

具有弹性边拱及拉杆支承的双曲扁壳(二)

卢文达

(西安水电部热工研究所 1979年11月6日收到)

四、积分形式的边界条件

为了研究边界条件(91_a; _d)的积分形式首先将(97_{C, D})中的 $N_{\xi\eta}(0, \eta)$, $Q_{\xi}^*(0, \eta)$ 用三角级数表示. 设

$$\left. \begin{aligned} N_{\xi\eta}(0, \eta) &= \sum_{m=1,3,5}^{\infty} N_m \cos m\eta \\ Q_{\xi}^*(0, \eta) &= \sum_{m=1,3,5}^{\infty} Q_m^* \sin m\eta \end{aligned} \right\} \quad (99)$$

其中 N_m , Q_m^* 为 A_m , B_m 的函数, 根据(97_{C, D})和(98_{A, B, C, D}), 将(97_{C, D})展开为(99)式的三角级数即可证明为:

$$\begin{aligned} N_m = & -\frac{2\lambda^2}{m\pi(m^4 + \lambda^4)} \operatorname{th} \frac{m\pi}{2} - mA_m \Phi_m^7(0) - mB_m \Phi_m^8(0) \\ & - \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{8\lambda^2}{(m^2 + n^2)(n^4 + \lambda^4)\pi^2} \\ & - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} A_n \frac{2n\lambda^2 m^2}{(m^2 + n^2)^2 + \lambda^4} \left[\frac{-\lambda^2}{m^2 + n^2} \operatorname{ch} \frac{P_n \pi}{2} \cos \frac{Q_n \pi}{2} + \operatorname{sh} \frac{P_n \pi}{2} \sin \frac{Q_n \pi}{2} \right] \\ & - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} B_n \frac{2n\lambda^2 m^2}{(m^2 + n^2)^2 + \lambda^4} \left[\frac{-\lambda^2}{m^2 + n^2} \operatorname{sh} \frac{P_n \pi}{2} \sin \frac{Q_n \pi}{2} - \operatorname{ch} \frac{P_n \pi}{2} \cos \frac{Q_n \pi}{2} \right] \end{aligned} \quad (m=1,3,5\cdots) \quad (100A)$$

$$\begin{aligned} Q_m^* = & -\frac{2m^2\mu}{\pi(m^4 + \lambda^4)} \operatorname{th} \frac{m\pi}{2} - \alpha_m' A_m + \beta_m' B_m + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{4n^2[n^2 + (1-\mu)m^2]}{\pi m(m^2 + n^2)(n^4 + \lambda^4)} \\ & - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} A_n \frac{2m\lambda^2 n}{[(m^2 + n^2)^2 + \lambda^4](m^2 + n^2)} \left\{ [(1-\mu)m^2(m^2 + n^2) \right. \\ & \left. - \lambda^4] \operatorname{ch} \frac{P_n \pi}{2} \cos \frac{Q_n \pi}{2} + \lambda^2[n^2 + m^2(2-\mu)] \operatorname{sh} \frac{P_n \pi}{2} \sin \frac{Q_n \pi}{2} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} B_n \frac{2mn\lambda^2}{[(m^2+n^2)^2+\lambda^4](m^2+n^2)} \left\{ [(1-\mu)m^2(m^2+n^2)-\lambda^4] \operatorname{sh} \frac{P_n\pi}{2} \right. \\
 & \left. \cdot \sin \frac{Q_n\pi}{2} - \lambda^2 [n^2+m^2(2-\mu)] \operatorname{ch} \frac{P_n\pi}{2} \cos \frac{Q_n\pi}{2} \right\} \\
 & \qquad \qquad \qquad (m=1,3,5,\dots)
 \end{aligned} \tag{100B}$$

如果我们把 (99) 式中的 $N_{\xi n}(0, \eta)$, $Q_{\xi}^*(0, \eta)$ 代入 (91b, d), 然后将这两边界条件沿边界积分, 这就等于把 (91b, d) 中 $N_{\xi n}(0, \eta)$, $Q_{\xi}^*(0, \eta)$ 看作为边框上所受到的壳内边界力, 亦等于求边框在这种边界力作用下所产生的变形位移. 如果这样积分求得的边框 ($\xi=0$) 变形位移为 $W(\eta)$ 和 $V(\eta)$, 则这个变形位移一定和壳的边界变形位移 (96c) 和 (96D) 处处相等的. 这就给出了决定 $A_m(A_n)$ 和 $B_m(B_n)$ 的一切条件.

将 (99) 式代入 (91b, d) 得

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{dT_\eta}{d\eta} &= - \sum_{m=1,3,5}^{\infty} N_m \cos m\eta \\
 \frac{d^2G_\eta}{d\eta^2} &= \sum_{m=1,3,5}^{\infty} Q_m^* \sin m\eta + f + \lambda^2 T_\eta
 \end{aligned} \right\} \tag{101}$$

积分 (101) 第一式, 得

$$T_\eta(\eta) = T_0 - \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{m} N_m \sin m\eta \tag{102}$$

其中 T_0 为积分常数, 代表作用在角点上水平反作用力的分量, 见 (89a, b), 将 (100) 式代入 (101) 式第二式, 积分两次, 得

$$G_\eta(\eta) = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{m^2} \left(\frac{\lambda^2 N_m}{m} - Q_m^* \right) \sin m\eta + \frac{1}{2} (f + \lambda^2 T_0) \eta^2 + A_\eta + B \tag{103}$$

积分常数 A, B 可以根据角点条件 $G_\eta(0) = G_\eta(\pi) = 0$ 决定. 结果为

$$A = -\frac{1}{2} (f + \lambda^2 T_0) \pi, \quad B = 0 \tag{104}$$

于是, (103) 式写成

$$G_\eta(\eta) = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{m^2} \left(\frac{\lambda^2 N_m}{m} - Q_m^* \right) \sin m\eta + \frac{1}{2} (f + \lambda^2 T_0) (\eta - \pi) \eta \tag{105}$$

现在让我们利用 (90) 式解出 $\frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2}$, $\frac{\partial V}{\partial \eta} - \lambda^2 W$, 得

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} &= \frac{1}{G - f\tau^2} \{ \tau T_\eta(\eta) + G_\eta(\eta) \} \\
 \frac{\partial V}{\partial \eta} - \lambda^2 W &= \frac{1}{G - f\tau^2} \left\{ \frac{G}{f} T_\eta(\eta) + \tau G_\eta(\eta) \right\}
 \end{aligned} \right\} \tag{106}$$

将 (102), (105) 式中的 $T_\eta(\eta)$, $G_\eta(\eta)$ 代入 (106) 第一式, 积分并利用角点条件 (94) 式中 $W(0) = W(\pi) = 0$, 得

$$W(0, \eta) = \frac{1}{G - f\tau^2} \left\{ \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \left[\frac{\tau}{m^3} N_m + \frac{1}{m^4} Q_m^* - \frac{\lambda^2}{m^5} N_m \right] \sin m\eta \right. \\ \left. + \frac{1}{24} (f + \lambda^2 T_0) (\eta^4 - 2\pi\eta^3 + \pi^3\eta) + \tau T_0 \eta (\eta - \pi) \right\} \quad (107)$$

把 (102), (105), (107) 式中的 $T_\eta(\eta), G_\eta(\eta), W(0, \eta)$ 代入 (106) 第二式积分一次, 得

$$V(0, \eta) = \frac{1}{G - f\tau^2} \left\{ - \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \left[\left(\frac{2\tau\lambda^2}{m^4} - \frac{G}{fm^2} - \frac{\lambda^4}{m^5} \right) N_m + \left(\frac{\lambda^2}{m^5} - \frac{\tau}{m^3} \right) Q_m^* \right] \cos m\eta \right. \\ \left. + (f + \lambda^2 T_0) \left[\frac{\tau}{2} \left(\frac{1}{3} \eta^3 - \frac{\pi}{2} \eta^2 \right) + \frac{\lambda^2}{24} \left(\frac{1}{5} \eta^5 - \frac{1}{2} \pi \eta^4 + \frac{1}{2} \pi^3 \eta^2 \right) \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \tau \lambda^2 T_0 \left(\frac{1}{3} \eta^3 - \frac{1}{2} \pi \eta^2 \right) + \frac{G}{f} T_0 \eta + C \right\} \quad (108)$$

其中 C 为另一积分常数, 它和 T_0 在一起, 是由角点条件 $V(0, 0) = V(0, \pi) = 0$ 所决定的. 由此得

$$C = \frac{1}{G - f\tau^2} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \left\{ \left(\frac{2\tau\lambda^2}{m^4} - \frac{G}{fm^2} - \frac{\lambda^4}{m^5} \right) N_m + \left(\frac{\lambda^2}{m^5} - \frac{\tau}{m^3} \right) Q_m^* \right\} \quad (109)$$

$$T_0 = \frac{1}{\frac{G}{f} + \frac{1}{120} \lambda^4 \pi^4 - \frac{1}{6} \tau \lambda^2 \pi^2} \left\{ \frac{\pi^2}{12} \tau f - \frac{\pi^4}{120} \lambda^2 f - \frac{2}{\pi} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \left[\left(\frac{2\tau\lambda^2}{m^4} - \frac{G}{fm^2} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \frac{\lambda^4}{m^5} \right) N_m + \left(\frac{\lambda^2}{m^5} - \frac{\tau}{m^3} \right) Q_m^* \right] \right\} \quad (110)$$

于是 (108) 式可以写成

$$V(0, \eta) = \frac{1}{G - f\tau^2} \left\{ - \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \left[\left(\frac{2\tau\lambda^2}{m^4} - \frac{G}{fm^2} - \frac{\lambda^4}{m^5} \right) N_m + \left(\frac{\lambda^2}{m^5} - \frac{\tau}{m^3} \right) Q_m^* \right] \cos m\eta \right. \\ \left. + \frac{1}{24} (f + \lambda^2 T_0) \left[\frac{1}{10} \lambda^2 (2\eta^5 - 5\pi\eta^4 + 5\pi^3 \eta^2 - \pi^5) + \tau (4\eta^3 - 6\pi \eta^2 + \pi^3) \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{24} \lambda^2 \tau T_0 (4\eta^3 - 6\pi \eta^2 + \pi^3) + \frac{1}{f} G T_0 \left(\eta - \frac{\pi}{2} \right) \right\} \quad (111)$$

