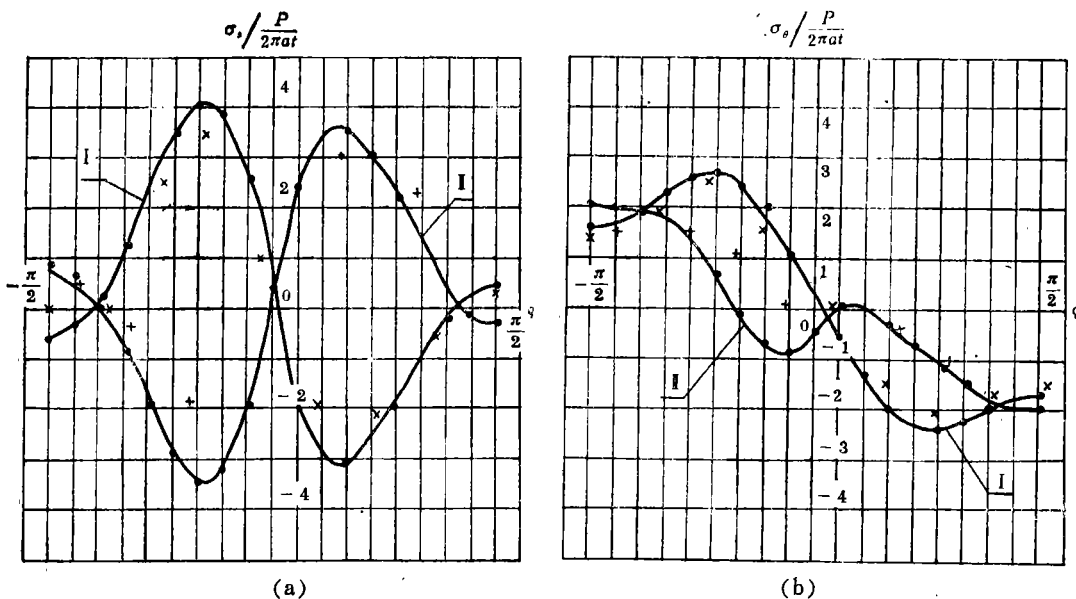


图 10



(a) (b)

D 模型 I—外表面 II—内表面 ×—Turner上表面实验点 +—Turner下表面实验点
 •—[2]文的解析解 $a=2.4892\text{cm}$ $R_0=17.6022\text{cm}$ $t=0.13716\text{cm}$
 $\mu=4.24$ $\alpha=0.144$

