应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

乏晰边界条件的弹性体静力问题的解和最小位能、余能原理

云天铨

（武汉华中工学院 1980年4月2日收到）

摘　　要

本文把弹性力学静力问题的解定义在集合论基础上，并推广到乏晰边界条件情形．给出最小位能、余能原理在乏晰边界条件下新的推广，以及最小元位能解的存在和唯一性定理，从而证明弹性力学静力问题的拟解是存在的．

一、概　　述

虽然乏晰集的理论在复杂系统的许多问题，如作出决策，模型识别，形式语言，信息恢复自动机等问题的领域得到大量应用或引人注目[2]，但在弹性力学领域似乎还没有引起很多的注意．然而，在力学中研究对象某些方面具有乏晰性的情形是不少的．边界条件或初始条件的乏晰性就是其中之一．如梁，板，壳等支座的实际位移往往是乏晰的．又如杆件扭转问题，端部的外力分布也是乏晰的等等．因此有必要对乏晰性的影响加以较系统的研究．

边界条件乏晰性的研究也将有助于解决某些理论上的问题．例如弹性力学问题的解的存在性问题，其证明在数学上会遇到极大的困难[3]，甚至对给定的边界条件会没有解．若用相近的边界条件取代，并赋予解或拟解的函数空间以某些性质，在这种框架下探讨解或拟解的存在性会容易些．

集合论是近代数学的基础之一，乏晰集合的基本概念是Cantor集合基本概念的推广．如果我们把弹性力学问题的解用函数空间的集合来描述，不仅会赋予描绘解的组成以清晰的图像，方便地把弹性力学问题的解的定义推广到乏晰边界情形；而且为沟通近代数学和弹性力学，把前者的成果引进弹性力学提供方便．本文的§2采用这种描述．在§3中推广到乏晰边界情形，给出乏晰边界条件下的最小位能、余能原理．§4给出在边界上和给定的位移函数距离为ε_n的元的最小位能的解的存在和唯一性的证明．§5把上述这种解的序列的极限看作是弹性力学静力问题的拟解（Quasi solution）就能证明拟解是存在的．

本文是[7]的深入．为方便，在此也将重述一下[7]的结果．

二、弹性力学问题的解与最小位能、余能原理的描述

在弹性力学中，有用位移函数作为解答，也有用应力函数作为解答．为方便沟通起见，把二者统一起来．也就是引入应力、位移关系．假定存在一拓扑映射Φ，使

$$\Phi: U \longrightarrow Y \tag{2.1}$$

也就是从位移函数的度量空间U到应力函数的度量空间Y存在一一对应的、连续的满映射Φ，而且逆对应$\Phi^{-1}: Y \longrightarrow U$也是连续的．

并且假定U，Y空间中的元，即位移函数$u(\mathrm{x})$，应力函数$\sigma_{ij}(\mathrm{x})$在定义域Ω（弹性体内及边界上）内是连续的，具有k阶（$k\geqslant 1$）可微的光滑性质．

同时还假定所讨论的空间U是列紧的．

记号1． 记满足位移已知的边界条件的位移函数u的所有集合为

$$B_u = B_u(u) = \{u \mid u = \underline{u},\ \ s \in s_u\} \tag{2.2}$$

式中位移$u=(u_1\ u_2\ u_3)$，字母下一横线代表该量是给定的已知量．s_u代表位移已知的边界面．其中等号的含义为：

$$\{u = \underline{u},\ \ s \in s_u\} \Leftrightarrow \{\lim_{x_V \ni x \to s \in s_u} u(\mathrm{x}) = \underline{u}(s)\} \tag{2.3}$$

$x=(x_1\ x_2\ x_3)$为卡氏坐标，x_V为弹性体内的点，s为边界面．以下讨论在边界上的等式含义同（2.3）类似．由于存在（2.1）式，我们当然也可以得出满足位移已知的边界条件的应力函数σ_{ij}的所有集合．为简便，以下讨论位移函数u的集合，或简称集合．

记号2． 记满足外力已知的边界条件的位移函数u的所有集合为

$$B_\sigma = B_\sigma(u) = \{u \mid \Phi_{ij}(u) n_j = \underline{P}_i,\ \ s \in s_\sigma\} \tag{2.4}$$

式中应力$\sigma_{ij}=\Phi_{ij}(u)$；n_j为表面的外法线单位矢量；P_i为外力分量；i，$j=1,2,3$．s_σ为外力已知的边界面．下面，我们讨论的弹性体的表面s是由s_u和s_σ组成的．