同样, 利用 OC 边上的边界力表达式

$$\left. \begin{aligned} N_{\eta\xi}(\xi, 0) &= \sum_{m=1,3,5}^{\infty} N_m \cos m\xi \\ Q_\eta^*(\xi, 0) &= \left(\frac{\partial M_\eta}{\partial \eta} + 2 \frac{\partial M_{\eta\xi}}{\partial \xi} \right)_{\eta=0} = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} Q_m^* \sin m\xi \end{aligned} \right\} \quad (112)$$

(93b, d) 也可以积分, 在利用了角点条件后, 得

$$W(\xi, 0) = \frac{1}{G - f\tau^2} \left\{ \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \left[\frac{\tau}{m^3} N_m + \frac{1}{m^4} Q_m^* - \frac{1}{m^5} \lambda^2 N_m \right] \sin m\xi \right.$$

$$+\frac{1}{24}(f+\lambda^2 T_0)(\xi^4-2\pi\xi^3+\pi^3\xi)+\frac{1}{2}\tau T_0\xi(\xi-\pi)\} \quad (113A)$$

$$U(\xi,0)=\frac{1}{G-f\tau^2}\left\{-\sum_{m=1,3,5}^{\infty}\left[\left(\frac{2\tau\lambda^2}{m^4}-\frac{G}{fm^2}-\frac{\lambda^4}{m^6}\right)N_m\right.\right. \\ \left.+\left(\frac{\lambda^2}{m^5}-\frac{\tau}{m^3}\right)Q_m^*\right]\cos m\xi+\frac{1}{24}(f+\lambda^2 T_0)\left[\frac{\lambda^2}{10}(2\xi^5-5\pi\xi^4\right. \\ \left.+5\pi^3\xi^2-\pi^5)+\tau(4\xi^3-6\pi\xi^2+\pi^3)\right] \\ \left.+\frac{1}{24}\lambda^2\tau T_0(4\xi^3-6\pi\xi^2+\pi^3)+\frac{1}{f}GT_0\left(\xi-\frac{\pi}{2}\right)\right\} \quad (113B)$$

到此为止，我们求得边拱在壳的边界力作用下的变形位移 (107)，(111)，(113A,B)，其中 N_m ， Q_m^* 代表边界力，由(99)，(100)所定义， T_0 表示角点反作用力，由(110)式所定义。只要 $A_m(A_n)$ ， $B_m(B_n)$ 知道，这些边界位移就完全可以决定

(107)，(111)和(113A,B)也可以看作为壳内的位移解必须满足的边界值，亦即看作为代替边界条件(91b,d)，(93b,d)及全部角点条件的新的积分形式的边界条件。

五、决定待定常数 T_0, A_m, B_m 的方程式

现在将(96A,B)的 $U(\xi,0)$ ， $W(\xi,0)$ 和(113A,B)的 $U(\xi,0)$ ， $W(\xi,0)$ 互等起来，即得

$$(G-f\tau^2)\sum_{m=1,3,5}^{\infty}\left\{\frac{2}{1-\mu}\frac{1}{m\pi(m^4+\lambda^4)}-A_m\frac{\lambda^2}{(1-\mu)m^2}\operatorname{ch}\frac{P_m\pi}{2}\cos\frac{Q_m\pi}{2}\right. \\ \left.-B_m\frac{\lambda^2}{(1-\mu)m^2}\operatorname{sh}\frac{P_m\pi}{2}\sin\frac{Q_m\pi}{2}\right\}\sin m\xi \\ =\sum_{m=1,3,5}^{\infty}\left\{\frac{\tau}{m^3}N_m+\frac{1}{m^4}Q_m^*-\frac{1}{m^6}\lambda^2N_m\right\}\sin m\xi \\ +\frac{1}{24}(f+\lambda^2 T_0)(\xi^4-2\pi\xi^3+\pi^3\xi)+\frac{1}{2}\tau T_0\xi(\xi-\pi) \quad (114A) \\ -(G-f\tau^2)\sum_{m=1,3,5}^{\infty}\frac{1}{m}\left\{\frac{\mu}{1-\mu}\frac{2\lambda^2}{m\pi(m^4+\lambda^4)}-A_m\left[\lambda^2\operatorname{sh}\frac{P_m\pi}{2}\sin\frac{Q_m\pi}{2}\right.\right. \\ \left.+\frac{\lambda^4}{(1-\mu)m^2}\operatorname{ch}\frac{P_m\pi}{2}\cos\frac{Q_m\pi}{2}\right]+B_m\left[\lambda^2\operatorname{ch}\frac{P_m\pi}{2}\cos\frac{Q_m\pi}{2}\right. \\ \left.-\frac{\lambda^4}{(1-\mu)m^2}\operatorname{sh}\frac{P_m\pi}{2}\sin\frac{Q_m\pi}{2}\right]\left.\right\}\cos m\xi \\ =-\sum_{m=1,3,5}^{\infty}\left[\left(\frac{2\tau\lambda^2}{m^4}-\frac{G}{fm^2}-\frac{\lambda^4}{m^6}\right)N_m+\left(\frac{\lambda^2}{m^5}-\frac{\tau}{m^3}\right)Q_m^*\right]\cos m\xi$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{24} (f + \lambda^2 T_0) \left[\frac{1}{10} \lambda^2 (2\xi^5 - 5\pi\xi^4 + 5\pi^3\xi^2 - \pi^5) + \tau(4\xi^3 - 6\pi\xi^2 + \pi^3) \right] \\
& + \frac{1}{24} \lambda^2 \tau T_0 (4\xi^3 - 6\pi\xi^2 + \pi^3) + \frac{1}{f} G T_0 \left(\xi - \frac{\pi}{2} \right) \quad (114B)
\end{aligned}$$

将上述两个式子分别展开为 $\sin m\xi$, 和 $\cos m\xi$ 级数, 取 m 项, 得

$$\begin{aligned}
(G - f\tau^2) & \left\{ \frac{2}{1-\mu} \frac{1}{m\pi(m^4 + \lambda^4)} - A_m \frac{\lambda^2}{(1-\mu)m^2} \operatorname{ch} \frac{P_m\pi}{2} \cos \frac{Q_m\pi}{2} \right. \\
& \left. - B_m \frac{\lambda^2}{(1-\mu)m^2} \operatorname{sh} \frac{P_m\pi}{2} \sin \frac{Q_m\pi}{2} \right\} \\
& = \frac{\tau}{m^3} N_m + \frac{1}{m^4} Q_m^* - \frac{1}{m^5} \lambda^2 N_m + \frac{4}{\pi m^5} (f + \lambda^2 T_0) - \frac{4}{\pi m^3} \tau T_0 \quad (115A)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-(G - f\tau^2) & \frac{1}{m} \left\{ \frac{\mu}{1-\mu} \frac{2\lambda^2}{m\pi(m^4 + \lambda^4)} - A_m \left[\lambda^2 \operatorname{sh} \frac{P_m\pi}{2} \sin \frac{Q_m\pi}{2} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\lambda^4}{(1-\mu)m^2} \operatorname{ch} \frac{P_m\pi}{2} \cos \frac{Q_m\pi}{2} \right] + B_m \left[\lambda^2 \operatorname{ch} \frac{P_m\pi}{2} \cos \frac{Q_m\pi}{2} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\lambda^4}{(1-\mu)m^2} \operatorname{sh} \frac{P_m\pi}{2} \sin \frac{Q_m\pi}{2} \right] \right\} \\
& = - \left(\frac{2\tau\lambda^2}{m^4} - \frac{G}{fm^2} - \frac{\lambda^4}{m^6} \right) N_m - \left(\frac{\lambda^2}{m^5} - \frac{\tau}{m^3} \right) Q_m^* + \frac{4\tau}{\pi m^4} (f + \lambda^2 T_0) \\
& - \frac{4\lambda^2}{\pi m^6} (f + \lambda^2 T_0) + \frac{4\tau\lambda^2 T_0}{\pi m^4} - \frac{4}{\pi m^2} G T_0 \frac{1}{f} \quad (115B)
\end{aligned}$$

从(115A), (115B)中解出 N_m 和 Q_m^* , 并注意到行列式

$$\begin{vmatrix} \frac{\tau}{m^3} - \frac{\lambda^2}{m^5} & \frac{1}{m^4} \\ \frac{2\tau\lambda^2}{m^4} - \frac{G}{fm^2} - \frac{\lambda^4}{m^6} & \frac{\lambda^2}{m^5} - \frac{\tau}{m^3} \end{vmatrix} = \frac{1}{fm^6} (G - f\tau^2) \quad (116)$$

于是得

$$\begin{aligned}
N_m & = \frac{4T_0}{\pi} + \frac{2f}{\pi(m^4 + \lambda^4)} \left(\lambda^2 - \frac{\tau^2 m^2}{1-\mu} \right) + A_m f m \lambda^2 \left(\frac{\tau}{1-\mu} \operatorname{ch} \frac{P_m\pi}{2} \cos \frac{Q_m\pi}{2} \right. \\
& \left. + \operatorname{sh} \frac{P_m\pi}{2} \sin \frac{Q_m\pi}{2} \right) + B_m f m \lambda^2 \left(\frac{\tau}{1-\mu} \operatorname{sh} \frac{P_m\pi}{2} \sin \frac{Q_m\pi}{2} \right. \\
& \left. - \operatorname{ch} \frac{P_m\pi}{2} \cos \frac{Q_m\pi}{2} \right) \quad (117A)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_m^* & = - \frac{4f}{\pi m} + \frac{2m^3}{\pi(1-\mu)(m^4 + \lambda^4)} \left\{ (G - f\tau^2) + f \left[(1-\mu) \frac{\lambda^2}{m^2} - \tau \right] \left(\frac{\lambda^2}{m^2} \right. \right. \\
& \left. \left. - \tau \right) \right\} + A_m \left\{ f \lambda^2 (\lambda^2 - m^2 \tau) \operatorname{sh} \frac{P_m\pi}{2} \sin \frac{Q_m\pi}{2} + \frac{\lambda^2}{1-\mu} (f\tau\lambda^2 \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - Gm^2 \left. \operatorname{ch} \frac{P_m \pi}{2} \cos \frac{Q_m \pi}{2} \right\} + B_m \left\{ -f\lambda^2(\lambda^2 - m^2 \tau) \operatorname{ch} \frac{P_m \pi}{2} \cos \frac{Q_m \pi}{2} \right. \\
& \left. + \frac{\lambda^2}{1-\mu} (f\tau\lambda^2 - Gm^2) \operatorname{sh} \frac{P_m \pi}{2} \sin \frac{Q_m \pi}{2} \right\} \quad (117B)
\end{aligned}$$