图 11

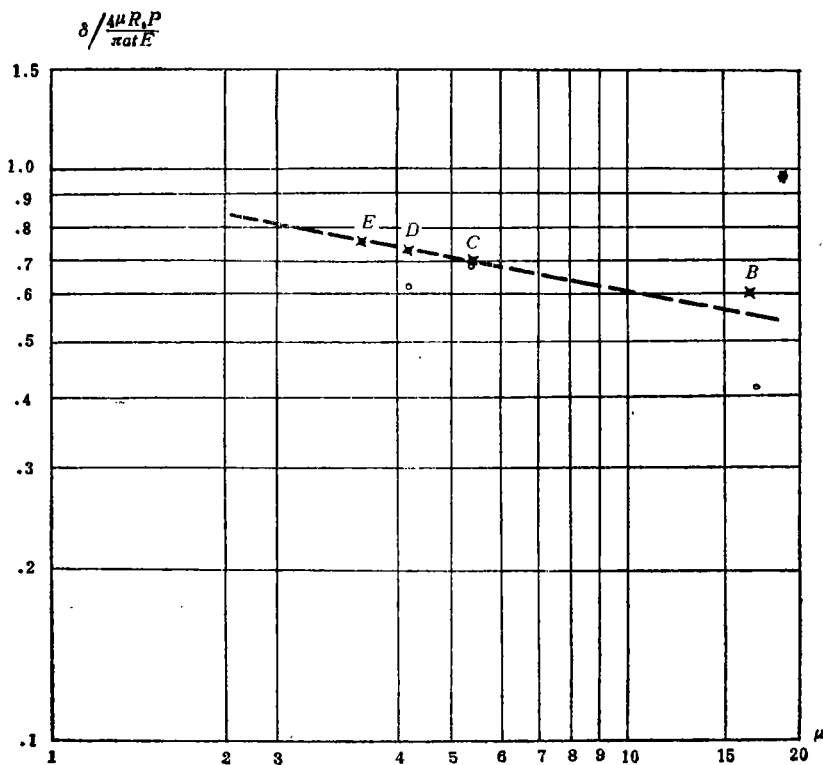
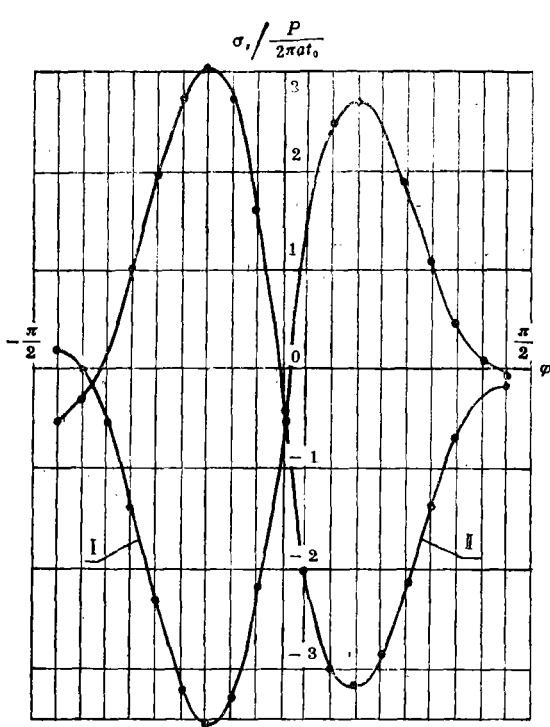
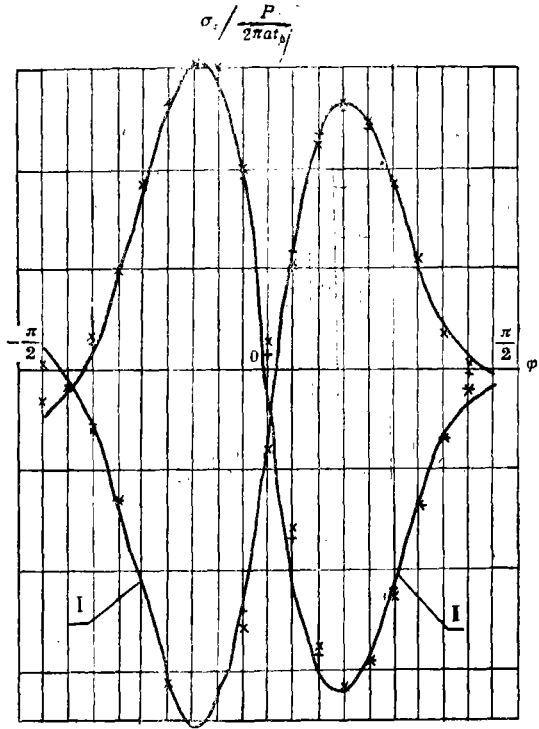