记号3． 记在弹性体内满足平衡微分方程，应力位移关系的位移函数u的所有集合为

$$E = E(u) = \{u \mid \Phi_{ij}(u)_{,j} + F_i = 0,\ \ x \in x_V\} \tag{2.5}$$

式中F_i为体积力分量；$(\quad)_{,j} = \partial(\quad)/\partial x_j$．

记号4． 记弹性体静力问题的解的所有位移函数u的集合为

$$S = B_u \cap B_\sigma \cap E \tag{2.6}$$

这个弹性体静力问题的解也可以用和它等价的最小位能，最小余能原理[1]来表述：

$$S = \{u \mid \min V;\ \ u = \underline{u},\ \ s \in s_u\} \tag{2.7}$$

$$S = \{u \mid \min W;\ \ \Phi_{ij}(u) n_j = \underline{P}_i,\ \ s \in s_\sigma;\ \ \Phi_{ij}(u)_{,j} + F_i = 0,\ \ x \in x_V\} \tag{2.8}$$

式中V，W分别代表体系的位能和余能．

三、边界条件乏晰时弹性力学静力问题的解与最小位能、余能原理

现在，将上述情形推广到乏晰边界情形．

在此用的乏晰性模型系B乏晰性[4]，即在U，Y空间中存在满足自返性和对称性的二元

关系

$$f_{\varepsilon}\triangleq\{(u,V)\mid d(u,V)\leqslant\varepsilon<\infty\} \tag{3.1}$$

$$f_{\alpha}\triangleq\{(\sigma_{ij},\sigma_{ij}')\mid d(\sigma_{ij}n_j,\sigma_{ij}'n_j)\leqslant\alpha<\infty\} \tag{3.2}$$

式中d为U，Y空间中在支柱（Support）上的距离．

定义1． 记在边界$s\in s_u$上位移u是乏晰的为：$u=\underset{\sim}{u}$，$s\in s_u$． 这是指位移的一集合$\{\underset{\sim}{u}\}$，其元$\underset{\sim}{u}$在边界s_u上和给定的u有不大于ε的距离d，且其上外力$\underset{\sim}{P}_i$由$\underset{\sim}{\sigma}_{ij}n_j$（$\underset{\sim}{\sigma}_{ij}$为与$\underset{\sim}{u}$对应的应力）自然确定．即：

$$\{u=\underset{\sim}{u},s\in s_u\}\Leftrightarrow\left\{\lim_{x_V\ni x\to s\in s_u}\underset{\sim}{u}(x)\in C(\underset{\sim}{u},\varepsilon);\ \lim_{x_V\ni x\to s\in s_u}\underset{\sim}{\sigma}_{ij}(x)n_j=\underset{\sim}{P}_i(s)\right\} \tag{3.3}$$

式中 $C(\underset{\sim}{u},\varepsilon)\triangleq\{\underset{\sim}{u}\mid d(\underset{\sim}{u},\underline{u})\leqslant\varepsilon<\infty\}=\underline{u}of_{\varepsilon}$ (3.4)

下文讨论中还需作如下说明：

1． 在边界s_u上特定的乏晰位移$\underset{\sim}{u}_n$，指的是位移的一集合$\{\underset{\sim}{u}_n\}$，其元$\underset{\sim}{u}_n$在边界s_u上和给定的$\underline{u}$的距离等于$\varepsilon_n<\varepsilon$，且其上外力$\underset{\sim}{P}_i$由$\underset{\sim}{\sigma}_{ij}n_j$自然确定．即上述（3.3），（3.4）式，只是（3.4）式中的距离$d(\underset{\sim}{u}_n,\underline{u})=\varepsilon_n<\varepsilon$是特定的．

2． 满足特定乏晰位移边界条件的$\underset{\sim}{u}$的变分$\delta\underset{\sim}{u}_n$是指：

$$\delta\underset{\sim}{u}=V-\underset{\sim}{u},\qquad \underset{\sim}{u},\underset{\sim}{V}\in\{\underset{\sim}{u}_n\} \tag{3.5}$$