将(117A)和(100A)相等, (117B)和(100B)相等, 即求得决定 A_m, B_m 的两式:

$$\begin{aligned}
& -2T_0 + \frac{1}{m^4 + \lambda^4} \left[\frac{f\tau^2 m^2}{1-\mu} - \lambda^2 \left(\frac{1}{m} \operatorname{th} \frac{m\pi}{2} + f \right) \right] - \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{4\lambda^2}{\pi(n^4 + \lambda^4)(m^2 + n^2)} \\
& + A_m \frac{m\pi}{2} \left[P_m \operatorname{sh} \frac{P_m \pi}{2} \cos \frac{Q_m \pi}{2} - Q_m \operatorname{ch} \frac{P_m \pi}{2} \sin \frac{Q_m \pi}{2} \right. \\
& \left. - \left(m \operatorname{th} \frac{m\pi}{2} + \frac{f\tau\lambda^2}{1-\mu} \right) \operatorname{ch} \frac{P_m \pi}{2} \cos \frac{Q_m \pi}{2} - f\lambda^2 \operatorname{sh} \frac{P_m \pi}{2} \sin \frac{Q_m \pi}{2} \right] \\
& + B_m \frac{m\pi}{2} \left[P_m \operatorname{ch} \frac{P_m \pi}{2} \sin \frac{Q_m \pi}{2} + Q_m \operatorname{sh} \frac{P_m \pi}{2} \cos \frac{Q_m \pi}{2} \right. \\
& \left. - \left(m \operatorname{th} \frac{m\pi}{2} + \frac{f\tau\lambda^2}{1-\mu} \right) \operatorname{sh} \frac{P_m \pi}{2} \sin \frac{Q_m \pi}{2} + f\lambda^2 \operatorname{ch} \frac{P_m \pi}{2} \cos \frac{Q_m \pi}{2} \right] \\
& + \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{2\lambda^2 m^2 n A_n}{(m^2 + n^2)^2 + \lambda^4} \left\{ \frac{\lambda^2}{m^2 + n^2} \operatorname{ch} \frac{P_n \pi}{2} \cos \frac{Q_n \pi}{2} \right. \\
& \left. - \operatorname{sh} \frac{P_n \pi}{2} \sin \frac{Q_n \pi}{2} \right\} + \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{2\lambda^2 m^2 n B_n}{(m^2 + n^2)^2 + \lambda^4} \left\{ \frac{\lambda^2}{m^2 + n^2} \operatorname{sh} \frac{P_n \pi}{2} \sin \frac{Q_n \pi}{2} \right. \\
& \left. + \operatorname{ch} \frac{P_n \pi}{2} \cos \frac{Q_n \pi}{2} \right\} = 0 \quad (118A)
\end{aligned}$$

$$(m=1, 3, 5, \dots)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2f}{m^2} + \frac{1}{m^4 + \lambda^4} \left[m\mu \operatorname{th} \frac{m\pi}{2} + \frac{f\lambda^4}{m^2} - \frac{2-\mu}{1-\mu} f\tau\lambda^2 + \frac{Gm^2}{1-\mu} \right] \\
& + A_m \frac{\pi}{2} \left\{ \left[(1-\mu)mP_m + \frac{1}{m} \lambda^2 Q_m \right] \operatorname{ch} \frac{P_m \pi}{2} \sin \frac{Q_m \pi}{2} + \left[(1-\mu)mQ_m \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\lambda^2}{m} P_m \right] \operatorname{sh} \frac{P_m \pi}{2} \cos \frac{Q_m \pi}{2} + \left[\frac{1}{m} f\lambda^4 - \tau f\lambda^2 m - (1-\mu) m^2 \operatorname{th} \frac{m\pi}{2} \right] \right. \\
& \left. \cdot \operatorname{sh} \frac{P_m \pi}{2} \sin \frac{Q_m \pi}{2} + \left[\frac{f\tau\lambda^4 - Gm^2 \lambda^2}{m(1-\mu)} - \lambda^2 \operatorname{th} \frac{m\pi}{2} \right] \operatorname{ch} \frac{P_m \pi}{2} \cos \frac{Q_m \pi}{2} \right\} \\
& + B_m \frac{\pi}{2} \left\{ - \left[(1-\mu)mP_m + \frac{\lambda^2}{m} Q_m \right] \operatorname{sh} \frac{P_m \pi}{2} \cos \frac{Q_m \pi}{2} + \left[\frac{f\tau\lambda^4 - Gm^2 \lambda^2}{m(1-\mu)} \right. \right. \\
& \left. \left. - \lambda^2 \operatorname{th} \frac{m\pi}{2} \right] \operatorname{sh} \frac{P_m \pi}{2} \sin \frac{Q_m \pi}{2} + \left[(1-\mu)mQ_m - \frac{\lambda^2}{m} P_m \right] \operatorname{ch} \frac{P_m \pi}{2} \sin \frac{Q_m \pi}{2} \right. \\
& \left. - \left[\frac{1}{m} f\lambda^4 - \tau f\lambda^2 m - (1-\mu)m^2 \operatorname{th} \frac{m\pi}{2} \right] \operatorname{ch} \frac{P_m \pi}{2} \cos \frac{Q_m \pi}{2} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{4\mu}{\pi} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{n^2}{(n^4 + \lambda^4)(n^2 + m^2)} - \frac{4}{m^2\pi} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{n^2}{n^4 + \lambda^4} \\
& + \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{2n\lambda^2 A_n}{(n^2 + m^2)[(n^2 + m^2)^2 + \lambda^4]} \left\{ [m^2(1-\mu)(m^2 + n^2) - \lambda^4] \operatorname{ch} \frac{P_n\pi}{2} \right. \\
& \cdot \left. \cos \frac{Q_n\pi}{2} + \lambda^2[(2-\mu)m^2 + n^2] \operatorname{sh} \frac{P_n\pi}{2} \sin \frac{Q_n\pi}{2} \right\} \\
& + \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{2n\lambda^2 B_n}{(n^2 + m^2)[(n^2 + m^2)^2 + \lambda^4]} \left\{ [m^2(1-\mu)(m^2 + n^2) - \lambda^4] \operatorname{sh} \frac{P_n\pi}{2} \right. \\
& \cdot \left. \sin \frac{Q_n\pi}{2} - \lambda^2[(2-\mu)m^2 + n^2] \operatorname{ch} \frac{P_n\pi}{2} \cos \frac{Q_n\pi}{2} \right\} \quad (118B) \\
& \qquad \qquad \qquad (m=1,3,5,\dots)
\end{aligned}$$

这里必须指出, (118A, B) 两式几乎完全适用于四角简支的情况, 其仅有差别只在 (118A) 中在这里多了一项角顶反力的作用, 即多了 $-2T_0$ 这一项. 这一点不难从简支角点条件(95)便可证实.

这样就大大简化了计算数值系数的工作, 亦即是说, 方程组 (118A, B) 可以原封不动地用来计算四角简支的问题, 其仅有的差别, 只须在 (118A) 式中去掉一项 $-2T_0$.

最后我们还必须解决求 T_0 的方程问题. 或即对于求解 A_m 、 B_m 和 T_0 的问题, 除了利用 (118A, B) 的 $2m$ 个方程以外, 还缺少一个求解条件. 这个条件应该从 (110) 式求得.

把 (117A, B) 中的 N_m 、 Q_m^* 表达式代入 (110) 式, 即得我们所需要的条件. 这个代入运算也可以利用 (115B) 式解出 $\left(\frac{2\tau\lambda^2}{m^4} - \frac{G}{fm^2} - \frac{\lambda^4}{m^6}\right) N_m + \left(\frac{\lambda^2}{m^5} - \frac{\tau}{m^3}\right) Q_m^*$, 直接代入 (110) 式. 即得

$$\begin{aligned}
\left(\frac{G}{f} + \frac{1}{120}\lambda^4\pi^4 - \frac{1}{6}\tau\lambda^2\pi^2\right) T_0 &= \frac{\pi^2}{12}\tau f - \frac{\pi^4}{120}\lambda^2 f \\
& - \frac{2}{\pi} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \left\{ \frac{4\tau}{\pi m^4} (f + \lambda^2 T_0) - \frac{4\lambda^2}{\pi m^6} (f + \lambda^2 T_0) + \frac{4\tau\lambda^2 T_0}{\pi m^4} - \frac{4}{\pi m^2} G T_0 \frac{1}{f} \right\} \\
& - \frac{2}{\pi} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} (G - f\tau^2) \frac{1}{m} \left\{ \frac{\mu}{1-\mu} \frac{2\lambda^2}{\pi m(m^4 + \lambda^4)} - A_m \left[\lambda^2 \operatorname{sh} \frac{P_m\pi}{2} \sin \frac{Q_m\pi}{2} \right. \right. \\
& + \frac{\lambda^4}{(1-\mu)m^2} \operatorname{ch} \frac{P_m\pi}{2} \cos \frac{Q_m\pi}{2} \left. \right] + B_m \left[\lambda^2 \operatorname{ch} \frac{P_m\pi}{2} \cos \frac{Q_m\pi}{2} - \frac{\lambda^4}{(1-\mu)m^2} \right. \\
& \cdot \left. \operatorname{sh} \frac{P_m\pi}{2} \sin \frac{Q_m\pi}{2} \right] \left. \right\} \quad (119)
\end{aligned}$$

这个方程可以大大简化, 由于

$$\sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{4}{\pi n^3} = \frac{\pi^3}{24}, \quad \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{4}{\pi n^5} = \frac{\pi^5}{240}, \quad \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{4}{m\pi^2} = \frac{\pi}{2} \quad (120)$$

上式可简化为

$$\sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{m} \left\{ \frac{\mu}{1-\mu} \frac{2\lambda^2}{m\pi(m^4+\lambda^4)} - A_m \left[\lambda^2 \operatorname{sh} \frac{P_m\pi}{2} \sin \frac{Q_m\pi}{2} + \frac{\lambda^4}{(1-\mu)m^2} \operatorname{ch} \frac{P_m\pi}{2} \right. \right. \\ \left. \left. \cdot \cos \frac{Q_m\pi}{2} \right] + B_m \left[\lambda^2 \operatorname{ch} \frac{P_m\pi}{2} \cos \frac{Q_m\pi}{2} - \frac{\lambda^4}{(1-\mu)m^2} \operatorname{sh} \frac{P_m\pi}{2} \sin \frac{Q_m\pi}{2} \right] \right\} = 0 \quad (121)$$