图 12

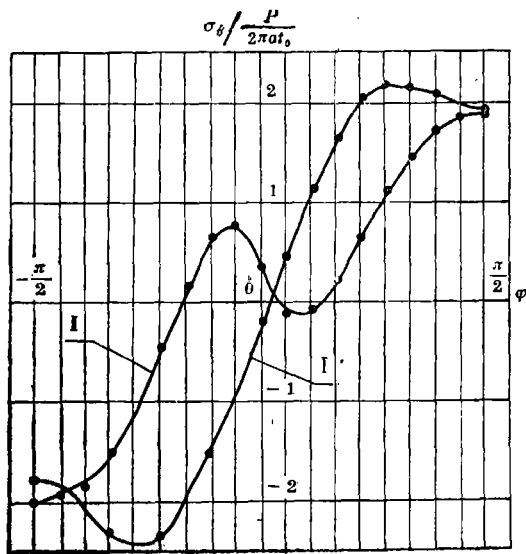
•—有限元解 ○—Turner-Ford实验结果 ×—[2]解析解



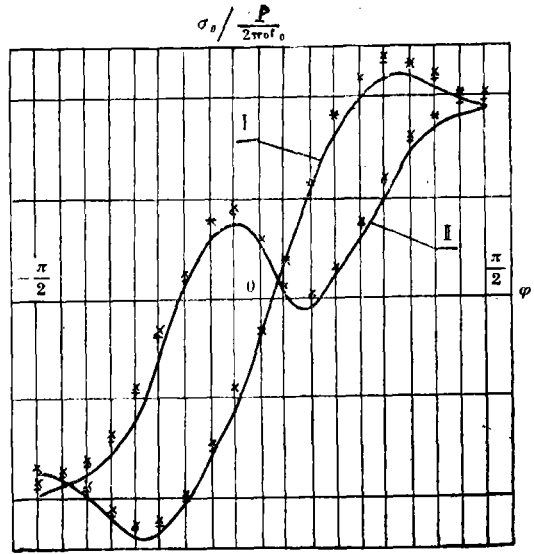
(a)



(a)



(b)



(b)

实验模型

I—外表面应力 II—内表面应力

—按[2]的解析解 a=2.465cm

R₀=20.465cm t₀=0.14cm

μ=3.504 α=0.1205

图 13

实验模型

—按平均厚度t₀=0.14的结果 ×—按
ri=2.8542的结果 +—按 r^{1.2}=1.063316的
结果 I—外表面应力 II—内表面应力

μ=3.504 α=0.1205

图 14

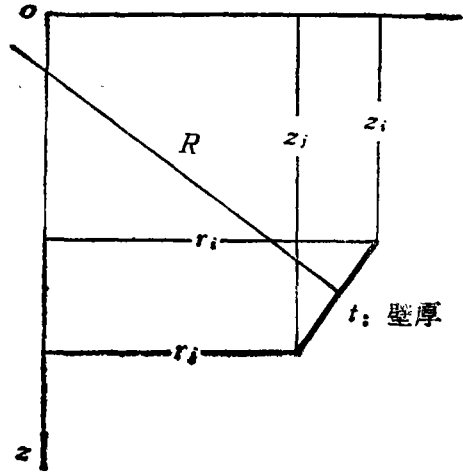
附 录

单元线性刚度矩阵 $[K_{ij}]_e$ 系数

$$K_{ij} = \frac{Et}{1-\nu^2} K_{ij}^*$$

$$K_{11}^* = \frac{1}{L} \left[\frac{1}{2} (r_i + r_o) - \nu (r_i - r_o) + (r_i - r_o)^2 (J_0 - 2J_1 + J_2) \right]$$

$$\begin{aligned} & - \frac{\nu}{6} \frac{1}{R} (z_i - z_j) + \frac{L}{R^2} \left[\frac{\nu}{10} (r_i - r_o) \right. \\ & \left. - \frac{1}{15} r_i - \frac{1}{10} r_o \right] + \frac{2}{105} \nu \frac{L^2}{R^3} (z_i - z_j) \\ & + \frac{L^3}{R^4} \left(\frac{1}{280} r_i + \frac{1}{168} r_o \right) + 2 \frac{(r_i - r_o)(z_i - z_j)}{R} \\ & \quad \cdot (J_1 - 3J_2 + 3J_3 - J_4) \\ & + \frac{L(z_i - z_j)^2}{R^2} (J_2 - 4J_3 + 6J_4 - 4J_5 + J_6) \\ & + \frac{1}{12} \frac{t^2}{R^2 L} \left[\frac{3}{2} (r_i + r_o) + 9(r_i - r_o)^2 \right. \\ & \quad \left. \cdot (J_2 - 2J_3 + J_4) \right] \end{aligned}$$



$$K_{12}^* = \frac{1}{L} (z_i - z_j) \left[-\frac{\nu}{2} + (r_i - r_o)(J_0 - J_1 - 3J_2 + 5J_3 - 2J_4) \right]$$