并设$\delta\underset{\sim}{u}_n$是完备的，即

$$\int_V T\delta\underset{\sim}{u}_n dV=0\Leftrightarrow T=0 \tag{3.6}$$

定义2． 记在边界$s\in s_\sigma$上应力σ_{ij}是乏晰的为：$\underset{\sim}{\sigma}_{ij}n_j=\underset{\sim}{P}_i$，$s\in s_\sigma$．这是指应力的一集合$\{\underset{\sim}{\sigma}_{ij}\}$，其元$\underset{\sim}{\sigma}_{ij}\cdot n_j$在$s_\sigma$上和给定的$\sigma_{ij}n_j=\underline{P}_i$有不大于$\alpha$的距离，且其上位移$\underset{\sim}{u}_i$自然确定，即：

$$\{\underset{\sim}{\sigma}_{ij}n_j=\underset{\sim}{P}_i,s\in s_\sigma\}\Leftrightarrow\left\{\lim_{x_V\ni x\to s\in s_\sigma}\underset{\sim}{\sigma}_{ij}(x)n_j\in D(\underline{P}_i,\alpha);\ \lim_{x_V\ni x\to s\in s_\sigma}u_i(x)=\underset{\sim}{u}_i(s)\right\} \tag{3.7}$$

式中 $D(\underline{P}_i,\alpha)\triangleq\{\underset{\sim}{\sigma}_{ij}\mid d(\underset{\sim}{\sigma}_{ij}n_j,\underline{P}_i)\leqslant\alpha<\infty\}=\underline{P}_i of_{\alpha}$ (3.8)

同样，在s_σ上特定的乏晰应力$\underset{\sim}{\sigma}_{ij}$；变分$\delta\underset{\sim}{\sigma}_{ij}$的含义亦与上述的位移的情形类似．

记号5．记满足位移乏晰边界条件（3.3）式的位移函数u的所有集合为

$$B_{\underset{\sim}{u}}=B_{\underset{\sim}{u}}(u)=\{u\mid u=\underset{\sim}{u},\ s\in s_u\} \tag{3.9}$$

显然，

$$B_{\underset{\sim}{u}}=B_u\cup B_{\underset{\sim}{u}_1} \tag{3.10}$$

式中 $B_{\underset{\sim}{u}_1}=\{\underset{\sim}{u}\mid 0<d(\underset{\sim}{u},\underline{u})\leqslant\varepsilon;\ \underset{\sim}{\sigma}_{ij}n_j=\underset{\sim}{P}_i,s\in s_u\}$ (3.11)

为除去明确边界条件的集合B_u后的集合．

记号6．记满足外力乏晰边界条件（3.7）的应力函数σ_{ij}的所有集合为

$$B_{\underset{\sim}{\sigma}}=B_{\underset{\sim}{\sigma}}(\sigma)=\{\underset{\sim}{\sigma}_{ij}\mid\underset{\sim}{\sigma}_{ij}n_j=\underset{\sim}{P}_i,s\in s_\sigma\} \tag{3.12}$$

同样，$B_{\underset{\sim}{\sigma}}=B_\sigma\cup B_{\sigma_1}$ (3.13)

式中 $B_{\underset{\sim}{\sigma}_1}=\{\underset{\sim}{\sigma}_{ij}\mid 0<d(\underset{\sim}{\sigma}_{ij}n_j,\underline{P}_i)\leqslant\alpha,\ u_i=\underset{\sim}{u}_i,\ s\in s_\sigma\}$ (3.14)

为除去明确边界条件的集合B_σ后的集合．

因为(2.1)式，位移函数空间的点和应力函数空间的点可以互相变换．以下，用简略记号$B_{\underset{\sim}{\sigma}}$，$B_{\underset{\sim}{u}}$等来表示$B_{\underset{\sim}{\sigma}}(\sigma)$或$B_{\underset{\sim}{\sigma}}(u)$和$B_{\underset{\sim}{u}}(u)$或$B_{\underset{\sim}{u}}(\sigma)$．总之，是指同一函数空间的集合．篇

幅所限，不考虑平衡微分方程是乏晰的情形.