(121) 式即为前面所说的缺少的一个补充条件。在实质上这个条件是角点水平位移等于零的条件，它可以从 (77A, B) 中在 $\xi = \eta = 0$ 的条件下求得，即亦 $U(0,0) = 0$ 或 $V(0,0) = 0$ 中求得。

总起来说，(118A, B) 和 (121) 式为求解 A_m 、 B_m 和 T_0 等 $2m+1$ 个待定系数的联立方程式。当求得这些常数以后，本问题的解，它的应力分布或内力素分布和位移分布就可以求得。这里 T_0 直接给出角点的水平反作用力，或即拉杆的拉力。

六、几个级数的求和

在方程 (118A, B) 中有几个级数，对于不同的 m 值和 λ 值通过数值计算求和，比较冗繁，下面证明可以通过分析方法求和：

我们要证明

$$\chi_1(\lambda) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{n^2}{n^4 + \lambda^4} = \frac{1}{\sqrt{2}\lambda} \frac{\operatorname{sh} \frac{\lambda\pi}{\sqrt{2}} + \sin \frac{\lambda\pi}{\sqrt{2}}}{\operatorname{ch} \frac{\lambda\pi}{\sqrt{2}} + \cos \frac{\lambda\pi}{\sqrt{2}}} \quad (122)$$

$$\chi_2(m, \lambda) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{(n^4 + \lambda^4)(m^2 + n^2)} \\ = \frac{1}{\sqrt{2}\lambda(m^4 + \lambda^4)} \left\{ - \frac{\operatorname{sh} \frac{\lambda\pi}{\sqrt{2}} + \sin \frac{\lambda\pi}{\sqrt{2}}}{\operatorname{ch} \frac{\lambda\pi}{\sqrt{2}} + \cos \frac{\lambda\pi}{\sqrt{2}}} + \frac{m^2}{\lambda^2} \frac{\operatorname{sh} \frac{\lambda\pi}{\sqrt{2}} - \sin \frac{\lambda\pi}{\sqrt{2}}}{\operatorname{ch} \frac{\lambda\pi}{\sqrt{2}} + \cos \frac{\lambda\pi}{\sqrt{2}}} \right\} \\ + \frac{\operatorname{th} \frac{m\pi}{2}}{m(m^4 + \lambda^4)} \quad (123)$$

$$\chi_3(m, \lambda) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{n^2}{(n^4 + \lambda^4)(m^2 + n^2)} \\ = \frac{\lambda}{\sqrt{2}(m^4 + \lambda^4)} \left\{ \frac{\operatorname{sh} \frac{\lambda\pi}{\sqrt{2}} - \sin \frac{\lambda\pi}{\sqrt{2}}}{\operatorname{ch} \frac{\lambda\pi}{\sqrt{2}} + \cos \frac{\lambda\pi}{\sqrt{2}}} + \frac{m^2}{\lambda^2} \frac{\operatorname{sh} \frac{\lambda\pi}{\sqrt{2}} + \sin \frac{\lambda\pi}{\sqrt{2}}}{\operatorname{ch} \frac{\lambda\pi}{\sqrt{2}} + \cos \frac{\lambda\pi}{\sqrt{2}}} \right\}$$

$$-\frac{m}{m^4 + \lambda^4} \operatorname{th} \frac{m\pi}{2} \quad (124)$$

现在我们证明这些关系式

设求下列微分方程的解

$$\frac{d^4 \chi}{d\eta^4} + \lambda^4 \chi = 1 \quad (125)$$

其边界条件为 $\chi(0) = \chi(\pi) = \chi''(0) = \chi''(\pi) = 0$. 这个方程的三角级数解为

$$\chi = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n(n^4 + \lambda^4)} \sin n\eta \quad (126)$$

这个解也可以用一般线性微分方程的解法求得, 其结果为

$$\begin{aligned} \chi = & \frac{1}{\lambda^4} - \frac{1}{\lambda^4 \Delta} \left\{ \operatorname{ch} \frac{\lambda\pi}{2\sqrt{2}} \cos \frac{\lambda\pi}{2\sqrt{2}} \operatorname{ch} \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \left(\eta - \frac{\pi}{2} \right) \cos \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \left(\eta - \frac{\pi}{2} \right) \right. \\ & \left. + \operatorname{sh} \frac{\lambda\pi}{2\sqrt{2}} \sin \frac{\lambda\pi}{2\sqrt{2}} \operatorname{sh} \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \left(\eta - \frac{\pi}{2} \right) \sin \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \left(\eta - \frac{\pi}{2} \right) \right\} \quad (127) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \Delta = & \operatorname{ch}^2 \frac{\lambda\pi}{2\sqrt{2}} \cos^2 \frac{\lambda\pi}{2\sqrt{2}} + \operatorname{sh}^2 \frac{\lambda\pi}{2\sqrt{2}} \sin^2 \frac{\lambda\pi}{2\sqrt{2}} \\ = & \frac{1}{2} \left(\operatorname{ch} \frac{\lambda\pi}{\sqrt{2}} + \cos \frac{\lambda\pi}{\sqrt{2}} \right) \quad (128) \end{aligned}$$

(126) 和 (127) 代表同一方程的解, 一定处处相等. 这也可以通过将 (127) 式展开为三角级数求得证明. $\chi_1(\lambda)$ 即和 $\chi'''(\pi)$ 完全相等, 从 (127) 可以求得

$$\chi_1(\lambda) = \chi'''(\pi) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{n^2}{n^4 + \lambda^4} = \frac{1}{\sqrt{2}\lambda} \frac{\operatorname{sh} \frac{\lambda\pi}{\sqrt{2}} + \sin \frac{\lambda\pi}{\sqrt{2}}}{\operatorname{ch} \frac{\lambda\pi}{\sqrt{2}} + \cos \frac{\lambda\pi}{\sqrt{2}}}$$

这就证明了(122)式.

现在让我们研究微分方程式

$$\left(\frac{d^2}{d\eta^2} - m^2 \right) \left(\frac{d^4 \chi}{d\eta^4} + \lambda^4 \chi \right) = 1 \quad (129)$$

的解, 其边界条件为 $\chi(0) = \chi(\pi) = \chi''(0) = \chi''(\pi) = \chi^{(4)}(0) = \chi^{(4)}(\pi) = 0$, 其三角级数的解为

$$\chi = -\frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n(m^2 + n^2)(n^4 + \lambda^4)} \sin n\eta \quad (130)$$

但是这个解也可以用一般方法求得

$$\begin{aligned}
 \chi = & -\frac{1}{m^2\lambda^4} + \frac{1}{\lambda^2(m^4 + \lambda^4)\Delta} \left\{ \left[\operatorname{sh} \frac{\lambda\pi}{2\sqrt{2}} \operatorname{sh} \frac{\lambda\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{m^2}{\lambda^2} \operatorname{ch} \frac{\lambda\pi}{2\sqrt{2}} \cos \frac{\lambda\pi}{2\sqrt{2}} \right] \right. \\
 & \cdot \operatorname{ch} \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \left(\eta - \frac{\pi}{2} \right) \cos \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \left(\eta - \frac{\pi}{2} \right) + \left[-\operatorname{ch} \frac{\lambda\pi}{2\sqrt{2}} \cos \frac{\lambda\pi}{2\sqrt{2}} \right. \\
 & \left. \left. + \frac{m^2}{\lambda^2} \operatorname{sh} \frac{\lambda\pi}{2\sqrt{2}} \sin \frac{\lambda\pi}{2\sqrt{2}} \right] \operatorname{sh} \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \left(\eta - \frac{\pi}{2} \right) \sin \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \left(\eta - \frac{\pi}{2} \right) \right\} \\
 & + \frac{1}{m^2(m^4 + \lambda^4)} \frac{\operatorname{ch} m \left(\eta - \frac{\pi}{2} \right)}{\operatorname{ch} \frac{m\pi}{2}} \quad (131)
 \end{aligned}$$

式中 Δ 为(128)式所表示的。(130)、(131)代表同一函数,应该恒等.求 $\chi'(\pi)$ 之值,则和(123)式的 $\chi_2(m, \lambda)$ 完全相等,求 $\chi''(\pi)$ 之值,则和(124)式的 $-\chi_3(m, \lambda)$ 完全相等.于是,证明了(123)和(124)式.

同样也可以证明(58)中的第一项无穷级数

$$\psi^* = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{2\lambda^2}{n^3\pi(n^4 + \lambda^4)} \sin n\xi \quad (132)$$

为方程式(51)的一个特解,这个特解只是 ξ 的函数,它满足和(51)式相关的常微分方程

$$\frac{d^6\psi^*}{d\xi^6} + \lambda^4 \frac{d^2\psi^*}{d\xi^2} = -\frac{1}{2}\lambda^2 \quad (133)$$

和边界条件 $\psi^*(0) = \psi^*(\pi) = \psi^{*\prime}(0) = \psi^{*\prime}(\pi) = \psi^{*\prime\prime}(0) = \psi^{*\prime\prime}(\pi) = 0$,用同样方法可以证明这个特解可以写成下式:

$$\begin{aligned}
 \psi^* = & \frac{1}{2\lambda^4\Delta} \left\{ \operatorname{ch} \frac{\lambda\pi}{2\sqrt{2}} \cos \frac{\lambda\pi}{2\sqrt{2}} \operatorname{sh} \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \left(\xi - \frac{\pi}{2} \right) \sin \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \left(\xi - \frac{\pi}{2} \right) \right. \\
 & \left. - \operatorname{sh} \frac{\lambda\pi}{2\sqrt{2}} \sin \frac{\lambda\pi}{2\sqrt{2}} \operatorname{ch} \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \left(\xi - \frac{\pi}{2} \right) \cos \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \left(\xi - \frac{\pi}{2} \right) \right\} \\
 & - \frac{1}{4\lambda^2} (\xi^2 - \pi\xi) \quad (134)
 \end{aligned}$$

式中 Δ 为(128)式所表示的.

七、数值计算结果

设有一底为 42×42 米的钢筋混凝土扁球壳,边拱截面为 40×130 厘米²,设壳体中面截线高出边拱轴线 $t=56$ 厘米.壳体矢高为8.4米,曲率半径为52.6米,壳厚为9厘米,混凝土杨氏模量 $E=2.7 \times 10^9$ 吨/米²,泊桑比 $\mu=\frac{1}{6}$.于是根据(40)式有

$$\lambda=11.5936, \tau=42.5094, f=0.432178, G=87.6644 \quad (135)$$

这里必须指出, 这个例题的 λ 在实际结构中是靠近上限的, 一般都比这个数低, 有低到 $\lambda=4$ 的. 在求解 A_m 、 B_m 和 T_0 的联立方程中, λ 值愈高, 收敛愈慢. 因此, 我们这个例题的收敛情况, 是完全可以用来检验这种计算的收敛范围的.