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{20} \frac{1}{R} [3r_i + 7r_o - 7\nu (r_i - r_o)] + \frac{11}{105} \frac{\nu L}{R^2} (z_i - z_j) + \frac{L^2}{R^3} \left(\frac{1}{60} r_i + \frac{1}{28} r_o \right) \\ & + \frac{(z_i - z_j)^2}{R} (J_1 - 2J_2 - 2J_3 + 8J_4 - 7J_5 + 2J_6) \\ & + \frac{t^2}{12} \frac{1}{RL^2} [3(r_i + r_o) + 18(r_i - r_o)^2 (J_2 - 2J_3 + J_4)] \end{aligned}$$

$$K_{13}^* = (z_i - z_j) \left[-\frac{\nu}{12} + (r_i - r_o)(J_1 - 3J_2 + 3J_3 - J_4) \right]$$

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{60} \frac{L}{R} [2r_i + 3r_o - 3\nu (r_i - r_o)] + \frac{2}{105} \nu \frac{L^2}{R^2} (z_i - z_j) + \frac{L^3}{R^3} \left(\frac{1}{280} r_i + \frac{1}{168} r_o \right) \\ & + \frac{L}{R} (z_i - z_j)^2 (J_2 - 4J_3 + 6J_4 - 4J_5 + J_6) \\ & + \frac{t^2}{12} \frac{1}{RL} [r_i + 2r_o - 3(r_i - r_o)^2 (J_1 - 5J_2 + 7J_3 - 3J_4)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{14}^* &= \frac{1}{L} \left[-\frac{1}{2} (r_j + r_i) + (r_j - r_i)^2 (J_3 - J_2) \right] \\
 &+ \frac{1}{6R} \nu (z_j - z_i) + \frac{1}{12} \frac{L}{R^2} (r_j + r_i) - \frac{1}{70} \nu \frac{L^2}{R^3} (z_j - z_i) - \frac{1}{280} \frac{L^3}{R^4} (r_j + r_i) \\
 &+ \frac{L}{R^2} (z_j - z_i)^2 (-J_3 + 3J_4 - 3J_5 + J_6) \\
 &+ \frac{f^2}{12R^2L} \left[\frac{3}{2} (r_j + r_i) + 9(r_j - r_i)^2 (J_2 - 2J_3 + J_4) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{16}^* &= \frac{1}{L} (z_j - z_i) \left[-\frac{\nu}{2} + (r_j - r_i) (3J_2 - 5J_3 + 2J_4) \right] \\
 &- \frac{1}{20R} \left[7r_j + 3r_i - 3\nu (r_j - r_i) \right] + \frac{13}{210} \nu \frac{L}{R^2} (z_j - z_i) + \frac{L^2}{R^3} \left(\frac{1}{60} r_j + \frac{1}{70} r_i \right) \\
 &+ \frac{1}{R} (z_j - z_i)^2 (3J_3 - 8J_4 + 7J_5 - 2J_6) \\
 &- \frac{f^2}{12RL^2} \left[3((r_j + r_i) + 18(r_j - r_i)^2 (J_2 - 2J_3 + J_4)) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{18}^* &= (z_j - z_i) \left[\frac{\nu}{12} + (r_j - r_i) (-J_2 + 2J_3 - J_4) \right] \\
 &+ \frac{1}{60R} \left[3r_j + 2r_i - 2\nu (r_j - r_i) \right] - \frac{1}{70} \nu \frac{L^2}{R^2} (z_j - z_i) - \frac{1}{280} \frac{L^3}{R^3} (r_j + r_i) \\
 &+ \frac{L}{R} (z_j - z_i)^2 (-J_3 + 3J_4 - 3J_5 + J_6) \\
 &+ \frac{f^2}{12RL} \left[2r_j + r_i + 3(r_j - r_i)^2 (2J_2 - 5J_3 + 3J_4) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{22}^* &= \frac{1}{L} (z_j - z_i)^2 (J_0 - 6J_2 + 4J_3 + 9J_4 - 12J_5 + 4J_6) + \frac{1}{2} \frac{f^2}{L^3} (r_j + r_i) \\
 &+ \frac{3f^2}{L^3} (r_j - r_i)^2 (J_2 - 2J_3 + J_4) \\
 &+ \frac{L}{R^2} \frac{1}{35} (3r_j + 10r_i) + \frac{1}{R} \frac{26}{35} \nu (z_j - z_i)
 \end{aligned}$$