记号7. 乏晰边界的弹性力学静力问题的解的所有（位移函数或应力函数）集合记为

$$\underset{\sim}{S}=B_{\underset{\sim}{u}}\cap B_{\underset{\sim}{\sigma}}\cap E \tag{3.15}$$

或

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{S}&=(B_u\cup B_{\underset{\sim}{u}1})\cap(B_\sigma\cup B_{\underset{\sim}{\sigma}1})\cap E\\&=(B_u\cap B_\sigma\cap E)\cup(B_u\cap B_{\underset{\sim}{\sigma}1}\cap E)\cup(B_{\underset{\sim}{u}1}\cap B_\sigma\cap E)\cup(B_{\underset{\sim}{u}1}\cap B_{\underset{\sim}{\sigma}1}\cap E)\\&=S\cup S_{\underset{\sim}{\sigma}1}\cup S_{\underset{\sim}{u}1}\cup S_{\underset{\sim}{\sigma}\underset{\sim}{u}1}\end{aligned} \tag{3.16}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}S_{\underset{\sim}{\sigma}1}&=B_u\cap B_{\underset{\sim}{\sigma}1}\cap E\\S_{\underset{\sim}{u}1}&=B_{\underset{\sim}{u}1}\cap B_\sigma\cap E\\S_{\underset{\sim}{\sigma}\underset{\sim}{u}1}&=B_{\underset{\sim}{u}1}\cap B_{\underset{\sim}{\sigma}1}\cap E\end{aligned}\right\} \tag{3.17}$$

下面，研究两种简单的情形.

1. 只有位移边界条件是乏晰的情形.

此时 $B_{\underset{\sim}{\sigma}1}=\phi$（空集），于是 $S_{\underset{\sim}{\sigma}1}=S_{\underset{\sim}{\sigma}\underset{\sim}{u}1}=\phi$. 为了研究 $S_{\underset{\sim}{u}1}$，我们来定义位移边界条件是乏晰时系统的位能，并称为“乏晰位能”，记为$\underset{\sim}{V}$.

定义3. 当只是位移边界条件乏晰时，弹性系统的位能$\underset{\sim}{V}$是指一集合$\{\underset{\sim}{v}\}$，其元$\underset{\sim}{v}$为相应于特定的位移$\underset{\sim}{u}_n$时的，由下式定义的“元位能”，即

$$\underset{\sim}{v}=\int_V[A(\underset{\sim}{e}_{ij})-F_i\underset{\sim}{u}_i]\,dV-\int_{S_\sigma}\underline{P}_i\underset{\sim}{u}_i\,ds+\int_{S_u}\underline{P}_i(\underset{\sim}{u}_i-\underline{u}_i)ds \tag{3.18}$$

式中A是应变能密度，是$\underset{\sim}{e}_{ij}$的函数.

$$\underset{\sim}{e}_{ij}=\frac{1}{2}(\underset{\sim}{u}_{i,j}+\underset{\sim}{u}_{j,i})$$

现在，把最小位能原理推广到位移乏晰的情形. 为方便，称之为“最小元位能原理”.

最小元位能原理.

在满足特定乏晰位移边界条件的位移函数中，使相应于特定的边界位移的元位能最小者，就是乏晰位移边界条件的弹性力学静力问题的解中的一个. 即

$$\mathring{\underset{\sim}{u}}_n\in\{u\,|\min\underset{\sim}{v};\ u=\underset{\sim}{u}_n,\ s\in s_u\}\Leftrightarrow\mathring{\underset{\sim}{u}}_n\in S_{\underset{\sim}{u}1}=B_{\underset{\sim}{u}1}\cap B_\sigma\cap E \tag{3.19}$$

证 明:

令$\mathring{\underset{\sim}{u}}_n$作满足特定乏晰边界条件的微小变动，则变分$\delta\underset{\sim}{u}_n$引起的元位能的变分$\delta\underset{\sim}{v}$为[1]:

$$\delta\underset{\sim}{v}=\int_V[-\underset{\sim}{\sigma}_{ij,j}-F_i]\delta\underset{\sim}{u}_{ni}\,dV+\int_{S_\sigma}(\underset{\sim}{\sigma}_{ij}n_j-\underline{P}_i)\delta\underset{\sim}{u}_{ni}\,ds+\int_{S_u}[\underset{\sim}{\sigma}_{ij}n_j-\underline{P}_i]\delta\underset{\sim}{u}_{ni}\,ds \tag{A}$$

由（A），（3.3），（3.6）式可见:

$$\{\delta\underset{\sim}{v}=0;\ u=\underset{\sim}{u}_n,\ s\in s_u\}\Leftrightarrow\{\underset{\sim}{\sigma}_{ij,j}+F_i=0,\ x\in x_V;\ \underset{\sim}{\sigma}_{ij}n_j=\underline{P}_i,\ s\in s_\sigma;\ u=\underset{\sim}{u}_n,\ s\in s_u\}\Leftrightarrow\mathring{\underset{\sim}{u}}_n\in B_{\underset{\sim}{u}1}\cap B_\sigma\cap E$$

同样用[1]的方法可证这个$\underset{\sim}{v}$的极值是最小值（相应于特定的$\underset{\sim}{u}_n$的$\{\underset{\sim}{v}\}$中的）. 于是(3.19)式证毕.