根据这些常数值, 便可以求出无穷个联立方程组(118A, B)和(121)的全部系数, 为了保证计算的准确性, 在用重演法求解上述无穷联立方程组时, 我们取六位有效数字. 表1为这组方程组的列表形式, 这里只保留了17个方程和 $A_1, B_1, A_3, B_3, \dots, A_{15}, B_{15}$ 及 T_0 等17个待定系数.

首先(121)式的首项可以求和: 其结果为

$$\sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{m^2(m^4 + \lambda^4)} = \frac{\pi^2}{8\lambda^4} - \frac{\sqrt{2}\pi}{8\lambda^5} \frac{\operatorname{sh} \frac{\lambda\pi}{\sqrt{2}} + \sin \frac{\lambda\pi}{\sqrt{2}}}{\operatorname{ch} \frac{\lambda\pi}{\sqrt{2}} + \cos \frac{\lambda\pi}{\sqrt{2}}} \quad (136)$$

同时对于 $\lambda=11.5936$ 而言

$$\frac{\operatorname{sh} \frac{\lambda\pi}{\sqrt{2}} + \sin \frac{\lambda\pi}{\sqrt{2}}}{\operatorname{ch} \frac{\lambda\pi}{\sqrt{2}} + \cos \frac{\lambda\pi}{\sqrt{2}}} \approx 1 \quad (137)$$

于是, (121)式 (在统除了 λ^2 以后) 的首项可以写成

$$\frac{2\mu}{(1-\mu)\pi} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{m^2(m^4 + \lambda^4)} = \frac{\mu\pi}{4(1-\mu)\lambda^4} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\lambda\pi} \right) = 8.37677 \times 10^{-6} \quad (138)$$

从表1可以看到, 沿对角线的系数较大, 对于这种类型的联立方程是可以重演法求解的. 如果仅考虑每个方程的对角线项左边诸项, 略去其右边诸项的解作为一次近似解. 例如从第一组方程($m=1$), 在略去 $A_3, B_3, A_5, B_5, \dots, A_{15}, B_{15}$ 诸项后, 解得 $A_1^{(1)} = +0.0366774 \times 10^{-10}$, $B_1^{(1)} = -0.166514 \times 10^{-10}$, $T_0^{(1)} = -0.00350593$. 将这个 $A_1^{(1)}, B_1^{(1)}, T_0^{(1)}$ 值代入第二组方程($m=3$)的有关 T_0, A_1, B_1 项, 略去这两个方程的 $A_5, B_5, A_7, B_7, \dots, A_{15}, B_{15}$ 诸项, 即得求解 A_3, B_3 的联立方程组, 其解为 $A_3^{(1)} = +0.142747 \times 10^{-10}$, $B_3^{(1)} = +0.394291$. 再将以上所得 $T_0^{(1)}, A_1^{(1)}, B_1^{(1)}, A_3^{(1)}, B_3^{(1)}$ 诸值代入第三组方程($m=5$), 略去对角线项右方诸项 [即有关 $A_7, B_7, A_9, B_9, \dots, A_{15}, B_{15}$ 诸项], 得求解 $A_5^{(1)}, B_5^{(1)}$ 的联立方程. 依次解算下去, 则可求得 T_0, A_m, B_m 的第一次近似值 (见表2). 如将上面求得的第一次近似值代入对角线右方诸项的待定系数中, 而将逐步求得的第二次近似值代入对角线项的左方诸项的待定系数中, 和求第一次近似解相同, 即可逐步求得全部第二次近似值 (见表2). 比较两次近似解即可以看到这样重演求解的过程, 一次近似, 就有足够的正确 (即准确到4位数). 在以后计算内力和内力矩以及挠度分布的过程中, 我们只须要用4位数的 T_0, A_m, B_m 值, 见表2最后一列.

对于四角简支情形, 我们只须解算表1中16个方程 (即去掉含有 T_0 的项), 用同样方法求得 $A_1, B_1, A_3, B_3, \dots, A_{15}, B_{15}$ 16个待定系数, 其结果见表3.

将表2和表3中的 A_m, B_m 代入(71A, B), (82)和(83)式中即可求得无量纲的内力、内力矩和挠度的数值. 它们可通过如下的表达式直接进行计算:

表 1 确定待定系数 A_m , B_m , T_0 的联立方程组

| m | T_0 | $A_1 \times 10^8$ | $B_1 \times 10^8$ | $A_3 \times 10^8$ | $B_3 \times 10^8$ | $A_5 \times 10^8$ | $B_5 \times 10^8$ | $A_7 \times 10^8$ | $B_7 \times 10^8$ |
|-----|-------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| 1 | -2 | -4.75336 | -2.26102 | -0.001812 | -0.000070 | 0.002043 | -0.001532 | 0.000838 | -0.006296 |
| | 0 | -589.087 | -251.692 | -0.243774 | 0.007994 | -0.275906 | 0.204215 | -0.011792 | 0.845513 |
| | 0 | 0.326807 | 0.0838517 | 0.017873 | -0.003050 | 0.004858 | -0.007374 | -0.005898 | -0.010331 |
| 3 | -2 | 0.003544 | 0.001222 | -20.8254 | 5.71084 | 0.001445 | -0.009609 | 0.008815 | -0.047471 |
| | 0 | -0.051925 | -0.021205 | -110.583 | 0.351910 | -0.223856 | 0.131444 | -0.171814 | 0.701542 |
| 5 | -2 | 0.003553 | 0.001711 | 0.012845 | 0.001733 | -50.0894 | 118.778 | 0.027669 | -0.096400 |
| | 0 | -0.017677 | -0.012161 | -0.067608 | -0.020049 | -1.88324 | 327.981 | -0.229033 | 0.495132 |
| 7 | -2 | 0.003136 | 0.002210 | 0.013499 | 0.004089 | 0.037000 | -0.012756 | 104.235 | 764.215 |
| | 0 | -0.006761 | -0.008677 | -0.033619 | -0.022466 | -0.112390 | 0.004071 | 869.135 | -574.479 |
| 9 | -2 | 0.002440 | 0.002541 | 0.012082 | 0.006241 | 0.040027 | -0.006733 | 0.078677 | -0.129786 |
| | 0 | -0.001932 | -0.006249 | -0.014846 | -0.020423 | -0.072025 | -0.022177 | -0.238701 | 0.149785 |
| 11 | -2 | 0.001671 | 0.002573 | 0.012529 | 0.007415 | 0.037962 | -0.000293 | 0.093833 | -0.116504 |
| | 0 | 0.000288 | -0.004251 | -0.004532 | -0.016274 | -0.042411 | -0.031309 | -0.201311 | 0.051212 |
| 13 | -2 | 0.001029 | 0.002361 | 0.007167 | 0.007541 | 0.033268 | 0.004365 | -0.098377 | -0.096596 |
| | 0 | 0.001148 | -0.002734 | 0.000584 | -0.0119363 | -0.022807 | -0.031177 | -0.158646 | -0.005158 |
| 15 | -2 | 0.000585 | 0.002044 | 0.005163 | 0.007013 | 0.027976 | 0.006936 | 0.095306 | -0.077042 |
| | 0 | 0.001353 | -0.001628 | 0.002760 | -0.008491 | -0.010930 | -0.018785 | -0.121131 | -0.033402 |

续表 1

| m | $A_0 \times 10^{10}$ | $B_0 \times 10^{10}$ | $A_{11} \times 10^{11}$ | $B_{11} \times 10^{11}$ | $A_{13} \times 10^{12}$ | $B_{13} \times 10^{12}$ | $A_{15} \times 10^{14}$ | $B_{15} \times 10^{14}$ | =自由项 |
|-----|------------------------------------|-----------------------------------|------------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|------------------------------------|--|
| 1 | -0.000180 0.024011 -0.000334 | -0.000185 0.025082 0.000072 | -0.000160 0.021473 -0.000017 | 0.000015 -0.001920 0.000181 | -0.000842 0.011418 0.000135 | -0.000086 0.014626 0.000076 | 0.000008 -0.000099 0.000016 | 0.000015 -0.002015 -0.000008 | 0.00902821 0.635163 -0.00000837677 |
| 3 | -0.001371 0.019195 | -0.001540 0.024138 | -0.000703 0.001967 | 0.000084 -0.000156 | -0.000749 0.011965 | 0.000929 -0.013245 | 0.000005 0.000029 | 0.000039 -0.001901 | -0.000200886 0.160978 |
| 5 | -0.002781 0.011901 | -0.003659 0.021992 | -0.000306 0.016492 | 0.000017 0.000246 | -0.001781 0.011287 | 0.002035 -0.009454 | 0.000392 0.000240 | 0.000314 -0.001693 | -0.0103277 0.0429393 |
| 7 | 0.003507 0.004840 | -0.003736 0.018655 | -0.004713 0.012654 | -0.000327 0.004825 | -0.003117 0.011213 | 0.003195 -0.006165 | -0.000013 0.000471 | 0.000553 -0.001423 | -0.0228623 -0.0930357 |
| 9 | 28.1926 226.426 | 13.1718 -211.949 | -0.005304 0.008892 | -0.000884 0.006304 | -0.004293 0.010381 | 0.003908 -0.005522 | -0.000047 0.000666 | 0.000705 -0.001131 | -0.0334189 -0.200645 |
| 11 | -0.002699 -0.003485 | -0.007779 0.011214 | 19.6937 156.993 | -46.3548 -163.671 | -0.005166 0.009213 | 0.004170 -0.000327 | -0.000093 -0.000800 | 0.000837 -0.008522 | -0.0386520 -0.274873 |
| 13 | -0.001389 -0.004927 | -0.007715 0.007710 | -0.006179 0.003295 | -0.001941 0.006689 | -12.5002 -127.752 | -84.9423 836.126 | -0.000139 0.000867 | 0.000903 -0.000606 | -0.0384369 -0.297357 |
| 15 | -0.001174 -0.005335 | -0.007243 0.005305 | -0.005807 0.001603 | -0.002238 0.006176 | -0.005859 0.006657 | 0.003788 0.002820 | -6.99536 -64.6400 | -6.85366 55.1981 | -0.0350470 -0.284965 |