$$K_{28}^* = (z_j - z_i)^2 (J_1 - 2J_2 - 2J_3 + 8J_4 - 7J_5 + 2J_6) + \frac{1}{6} \frac{f^2}{L^2} (r_j + 2r_i)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{t^2}{2L^2}(r_i-r_.)^2(J_1-5J_2+7J_3-3J_4) \\
& +\frac{L^2}{R^2}\left(\frac{1}{60}r_i+\frac{1}{28}r_.\right)+\frac{11}{105}\nu\frac{L}{R}(z_i-z) \\
K_{24}^* & =\frac{1}{L}(z_i-z_.)\left[\frac{\nu}{2}+(r_i-r_.)\left(J_1-3J_3+2J_4\right)\right] \\
& +\frac{1}{20R}\left[3r_i+7r_.+3\nu(r_i-r_.)\right]-\frac{13}{210}\nu\frac{L}{R^2}(z_i-z_.)-\frac{L^2}{R^3}\left(\frac{1}{70}r_i+\frac{1}{60}r_.\right) \\
& +\frac{1}{R}(z_i-z_.)^2(-J_2+J_3+3J_4-5J_5+2J_6) \\
& +\frac{t^2}{12RL^2}\left[3(r_i+r_.)+18(r_i-r_.)^2(J_2-2J_3+J_4)\right] \\
K_{25}^* & =\frac{1}{L}(z_i-z_.)^2(3J_2-2J_3-9J_4+12J_5-4J_6)-\frac{t^2}{2}\frac{1}{L^3}(r_i+r_.) \\
& -\frac{3t^2}{L^3}(r_i-r_.)^2(J_2-2J_3+J_4) \\
& +\frac{9}{140}\frac{L}{R^2}(r_i+r_.)+\frac{9}{35}\nu\frac{1}{R}(z_i-z_.) \\
K_{26}^* & =-(z_i-z_.)^2(J_2-J_3-3J_4+5J_5-2J_6)+\frac{t^2}{6L^2}(2r_i+r_.) \\
& +\frac{t^2}{2L^2}(r_i-r_.)^2(2J_2-5J_3+3J_4) \\
& -\frac{L^2}{R^2}\left(\frac{1}{70}r_i+\frac{1}{60}r_.\right)-\frac{13}{210}\nu\frac{L}{R}(z_i-z_.) \\
K_{33}^* & =L(z_i-z_.)^2(J_2-4J_3+6J_4-4J_5+J_6) \\
& +\frac{1}{12}\frac{t^2}{L}\left[(r_i+3r_.)-\nu(r_i-r_.)+(r_i-r_.)^2(J_0-8J_1+22J_2-24J_3+9J_4)\right] \\
& +\frac{L^3}{R^3}\left(\frac{1}{280}r_i+\frac{1}{168}r_.\right)+\frac{2}{105}\nu\frac{L^2}{R}(z_i-z_.) \\
K_{34}^* & =\frac{1}{12}\nu(z_i-z_.)+(z_i-z_.)\nu(r_i-r_.)\left(J_2-2J_3+J_4\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{60} \frac{L}{R} [2r_i + 3r_i + 2\nu(r_i - r_i)] - \frac{1}{70} \nu \frac{L^2}{R^3} (z_i - z_i) - \frac{1}{280} \frac{L^3}{R^3} (r_i + r_i) \\
& + \frac{L}{R} (z_i - z_i)^2 (-J_3 + 3J_4 - 3J_5 + J_6) \\
& + \frac{t^2}{12RL} [r_i + 2r_i - 3(r_i - r_i)^2 (J_1 - 5J_2 + 7J_3 - 3J_4)] \\
K_{33}^* & = (z_i - z_i)^2 (3J_3 - 8J_4 + 7J_5 - 2J_6) - \frac{1}{6} \frac{t^2}{L^2} (r_i + 2r_i) \\
& + \frac{t^2}{2L^2} (r_i - r_i)^2 (J_1 - 5J_2 + 7J_3 - 3J_4) \\
& + \frac{L^2}{R^2} \left(\frac{1}{60} r_i + \frac{1}{70} r_i \right) + \frac{13}{210} \nu \frac{L}{R} (z_i - z_i) \\
K_{36}^* & = -L(z_i - z_i)^2 (J_3 - 3J_4 + 3J_5 - J_6) + \frac{1}{12} \frac{t^2}{L} (r_i + r_i) \\
& - \frac{1}{12L} (r_i - r_i)^2 (2J_1 - 11J_2 + 18J_3 - 9J_4) \\