以上使用了类似于明确问题的最小位能原理的证明方法[1]于乏晰问题，因为在此使用的乏晰位移边界条件的位移，其元素$\underset{\sim}{u}_n$是明确、特定的（即每个$\underset{\sim}{u}_n$和$\underset{\sim}{u}$的距离已知定值）. 不同于古典的明确的最小位能原理的是变分$\delta\underset{\sim}{u}_n$在边界$s_u$上将不是零. 因此，元位能（3.18）式增加末项，才能使（A）式的末项为零.

2. **只有外力边界条件是乏晰的情形.**

此时，$B_{\underset{\sim}{u}1}=S_{\underset{\sim}{u}1}=S_{\underset{\sim}{\sigma}\underset{\sim}{u}1}=\phi$. 同样，有

最小元余能原理

在弹性体内满足平衡微分方程，在边界s_σ上满足特定乏晰外力边界条件的应力函数中，使相应于特定的边界外力的元余能最小者，就是乏晰外力边界条件的弹性力学静力问题的解中的一个. 即：

$$\begin{aligned}&\mathring{\underset{\sim}{\sigma}}_{ij}\in\{\underset{\sim}{\sigma}_{ij}\mid \min \underset{\sim}{w};\ \ \underset{\sim}{\sigma}_{ij,j}+F_i=0,\ \ x\in x_\Gamma;\ \ \underset{\sim}{\sigma}_{ij}\,n_j=\underset{\sim}{P}_i,\ \ s\in s_\sigma\}\\&\quad\Leftrightarrow\mathring{\underset{\sim}{\sigma}}_{ij}\in S_{\underset{\sim}{\sigma}1}=B_u\cap B_{\underset{\sim}{\sigma}1}\cap E\end{aligned}\tag{3.20}$$

式中“元余能”$\underset{\sim}{w}$为相应于特定的$\underset{\sim}{\sigma}_{ij}$的由

$$\underset{\sim}{w}=\int_V G(\underset{\sim}{\sigma}_{ij})dV-\int_{S_u}\underset{\sim}{\sigma}_{ij}n_j\underline{u}_i\,ds+\int_{S_\sigma}(\underset{\sim}{\sigma}_{ij}-\underline{\sigma}_{ij})n_j u_i\,ds$$

确定，G为余能密度，是应力$\underset{\sim}{\sigma}_{ij}$的函数. 此原理的证明亦类似上述.

四、元位能最小解的存在和唯一性定理

上述最小元位能原理只论述了对应于元位能最小者和乏晰边界问题的一个解是等价的，并没有证明这些解是否存在，现在，来证明解的存在和唯一性的一个定理.

元位能最小解的存在和唯一性定理

设：1. 位移函数的度量空间$U=(U,d)$是列紧的度量空间.

2. 位移函数$u(x)$，应力函数$\sigma_{ij}=\Phi_{ij}(u(x))$在定义域$\Omega$（弹性体内及边界上）有连续的偏导数且均有界.

3. $R_n=\{u_n\mid d(u_n,\underline{u})=\varepsilon_n<\varepsilon,\ \ s\in s_u\}$，

则 $\exists\ \mathring{u}_n\in R_n$，使

$$\underset{\sim}{v}(\mathring{u}_n)=\inf_{u_n\in R_n}\underset{\sim}{v}(u_n)，\text{且 }\mathring{u}_n\text{ 是唯一的}.\tag{4.1}$$

证　明：

1. $R_n=R_n\cap U\subset U$，$U-R_n$是开集，因为$U-R_n$的每一点都有一球形邻域$\subset U-R_n$中，故R_n是闭集，即$R_n=\bar{R}_n$，因而是U的列紧子集[6,P.17]，$R_n=(R_n,d)$作为度量空间是U的子空间. R_n是列紧子集$\Rightarrow R_n$作为子空间是列紧的[6,P.16].

2. 观察对应$\underset{\sim}{v}:R_n\longrightarrow E^1$.