表 2. 四角铰支情况待定系数 $A_m(A_n), B_m(B_n), T_0$ 的各级近似值及最后确定之值

| $A_m^{(1)}, B_m^{(1)}$ | 一 次 近 似 值 | $A_m^{(2)}, B_m^{(2)}$ | 二 次 近 似 值 | A_m, B_m | 本 文 计 算 用 的 值 |
|------------------------|----------------------------------|------------------------|----------------------------------|------------|--------------------------------|
| $A_1^{(1)}$ | $0.0366774 \times 10^{-10}$ | $A_1^{(2)}$ | $0.0364005 \times 10^{-10}$ | A_1 | 0.03640×10^{-10} |
| $B_1^{(1)}$ | $-0.166514 \times 10^{-10}$ | $B_1^{(2)}$ | $-0.167191 \times 10^{-10}$ | B_1 | -0.16719×10^{-10} |
| $A_3^{(1)}$ | 0.142748×10^{-10} | $A_3^{(2)}$ | 0.142768×10^{-10} | A_3 | 0.14277×10^{-10} |
| $B_3^{(1)}$ | 0.394291×10^{-10} | $B_3^{(2)}$ | 0.394827×10^{-10} | B_3 | 0.3948×10^{-10} |
| $A_5^{(1)}$ | $-0.181985 \times 10^{-10}$ | $A_5^{(2)}$ | $-0.181847 \times 10^{-10}$ | A_5 | -0.18185×10^{-10} |
| $B_5^{(1)}$ | $-0.0913534 \times 10^{-10}$ | $B_5^{(2)}$ | $-0.0912654 \times 10^{-10}$ | B_5 | -0.09127×10^{-10} |
| $A_7^{(1)}$ | $-0.0111621 \times 10^{-10}$ | $A_7^{(2)}$ | $-0.0111556 \times 10^{-10}$ | A_7 | $-0.011156 \times 10^{-10}$ |
| $B_7^{(1)}$ | $-0.00238905 \times 10^{-10}$ | $B_7^{(2)}$ | $-0.00238585 \times 10^{-10}$ | B_7 | $-0.002386 \times 10^{-10}$ |
| $A_9^{(1)}$ | $-0.00114969 \times 10^{-10}$ | $A_9^{(2)}$ | $-0.00114894 \times 10^{-10}$ | A_9 | $-0.0011489 \times 10^{-10}$ |
| $B_9^{(1)}$ | $-0.000387785 \times 10^{-10}$ | $B_9^{(2)}$ | $-0.000387004 \times 10^{-10}$ | B_9 | $-0.0003870 \times 10^{-10}$ |
| $A_{11}^{(1)}$ | $-0.000130249 \times 10^{-10}$ | $A_{11}^{(2)}$ | $-0.000130391 \times 10^{-10}$ | A_{11} | $-0.00013039 \times 10^{-10}$ |
| $B_{11}^{(1)}$ | $0.000043032 \times 10^{-10}$ | $B_{11}^{(2)}$ | $0.000042896 \times 10^{-10}$ | B_{11} | $0.00004289 \times 10^{-10}$ |
| $A_{13}^{(1)}$ | $0.0000244284 \times 10^{-10}$ | $A_{13}^{(2)}$ | $0.0000244260 \times 10^{-10}$ | A_{13} | $0.00002443 \times 10^{-10}$ |
| $B_{13}^{(1)}$ | $0.00000175548 \times 10^{-10}$ | $B_{13}^{(2)}$ | $0.00000175194 \times 10^{-10}$ | B_{13} | $0.0000017519 \times 10^{-10}$ |
| $A_{15}^{(1)}$ | $0.000000514986 \times 10^{-10}$ | $A_{15}^{(2)}$ | $0.000000514986 \times 10^{-10}$ | A_{15} | $0.0000005147 \times 10^{-10}$ |
| $B_{15}^{(1)}$ | $0.000000867741 \times 10^{-10}$ | $B_{15}^{(2)}$ | $0.000000864968 \times 10^{-10}$ | B_{15} | $0.0000008649 \times 10^{-10}$ |
| $T_0^{(1)}$ | -0.00350593 | $T_0^{(2)}$ | -0.00348842 | T_0 | -0.003488 |

表 3. 四角筒支情况待定系数 $A_m(A_n), B_m(B_n)$ 的各近似值及最后确定之值

| $A_m^{(1)}, B_m^{(1)}$ | 一次近似值 | $A_m^{(2)}, B_m^{(2)}$ | 二次近似值 | A_m, B_m | 本文计算用的值 |
|------------------------|----------------------------------|------------------------|----------------------------------|------------|--------------------------------|
| $A_1^{(1)}$ | $-0.0330737 \times 10^{-10}$ | $A_1^{(2)}$ | $-0.0330769 \times 10^{-10}$ | A_1 | -0.03307×10^{-10} |
| $B_1^{(1)}$ | $-0.329766 \times 10^{-10}$ | $B_1^{(2)}$ | $-0.329810 \times 10^{-10}$ | B_1 | -0.3298×10^{-10} |
| $A_3^{(1)}$ | 0.142555×10^{-10} | $A_3^{(2)}$ | 0.142347×10^{-10} | A_3 | 0.14235×10^{-10} |
| $B_3^{(1)}$ | 0.516422×10^{-10} | $B_3^{(2)}$ | 0.515755×10^{-10} | B_3 | 0.5158×10^{-10} |
| $A_5^{(1)}$ | $-0.143300 \times 10^{-10}$ | $A_5^{(2)}$ | $-0.143308 \times 10^{-10}$ | A_5 | -0.14331×10^{-10} |
| $B_5^{(1)}$ | $-0.0691431 \times 10^{-10}$ | $B_5^{(2)}$ | $-0.0691471 \times 10^{-10}$ | B_5 | -0.06915×10^{-10} |
| $A_7^{(1)}$ | $-0.0105793 \times 10^{-10}$ | $A_7^{(2)}$ | $-0.0105789 \times 10^{-10}$ | A_7 | $-0.010579 \times 10^{-10}$ |
| $B_7^{(1)}$ | $-0.00154704 \times 10^{-10}$ | $B_7^{(2)}$ | $-0.00154692 \times 10^{-10}$ | B_7 | $-0.0015469 \times 10^{-10}$ |
| $A_9^{(1)}$ | $-0.00108536 \times 10^{-10}$ | $A_9^{(2)}$ | $-0.00108549 \times 10^{-10}$ | A_9 | $-0.0010855 \times 10^{-10}$ |
| $B_9^{(1)}$ | $-0.000212655 \times 10^{-10}$ | $B_9^{(2)}$ | $-0.000212737 \times 10^{-10}$ | B_9 | $-0.0002127 \times 10^{-10}$ |
| $A_{11}^{(1)}$ | $-0.000158320 \times 10^{-10}$ | $A_{11}^{(2)}$ | $-0.000158416 \times 10^{-10}$ | A_{11} | $-0.00015842 \times 10^{-10}$ |
| $B_{11}^{(1)}$ | $0.0000160911 \times 10^{-10}$ | $B_{11}^{(2)}$ | $0.0000160201 \times 10^{-10}$ | B_{11} | $0.000016020 \times 10^{-10}$ |
| $A_{13}^{(1)}$ | $0.000023350 \times 10^{-10}$ | $A_{13}^{(2)}$ | $0.000023347 \times 10^{-10}$ | A_{13} | $0.00002393 \times 10^{-10}$ |
| $B_{13}^{(1)}$ | $0.00000100457 \times 10^{-10}$ | $B_{13}^{(2)}$ | $0.00000100348 \times 10^{-10}$ | B_{13} | $0.0000010035 \times 10^{-10}$ |
| $A_{15}^{(1)}$ | $0.000000468754 \times 10^{-10}$ | $A_{15}^{(2)}$ | $0.000000468754 \times 10^{-10}$ | A_{15} | $0.0000004687 \times 10^{-10}$ |
| $B_{15}^{(1)}$ | $0.000000326333 \times 10^{-10}$ | $B_{15}^{(2)}$ | $0.000000326333 \times 10^{-10}$ | B_{15} | $0.0000003263 \times 10^{-10}$ |

$$\begin{aligned}
N_{\xi} = & - \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \left\{ - \frac{2\lambda^2}{n\pi(n^4 + \lambda^4)} \operatorname{ch} n \left(\eta - \frac{\pi}{2} \right) + A_n \Phi_n^5(\eta) \right. \\
& + B_n \Phi_n^6(\eta) \left. \right\} \sin n\xi + \sum_{m=1,3,5}^{\infty} m^2 \left\{ \frac{2\lambda^2}{m^3\pi(m^4 + \lambda^4)} \left(1 - \frac{\operatorname{ch} m \left(\xi - \frac{\pi}{2} \right)}{\operatorname{ch} \frac{m\pi}{2}} \right) \right. \\
& + A_m \Phi_m^1(\xi) + B_m \Phi_m^2(\xi) \left. \right\} \sin m\eta \\
N_{\eta} = & \sum_{n=1,3,5}^{\infty} n^2 \left\{ \frac{2\lambda^2}{n^3\pi(n^4 + \lambda^4)} \left(1 - \frac{\operatorname{ch} n \left(\eta - \frac{\pi}{2} \right)}{\operatorname{ch} \frac{n\pi}{2}} \right) + A_n \Phi_n^1(\eta) \right. \\
& + B_n \Phi_n^2(\eta) \left. \right\} \sin n\xi - \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \left\{ \frac{2\lambda^2}{m\pi(m^4 + \lambda^4)} \operatorname{ch} m \left(\xi - \frac{\pi}{2} \right) \right. \\
& + A_m \Phi_m^5(\xi) + B_m \Phi_m^6(\xi) \left. \right\} \sin m\eta \\
N_{\xi\eta} = & - \sum_{n=1,3,5}^{\infty} n \left\{ - \frac{2\lambda^2}{n^2\pi(n^4 + \lambda^4)} \operatorname{ch} n \left(\eta - \frac{\pi}{2} \right) + A_n \Phi_n^7(\eta) \right. \\
& + B_n \Phi_n^8(\eta) \left. \right\} \cos n\xi - \sum_{m=1,3,5}^{\infty} m \left\{ - \frac{2\lambda^2}{m^2\pi(m^4 + \lambda^4)} \operatorname{ch} m \left(\xi - \frac{\pi}{2} \right) \right. \\
& + A_m \Phi_m^7(\xi) + B_m \Phi_m^8(\xi) \left. \right\} \cos m\eta \\
M_{\xi} = & \sum_{n=1,3,5}^{\infty} n^2 \left\{ \frac{2}{n\pi(n^4 + \lambda^4)} \left(1 - \frac{\mu}{1-\mu} \frac{\operatorname{ch} n \left(\eta - \frac{\pi}{2} \right)}{\operatorname{ch} \frac{n\pi}{2}} \right) + A_n \Phi_n^9(\eta) \right. \\
& - B_n \Phi_n^4(\eta) \left. \right\} \sin n\xi - \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \left\{ \frac{2m^2}{(m\pi(m^4 + \lambda^4))} \frac{\mu}{1-\mu} \frac{\operatorname{ch} m \left(\xi - \frac{\pi}{2} \right)}{\operatorname{ch} \frac{m\pi}{2}} \right. \\
& + A_m \Phi_m^9(\xi) - B_m \Phi_m^{10}(\xi) \left. \right\} \sin m\eta \\
M_{\eta} = & - \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \left\{ \frac{2n^2}{n\pi(n^4 + \lambda^4)} \frac{\mu}{1-\mu} \frac{\operatorname{ch} n \left(\eta - \frac{\pi}{2} \right)}{\operatorname{ch} \frac{n\pi}{2}} + A_n \Phi_n^9(\eta) \right. \\
& - B_n \Phi_n^{10}(\eta) \left. \right\} \sin n\xi + \sum_{m=1,3,5}^{\infty} m^2 \left\{ \frac{2}{m\pi(m^4 + \lambda^4)} \left(1 - \frac{\mu}{1-\mu} \frac{\operatorname{ch} m \left(\xi - \frac{\pi}{2} \right)}{\operatorname{ch} \frac{m\pi}{2}} \right) \right. \\
& + A_m \Phi_m^9(\xi) - B_m \Phi_m^4(\xi) \left. \right\} \sin m\eta
\end{aligned} \tag{139}$$