& - \frac{1}{280} \frac{L^3}{R^2} (r_i + r_i) - \frac{1}{70} \nu \frac{L^2}{R} (z_i - z_i) \\
K_{44}^* & = \frac{1}{L} \left[\frac{1}{2} (r_i + r_i) + \nu(r_i - r_i) + (r_i - r_i)^2 J_2 \right] \\
& - \frac{1}{6} \nu \frac{1}{R} (z_i - z_i) - \frac{L}{R^2} \left[\frac{\nu}{10} (r_i - r_i) + \frac{1}{10} r_i + \frac{1}{15} r_i \right] + \frac{2}{105} \nu \frac{L^2}{R^3} (z_i - z_i) \\
& + \frac{L^3}{R^4} \left(\frac{1}{168} r_i + \frac{1}{280} r_i \right) + 2 \frac{1}{R} (r_i - r_i) (z_i - z_i) (-J_3 + J_4) \\
& + \frac{L}{R^2} (z_i - z_i)^2 (J_4 - 2J_5 + J_6) \\
& + \frac{t^2}{12R^2L} \left[\frac{3}{2} (r_i + r_i) + 9(r_i - r_i)^2 (J_2 - 2J_3 + J_4) \right] \\
K_{46}^* & = \frac{1}{L} (z_i - z_i) \left[\frac{\nu}{2} + (r_i - r_i) (3J_3 - 2J_4) \right] \\
& + \frac{1}{20R} [7r_i + 3r_i + 7\nu(r_i - r_i)] - \frac{11}{105} \nu \frac{L}{R^2} (z_i - z_i) - \frac{L^2}{R^3} \left(\frac{1}{28} r_i + \frac{1}{60} r_i \right) \\
& + \frac{1}{R} (z_i - z_i)^2 (-3J_4 + 5J_5 - 2J_6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{t^2}{12RL^2} \left[3(r_j+r_i) + 18(r_j-r_i)^2(J_2-2J_3+J_4) \right] \\
 K_{46}^* & = (z_j-z_i) \left[-\frac{\nu}{12} + (r_j-r_i)(-J_3+J_4) \right] \\
 & -\frac{1}{60R} \left[3r_j+2r_i+3\nu(r_j-r_i) \right] + \frac{2}{105} \nu \frac{L^2}{R^2} (z_j-z_i) \\
 & + \frac{L^3}{R^3} \left(\frac{1}{168} r_j + \frac{1}{280} r_i \right) + \frac{L}{R} (z_j-z_i)^2 (J_4-2J_6+J_8) \\
 & + \frac{t^2}{12RL} \left[2r_j+r_i+3(r_j-r_i)^2(2J_2-5J_3+3J_4) \right] \\
 K_{66}^* & = \frac{1}{L} (z_j-z_i)^2 (9J_4-12L_6+4J_8) + \frac{1}{2} \frac{t^2}{L^3} (r_j+r_i) + \frac{3t^2}{L^3} (r_j-r_i)^2 (J_2-2J_3+J_4) \\
 & + \frac{L}{R^2} \left(\frac{2}{7} r_j + \frac{3}{35} r_i \right) + \frac{26}{35} \nu \frac{1}{R} (z_j-z_i) \\
 K_{68}^* & = -(z_j-z_i)^2 (3J_4-5J_6+2J_8) - \frac{1}{6} \frac{t^2}{L^2} (2r_j+r_i) \\
 & - \frac{1}{2} \frac{t^2}{L^2} (r_j-r_i)^2 (2J_2-5J_3+3J_4) \\
 & - \frac{L^2}{R^2} \left(\frac{1}{28} r_j + \frac{1}{60} r_i \right) - \frac{11}{105} \nu \frac{L}{R} (z_j-z_i) \\
 K_{88}^* & = L (z_j-z_i)^2 (J_4-2J_6+J_8) + \frac{t^2}{12L} \left[(3r_j+r_i) + \nu(r_j-r_i) \right] \\
 & + \frac{t^2}{12L} (r_j-r_i)^2 (4J_2-12J_3+9J_4) \\
 & + \frac{L^3}{R^2} \left(\frac{1}{168} r_j + \frac{1}{280} r_i \right) + \frac{2}{105} \nu \frac{L^2}{R} (z_j-z_i)
 \end{aligned}$$