若对任一$u_1\in R_n$，有一$u_2\in N(u_1,\delta)=\{u\mid d(u,u_1)<\delta\}$，则

$$\underline{v}(u_2)-\underline{v}(u_1)=\int_V\left[-\left(\frac{\Delta A}{\Delta e_{ij}}\right)_{,j}-F_i\right]\Delta u_i\,dV$$

$$+\int_{S_\sigma}\left[\left(\frac{\Delta A}{\Delta e_{ij}}\right)n_j-\underline{P}_i\right]\Delta u_i\,ds \tag{B}$$

式中

$$\Delta A=A(e_{ij}(u_2))-A(e_{ij}(u_1))$$
$$\Delta e_{ij}=e_{ij}(u_2)-e_{ij}(u_1)=(\Delta u_{i,j}+\Delta u_{j,i})/2$$
$$\Delta u_i=u_{2i}-u_{1i}$$

若 $\max\limits_{x\in\Omega}|u_2(x)-u_1(x)|=\delta\to 0$,

则 $\lim\limits_{\delta\to 0}\left(\frac{\Delta A}{\Delta e_{ij}}\right)=\sigma_{ij}$, $\lim\limits_{\delta\to 0}\left(\frac{\Delta A}{\Delta e_{ij}}\right)_{,j}=\sigma_{ij,j}$, 依假设，在 Ω 中 σ_{ij}, $\sigma_{ij,j}$ 有界．当然，F_i, $\underline{P}_i$也有界．于是

$$\max_{\delta\to 0}|\underline{v}(u_2)-\underline{v}(u_1)|=\max\left|\int_V(-\sigma_{ij,j}-F_i)\delta u_i dV\right.$$

$$\left.+\int_{S_\sigma}(\sigma_{ij}n_j-\underline{P}_i)\delta u_i ds\right|\leqslant\delta\cdot M=\theta \tag{C}$$

式中 $M=\max\left|\int_V(\sigma_{ij,j}+F_i)\,dV+\int_{S_\sigma}(\sigma_{ij}n_j-\underline{P}_i)\,ds\right|<\infty$

(C)式表明：$\underline{v}(u_2)\in N(\underline{v}(u_1),\ \theta)$

于是 $u\in N(u_1,\ \delta)\Rightarrow\underline{v}(u)\in N(\underline{v}(u_1),\ \theta)$ $\quad(D)$

(D)式表明：$\underline{v}:R_n\longrightarrow E^1$为一连续映射，或$\underline{v}(R_n)$是连续函数．

3．据：列紧度量空间R_n中任一连续函数是有界的，而且能在 R_n 的点到达它的最大值与最小值[5,P.23]．

即 $\exists\mathring{u}_n\in R_n$，使$\underline{v}(\mathring{u}_n)=\inf\limits_{u_n\in R}\underline{v}(u_n)$.

下面，再证$\mathring{u}_n$是唯一的．

先看R_n是一闭凸集．因若$u_1\in R_n$，$u_2\in R_n$，则

$$R_n\ni u=\alpha u_1+(1-\alpha)u_2,\quad 0\leqslant\alpha\leqslant 1$$

这是由于$d(u,\underline{u})=\max\limits_{x\in\Omega}|u(x)-\underline{u}(x)|$

$$=\max_{x\in\Omega}|\alpha(u_1(x)-\underline{u}(x))+(1-\alpha)(u_2(x)-\underline{u}(x))|$$

$$=\alpha\cdot\varepsilon_n+(1-\alpha)\varepsilon_n=\varepsilon_n$$

今假设$\mathring{u}_1$，$\mathring{u}_2\in R_n$都是使$\underline{v}$在R_n中达最小值的两个解．

取 $\mathring{u}_1+\alpha(\mathring{u}_2-\mathring{u}_1)=u\in R_n$, $0\leqslant\alpha\leqslant 1$

$$e_{ij}(u)=(u_{i,j}+u_{j,i})/2=e_{ij}(\mathring{u}_1)+\alpha(e_{ij}(\mathring{u}_2)-e_{ij}(\mathring{u}_1))$$

而 $\underline{v}(u)=\int_V[A(e_{ij}(u))-F_iu_i]dV-\int_{S_\sigma}\underline{P}_iu_ids+\int_{S_u}P_i(u-\underline{u})ds$