$$\begin{aligned}
M_{\xi} = & \sum_{n=1,3,5}^{\infty} n^2 \left\{ \frac{2}{n\pi(n^4 + \lambda^4)} \left(1 - \frac{\mu}{1-\mu} \frac{\operatorname{ch} n \left(\eta - \frac{\pi}{2} \right)}{\operatorname{ch} \frac{n\pi}{2}} \right) + A_n \Phi_n^9(\eta) \right. \\
& - B_n \Phi_n^4(\eta) \left. \right\} \sin n\xi - \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \left\{ \frac{2m^2}{(m\pi(m^4 + \lambda^4))} \frac{\mu}{1-\mu} \frac{\operatorname{ch} m \left(\xi - \frac{\pi}{2} \right)}{\operatorname{ch} \frac{m\pi}{2}} \right. \\
& + A_m \Phi_m^9(\xi) - B_m \Phi_m^{10}(\xi) \left. \right\} \sin m\eta \\
M_{\eta} = & - \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \left\{ \frac{2n^2}{n\pi(n^4 + \lambda^4)} \frac{\mu}{1-\mu} \frac{\operatorname{ch} n \left(\eta - \frac{\pi}{2} \right)}{\operatorname{ch} \frac{n\pi}{2}} + A_n \Phi_n^9(\eta) \right. \\
& - B_n \Phi_n^{10}(\eta) \left. \right\} \sin n\xi + \sum_{m=1,3,5}^{\infty} m^2 \left\{ \frac{2}{m\pi(m^4 + \lambda^4)} \left(1 - \frac{\mu}{1-\mu} \frac{\operatorname{ch} m \left(\xi - \frac{\pi}{2} \right)}{\operatorname{ch} \frac{m\pi}{2}} \right) \right. \\
& + A_m \Phi_m^9(\xi) - B_m \Phi_m^4(\xi) \left. \right\} \sin m\eta
\end{aligned} \tag{140}$$

$$M_{\xi\eta} = - (1 - \mu) \sum_{n=1,3,5}^{\infty} n \left\{ \frac{2}{\pi(n^4 + \lambda^4)} \frac{\mu}{1 - \mu} \frac{\operatorname{sh}n \left(\eta - \frac{\pi}{2} \right)}{\operatorname{ch} \frac{n\pi}{2}} + A_n \Phi_n^{11}(\eta) \right. \\ \left. - B_n \Phi_n^{12}(\eta) \right\} \cos n\xi - (1 - \mu) \sum_{m=1,3,5}^{\infty} m \left\{ \frac{2}{\pi(m^4 + \lambda^4)} \frac{\mu}{1 - \mu} \frac{\operatorname{sh}m \left(\xi - \frac{\pi}{2} \right)}{\operatorname{Ch} \frac{m\pi}{2}} \right. \\ \left. + A_m \Phi_m^{11}(\xi) - B_m \Phi_m^{12}(\xi) \right\} \cos m\eta$$

在公式中的函数 $\Phi_n^1(\xi)$, $\Phi_n^2(\xi)$, \dots , $\Phi_n^8(\xi)$ (或 $\Phi_n^1(\eta) \dots \Phi_n^8(\eta)$) 参看 (72), (75) 式. 而函数 $\Phi_m^9(\xi)$, $\Phi_m^{10}(\xi) \dots \Phi_m^{12}(\xi)$ (或 $\Phi_m^9(\eta) \dots \Phi_m^{12}(\eta)$) 可由如下关系式求得

$$\Phi_m^9(\xi) = \frac{\partial^2 \Phi_m^8(\xi)}{\partial \xi^2}, \quad \Phi_m^{10}(\xi) = \frac{\partial^2 \Phi_m^4(\xi)}{\partial \xi^2} \tag{141A}$$

$$\Phi_m^{11}(\xi) = \frac{\partial \Phi_m^8(\xi)}{\partial \xi}, \quad \Phi_m^{12}(\xi) = \frac{\partial \Phi_m^4(\xi)}{\partial \xi} \tag{141B}$$

如果以 n 代替 m , 以 η 代替 ξ , 则以 (141A, B) 即得 $\Phi_n^9(\eta)$, $\Phi_n^{10}(\eta) \dots$ 等的表达式.

经过计算证明上述的数值结果收敛是很快的, 今以四角铰支情形沿 $y = a/2$ 的内力 N_η 为例, 它在边界上变化很大, 也是收敛最慢的地方. 就以这一点的 N_η 的计算为例, 收敛还是很满意的, 表 4 中列出各级近似的计算结果. 可以看到, 如果取 $m = 1, 3, 5, 7, 9, 11$ 六项求和, 即可正确到三位数. 在其它计算中也可以证明, 在大部份情况, 只要取 $m = 1, 3, 5, 7$ 求和即可正确到三位数. 对 $\lambda < 11$ 的计算而言, 收敛更加要比这个例子快一些, 亦即一般还可以少算若干项.

表 4. N_η 在 $x=0, y=a/2$ 处的各级近似值 (四角铰支情形)

| \sum_1^m | $m=5$ | $m=7$ | $m=9$ | $m=11$ | $m=13$ | $m=15$ |
|--------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $1000N_\eta$ | -7.646 | -7.308 | -7.298 | -7.407 | -7.452 | -7.404 |

表 5 中给出具有弹性边拱的方形扁球壳在四角筒支和四角铰支 (即带有拉杆) 情况下, 当参数 $\lambda = 11.5936$ 时沿线 $\eta = \frac{\pi}{2}$ (即 $y = \frac{a}{2}$) 的无量纲内力 N_ξ , N_η , 无量纲弯矩 M_ξ , M_η 和无量纲挠度 W , 以及沿线 $\eta = \pi$ (即 $y = a$) 的 N_ξ 和 $N_{\xi\eta}$ 的计算结果, 同时还给出了 B. B. Дикович 四边筒支方形扁球壳 (即无边框的) 的结果 ($\lambda \approx 11$). 所有这些结果也表示在图 3, 4, 5, 6 及 7 中.

八、结 果 讨 论

在图 3~7 中, 给出了与壳体对称轴相符合的壳体截面的轴向力 (无量纲的) N_ξ , N_η , 弯矩 (无量纲的) M_ξ , M_η 和无量纲挠度 W 的变化图形, 以及沿壳体边缘 ($y = a$) 作用的轴向力 N_ξ 和剪力 $N_{\xi\eta}$ (无量纲的) 的变化图形, 在边缘 ($y = a$) 上, $N_\eta = 0$, $M_\eta = 0$. 所有图中

采用如下的符号表示不同支承情况的结果:

$N_{\xi}[1], M_{\xi}[1], M_{\eta}[1], \dots W[1]$ ——四边简支 (Дикович)

$N_{\xi}[2], M_{\xi}[2], M_{\eta}[2], \dots W[2]$ ——四边弹性边拱支承、四角简支 (本文)

$N_{\xi}[3], M_{\xi}[3], M_{\eta}[3], \dots W[3]$ ——四边弹性边拱支承, 四角铰支且附有拉杆 (本文)

表 5. 具有弹性边拱的方形扁球壳在四角简支、四角铰支的计算结果

| $10^3 N_{\xi}(\xi, \frac{\pi}{2})$ | $\xi=0$ | $\xi=0.1$ | $\xi=0.2$ | $\xi=0.3$ | $\xi=0.4$ | $\xi=0.5$ |
|-------------------------------------|---------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 四角简支[2] | 0 | -1.28 | -2.28 | -3.08 | -3.56 | -3.72 |
| 四角铰支[3] | 0 | -1.28 | -2.28 | -3.08 | -3.56 | -3.72 |
| 四边简支[1] | 0 | -1.35 | -2.53 | -3.42 | -3.97 | -4.15 |
| $10^3 N_{\eta}(\xi, \frac{\pi}{2})$ | | | | | | |
| [2] | -8.38 | -6.24 | -5.15 | -4.37 | -3.88 | -3.72 |
| [3] | -7.40 | -6.26 | -5.15 | -4.37 | -3.88 | -3.72 |
| [1] | 0 | -7.46 | -5.72 | -4.85 | -4.32 | -4.15 |
| $10^4 M_{\xi}(\xi, \frac{\pi}{2})$ | | | | | | |
| [2] | 0 | -3.45 | -1.60 | -0.666 | -0.163 | 0 |
| [3] | 0 | -1.82 | -0.720 | +0.439 | -0.0605 | 0 |
| [1] | 0 | 4.60 | -0.80 | 0 | 0 | 0 |
| $10^4 M_{\eta}(\xi, \frac{\pi}{2})$ | | | | | | |
| [2] | +15.1 | +3.39 | +1.62 | +0.673 | +0.167 | 0 |
| [3] | +15.1 | +2.07 | +0.700 | +0.255 | +0.0595 | 0 |
| [1] | 0 | +1.20 | -0.200 | +0.200 | 0 | 0 |
| $10^4 W(\xi, \frac{\pi}{2})$ | | | | | | |
| [2] | 4.90 | 4.08 | 3.94 | 3.67 | 3.69 | 3.70 |
| [3] | 1.35 | 0.987 | 0.844 | 0.802 | 0.795 | 0.796 |
| [1] | 0 | 0.700 | 0.700 | 0.700 | 0.700 | 0.700 |
| $10^3 N_{\xi\eta}(\xi, \pi)$ | | | | | | |
| [2] | -17.8 | -7.71 | -4.35 | -2.80 | -1.72 | 0 |
| [3] | -17.4 | -7.89 | -4.03 | -3.33 | -2.02 | 0 |
| [1] | -14.42 | -8.93 | -5.30 | -3.37 | -1.69 | 0 |
| $10^3 N_{\xi}(\xi, \pi)$ | | | | | | |
| [2] | 0 | -3.77 | -2.19 | -2.54 | -5.59 | -8.38 |
| [3] | 0 | -4.76 | -2.08 | -2.03 | -5.23 | -7.40 |
| [1] | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