注:

$$(1) K_{ij}^* = K_{ji}^*, \quad (2) J_k = \int_0^{\frac{t}{r}} \frac{t^k}{r} d\xi = \sum_n (-1)^{n-1} \frac{1}{n+k} \frac{(r_j-r_i)^{n-1}}{r_i^n}$$

(3) 式中有横线者为不考虑曲率影响的刚度矩阵系数.

参 考 文 献

1. 钱伟长, 半圆弧波纹管的计算——细环壳理论的应用, 清华大学基础课力学教研组, 1978 9.
2. 钱伟长, 郑思樑 半圆弧波纹管的计算——环壳一般解的应用, 应用数学和力学, 3(1980).

3. Crafton, P. E., Strome, D. R., Analysis of axisymmetrical shells by direct stiffness method, *AIAA. J.*, 1, 10 (1963).
4. Stricklin, J. A., Novaratna, D. R., Pian, T. H. H., Improvements on the analysis of shells of revolution by the matrix displacement method, *AIAA, J.*, 4, 11 (1966).
5. Jones, R. E., Strome, D. R., Direct stiffness method analysis of shells of revolution utilizing curved elements, *AIAA. J.*, 14, 9 (1966).
6. Cook, R. D., *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, (1974).
7. Zienkiewicz, O. C., *The Finite Element Method in Engineering Science*, (1971).
8. Witmer, E. A., Kotanchik, J. J., Program report on discrete-element elastic and elastic-plastic analysis of shells of revolution subjected to axisymmetric and asymmetric loading, *Proceedings of the Second Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics*.
9. Turner, C. E. and Ford, H., Stress and deflection studies of pipeline expansions bellows, *Proceedings of the Institute of Mechanical Engineers*, 171, (1957).
10. 谢大吉等, C型波纹壳应力分布及变形测定 (未发表) .

Finite Element Method of Axial Symmetrical Shell with Abrupt Change of Curvature (Corrugated Tubes)

Shieh Chih-cheng Fu Cheng-sung Zheng Si-liang

(Tsinghua University, Beijing)

Abstract

It is shown in this paper that due to the neglecting of curvature effect in the calculation of deformation of slope, the ordinary straight line finite elements are not suitable for the calculation of axile symmetrical shells with abrupt change of curvature. A new straight line finite element is proposed by considering the curvature effect on the deformation of slope, and regarding the deformation of slope as a continuously varied parameter. This new straight-line element is used for the calculation of semi-circular arc type corrugated tubes. The computed results are compared with Turner-Ford Experiments and also with computed results by analytical solution of slender ring theory given by Prof. Chien Wei-zang (1979)