在R_n中是α的二次连续可微函数．对线性弹性体

$$\frac{\partial^2\underline{v}}{\partial\alpha^2}=\frac{\partial^2 A}{\partial\alpha^2}=\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,l=1}^{3}\frac{\partial^2 A}{\partial e_{ij}\partial e_{kl}}(e_{ij}(\mathring{u}_2)-e_{ij}(\mathring{u}_1))$$

$$(e_{kl}(\mathring{u}_2)-e_{kl}(\mathring{u}_1))\geqslant 0^{[1]}$$

则$\underset{\sim}{v}$在R_n中不可能有两个不同的α值上达到其最小值．因而只能$\mathring{u}_1=\mathring{u}_2$．（证毕）

五、弹性力学静力问题的解或拟解的存在性

给定边界条件的静力问题可能不一定有解．如果我们放松一下边界条件，用一个很接近的边界条件来代替原问题，所得的解称为拟解（Quasisolution）．

以放松位移边界条件为例，我们定义的拟解的集合$\underset{\sim}{S}_Q$是：

$$\underset{\sim}{S}_Q=B_\sigma\cap B_{\underset{\sim}{u}Q}\cap E \tag{5.1}$$

其中 $$B_{\underset{\sim}{u}Q}=\{u\mid \max_{x_V\ni x\to s\in s_u}|u(x)-\underset{\sim}{u}(x)|\to 0,s\in s_u\} \tag{5.2}$$

我们来证明拟解的存在，不是直接去证明$\underset{\sim}{S}_Q$是非空集合，而是利用上节的定理，证明当$\varepsilon_n\to 0$时，对应由解$\mathring{u}_n$组成的序列$\{\mathring{u}_n\}$收敛于u_Q

作满足（4.1）式的$\mathring{u}_n$组成的序列$\{\mathring{u}_n\}$．令$\varepsilon_{n+1}\leqslant\varepsilon_n/2$，即$\varepsilon_n\leqslant\varepsilon/2^n$．选$k$使得对任一$\delta$有$\varepsilon/2^k<\delta/2$．则当$n$，$m\geqslant k$时，有：（在$s\in s_u$上）

$$d(\mathring{u}_n,\ \mathring{u}_m)\leqslant d(\mathring{u}_n,\ \underset{\sim}{u})+d(\underset{\sim}{u},\ \mathring{u}_m)\leqslant\varepsilon_n+\varepsilon_m<\varepsilon_k+\varepsilon_k<\delta \tag{E}$$

则(E)式表明$\{\mathring{u}_n\}$是Cauchy序列．

因为度量空间U是列紧的$\Leftrightarrow U$是完备的[6,P.40]．$\Rightarrow$每一Cauchy序列收敛．故$\{\mathring{u}_n\}\to u_Q$，且$u_Q$是唯一的[5,P.10]．

根据最小元位能原理，这个u_Q，就是拟解．即

$$\lim_{\varepsilon_n\to 0}\inf_{u\in R_n}\underset{\sim}{v}(u)=u_Q\Leftrightarrow u_Q\in\underset{\sim}{S}_Q=B_\sigma\cap B_{\underset{\sim}{u}Q}\cap E$$

以上证明拟解起码是存在的．

参　考　文　献

1．钱伟长著，变分法及有限元讲义，第三册，（1978年11月）．
2．Negoitä，C．V．，Ralescu，D．A．，*Applications of Fuzzy Sets to Systems Analysis*．(1975)
3．Amenzade Yu．A．，Theory of elasticity，*MIR Publishers，Moscow*，94，(1979)．
4．吴学谋，乏晰性、可靠性与泛系分析，（Ⅰ），（Ⅱ），华中工学院学报，第3，4期，（1978年）．
5．江泽涵，《拓朴学引论》，（1979年）．
6．Singer，I．M．，Thorpe．J．A．，*Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry*，(1976)．
7．云天铨，乏晰边界条件的弹性体静力问题注记，华中工学院学报，《乏晰数学专辑》（1980年4月）．

The Solution of the Problems in Elastostatics and the Principles of Least-Potential Energy and Least-Complementary Energy with Fuzzy Boundary Conditions

Yun Tian-quan
(Department of Mechanics, Huazhong Institute of Technology, Wuhan)

Abstract

In this paper, the solution of the problems in elastostatics is defined on "Set Theory" and extended to fuzzy boundary conditions. Both of the principles of least-potential energy and least-complementary energy are also extended to fuzzy boundary conditions. A theorem of the existence and uniqueness of the solution of minimum elemental potential energy is given and thus the existence of a quasisolution of the problems in elastostatics is proved.