从图 3 中可以看出, 在壳体中心, 正如所应该的那样 $N_{\xi}=N_{\eta}$. 这也是一个计算校核. 应该指出, 轴向力 N_{η} 的最大值并不是在壳体的中心处, 而是在边缘上. 对于四角简支的弹性边拱支承情形则比四边简支的 N_{η} 最大值还要大些, 而对于附有拉杆的弹性边拱支承情形则与四边简支的 N_{η} 最大值极为相近. 至于轴向力 N_{ξ} 两种角点条件的结果完全一致, 且均比四边简支的 N_{ξ} 值略小.

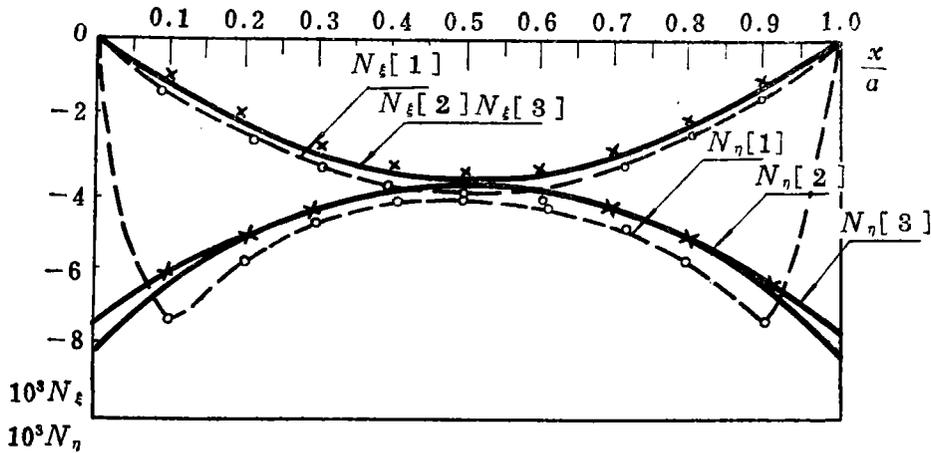


图3 沿线 $y=a/2$ 的轴向力 N_ξ 和 N_η 的变化图

从图 4,5 中可以看出, 弯矩 $M_\xi[2]$, $M_\xi[3]$ 在壳体边缘附近的点达到最大值, 而且均为负的, 其中附有拉杆的弹性边拱支承情形的 $M_\xi[3]$ 要比无拉杆的弹性边拱支承以及四边简支情形的 $M_\xi[2]$ 和 $M_\xi[1]$ 的值约小了一倍左右. 弯矩 $M_\eta[2]$, $M_\eta[3]$ 在壳体边缘的点上, 也达到最大值, 但是正的. 这个最大值也是 4, 5 两图中所有弯矩中的最大者. 它们比四边简支时的最大值大了约两倍多. 在壳体中心和靠近壳体中心区域 ($0.3 \leq \frac{x}{a} \leq 0.7$) 弯矩值都很小, 因而壳体的应力状态接近于无力矩状态.

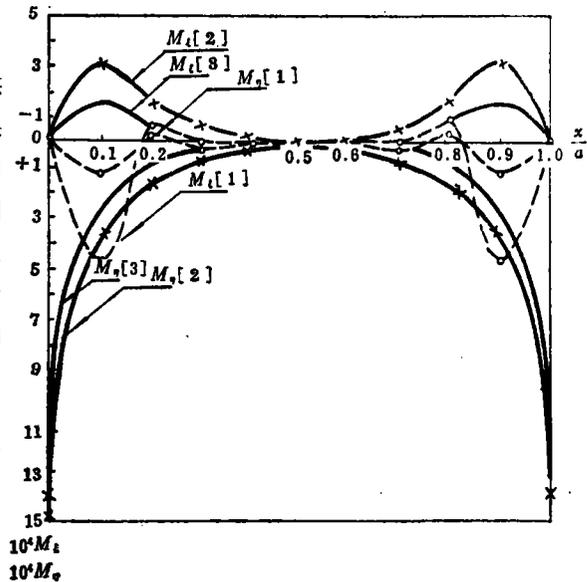


图4,5 沿线 $y=a/2$ 的弯矩 M_ξ 及 M_η 的变化图

从图 6 上可以看出, 沿与壳体对称轴相符的壳体中面各点的挠度最大值位于壳体边缘点上. 在无拉杆的弹性边拱支承时 $W[2]$ 的最大值比诸四边简支时的最大值大了约五倍多, 而附有拉杆的弹性边拱支承时的最大 $W[3]$ 值则只约大了一倍. 这对于弹性支承的壳而言, 是可以理解的. 挠度虽大, 但仍在小挠度的范围以内.

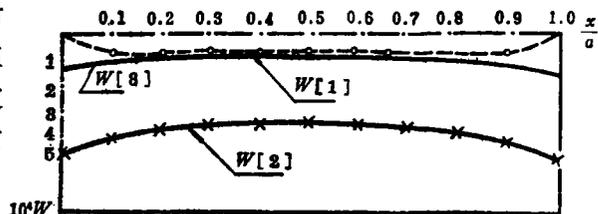


图6 沿线 $y=a/2$ 的挠度 W 的变化图

从图 7 上可以看出, 沿与 x 轴平行的壳体边缘上轴向力 N_ξ 并不为零, 且均为压力. 其最大值在壳体边缘的中点上, 并且其数值正好等于 $N_\eta (x=0, y=\frac{a}{2})$ 的值. 至于沿与 x 轴平行的壳体边缘上剪力 $N_{\xi\eta}$ 的最大值和四

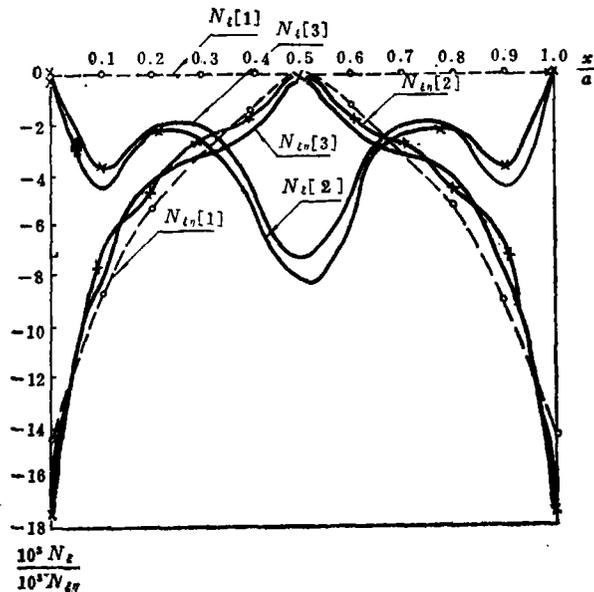


图7 沿线 $y=a$ 的轴向力 N_ξ 及剪力 $N_{\xi\eta}$ 的变化图

边简支时一样均发生在边缘的角点上，但它们均比四边简支时的最大剪力 $N_{\xi\eta}[1]$ 值略为大些。

本文还给出了附有拉杆的弹性边拱支承情形的拉杆拉力值为 1.7395×10^2 吨。

本文所给出的计算，只是一典型的计算例题。我们在选择这个典型的计算例题时，倾向于选择较大的 λ 值，这样就有意使级数的收敛性较差些，从而利用它来考验本文所提出的双三角级数法的有效性。上面的计算证明，这个算法经受了收敛问题的考验。对于大多数的屋盖薄扁壳结构的 λ 值，是比 $\lambda=11$ 为小，收敛情况一定可以更加满意。

因此，我们完全有足够的根据说，双三角级数对于这类问题是有效的。

钱伟长教授对本文给予热情的指导，并提出了宝贵的意见，作者向他表示深切的感谢。

(续完)

参 考 文 献

1. Власов, В. З., Избранные труды, том I, (1962), стр.459—466, издат академии наук СССР, Москва.
2. Дикович, В. В., Расчет полоти прямогольной в плане оболочки вращения, Расчет пространственных конструкции, Т. IV стр. 393—414 гостройиздат, (1958).
3. Дикович, В. В., Полотие прямогольные в плане оболочке вращения госсройиздат, (1960).
4. 何广乾等, 四边简支常曲率双曲扁壳的简化计算, 土木工程学报, 6, 7, (1959).
及对该文的讨论和补充, 土木工程学报, 6, 12, (1959).
5. 胡海昌, 四边简支矩形底球面扁壳楼盖的简化计算方法, 力学学报, 5, 1, (1962).

6. 北京第一工业建筑设计院, 双曲薄壳设计部份总结 ($48^M \times 48^M$), (1959)
7. Сидкин, Е. И., Расчет пологих оболочек на упругом контуре известия академии наук, СССР, О. Т. Н. (1958). (№8) стр. 101—106.

Doubly Curved Shallow Shells with the Rectangular Bases Elastically Supported by Edge Arch Beams and Tie-Rods (II)

Loo Wen-da

*(Thermal Power Engineering Research Laboratory,
Xian, the Ministry of Electric Power)*

Abstract

This paper gives the results of numerical calculation based upon the method of double trigonometrical series on the problems of spherical shallow shells with square bases elastically supported by arch beams. The corners are pinned supported or simply supported. The calculated results for $\lambda=11.5936$ show that the trigonometrical series converges rapidly. The effect of elastic deformation in the arch beams to the components of membrane tension, moments and deflections of the shell are given.