应用数学和力学，第2卷第3期（1981年6月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

Dirac δ 函数的数学表示*

王进儒

（广州华南工学院，1980年4月1日收到）

摘　　要

Dirac 提出的 δ 函数 $\delta(x)$ 满足：$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)dx=1$；当$x\neq0$时$\delta(x)=0$. 在标准分析中，这两个条件是互相矛盾的. 本文认为Dirac δ 函数应属于微观的，把实数系R无限缩小成核子 $a(o)$，先在$a(o)$上定义 Dirac δ 函数 $\delta(x)$，使它在 $a(o)$ 上的积分等于1，然后把 $\delta(x)$的定义域从 $a(o)$ 扩张到无穷区间$(-\infty, +\infty)$，使它符合上述 Dirac 提出的条件. 举出几个满足这个定义的δ函数的例子. 最后，从这个定义推出一些 δ 函数 $\delta(x)$的重要性质.

一、引　　言

在实数系 R 中一个 δ 函数的 Dirac 的定义是一个函数 $\delta(x)$ 的理想化，它满足下列条件[1]：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)dx=1 \tag{1.1}$$

$$\delta(x)=0,\ \text{当}x\neq0\text{时} \tag{1.2}$$

在标准分析中这些条件是互相矛盾的，因为除了一个点之外都等于零的任何函数，它的积分等于零. 因此在标准分析中把 Dirac δ 函数看成是一个算符，而不是通常意义下的点函数.

本世纪60年代，Robinson 创立了非标准分析[2]，在[2]与[3]中分别提到了 Dirac δ 函数，但没有给出 Dirac δ 函数的定义. [4]给出了 δ 函数的定义，但没有导出 δ 函数最重要的筛取性质. [5]为了导出筛取性质，把[4]中的 δ 函数的条件改得更强了 但在[4]和[5]的 Dirac δ 函数的定义中，当 $x\in R$ 且 $x\neq0$ 时,$\delta(x)$ 的函数值只是近似于零而不是真正等于零,因此没有真正符合上述条件(1.1)与(1.2). [5]导出的筛取性质也仅是一个近似式，而且要求 $f(x)$ 是 R 上的有界连续函数，和[1]要求 $f(x)$ 是任意连续函数不同. 因此，用[5]中的筛取性质，不能验证[1]中60页各个公式 例如对于公式“$x\delta(x)=0$”，其中x是R上的连续函数，但不是 R 上的有界函数.

本文认为 Dirac δ 函数应属于微观的，可是[2—5]却是用宏观的观点和方法，因而没有

* 周履推荐

很好解决用点函数表示Dirac δ函数的数学困难.

本文把实数系R无限缩小成核子$\alpha(o)$，先在$\alpha(o)$上定义Dirac δ函数$\delta(x)$，使它在$\alpha(o)$上的积分等于1，然后把$\delta(x)$的定义域从$\alpha(o)$扩张到无穷区间$(-\infty,\ +\infty)$. 使它符合上述条件(1.1)与(1.2). 举出几个满足这个定义的δ函数的例子，这些例子在标准分析中曾经用Delta型序列近似表达而未能精确表达的. 最后，推出了一些$\delta(x)$的重要性质. 这些用数学方法推出的结果都符合于[1]中从物理直观得出的公式.

二、Dirac δ 函 数

定义1 设R是实数系，k是一个无穷大自然数[2,6]. 集

$$\alpha(o)=\{x \mid x=u/k,\ u\in R\} \tag{2.1}$$

叫做原点o的核子.

设$f(u)$是R中的区间$[a,\ b]$上的可积函数，又设

$$u=kx \qquad (u\in R) \tag{2.2}$$

则

$$\int_a^b f(u)du=\int_{\frac{a}{k}}^{\frac{b}{k}} kf(kx)dx \tag{2.3}$$

人们熟知积分$I=\int_a^b f(u)du$是“黎曼和的极限”，满足“ε—δ”定义；因此，积分$I=\int_{\frac{a}{k}}^{\frac{b}{k}} kf(kx)dx$也是“黎曼和的极限”，而它满足“$\varepsilon,\ \delta/k$”定义.

如果极限

$$\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int_a^b f(u)du=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int_{\frac{a}{k}}^{\frac{b}{k}} kf(kx)dx$$

存在且有限，我们写作

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)du=\int_{\alpha(o)} kf(kx)dx \tag{2.4}$$

函数$kf(kx)$叫做在核子$\alpha(o)$上的可积函数.

设

$$R_1=\{x \mid x=u+t,\ u\in R,\ t\in\alpha(o)\} \tag{2.5}$$

又设$f(x)$是R中的区间$[a,\ b]$上的连续函数. 把$f(x)$的定义区间从$[a,\ b]$自然扩张到R_1中的区间$[a,\ b]_1=\{x \mid x\in R_1且a\leqslant x\leqslant b\}$，即对每一个$x_0\in[a,b]$，当$x\in[a,b]_1$且$x\simeq x_0$时，$f(x)\simeq f(x_0)$. 从黎曼积分的“$\varepsilon,\ \delta$”定义容易看出，$f(x)$经过自然扩张后，并不影响积分值$I=\int_a^b f(x)dx$. 这个论断对于广义积分也成立.

定义2. 设$\delta(x)$是核子$\alpha(o)$上的可积函数. 如果满足条件：

(D1) $\int_{\alpha(o)}\delta(x)dx=1$

(D2) $\delta(x)=0$，当$x\in R_1$且 $x\notin\alpha(o)$ 时

则$\delta(x)$叫做Dirac δ函数.

在这个定义中，因为在核子$\alpha(o)$中仅包含实数系R的一个点 $x=0$，而在核子 $\alpha(o)$ 之外函数 $\delta(x)$ 的值都等于零. 因此可以把条件 (D1) 的积分区域扩大到任何包含核子 $\alpha(o)$ 的区间，（包括无穷区间），并不影响积分值. 于是得

$$\left.\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)dx=1\\&\delta(x)=0,\text{当 } x\in R \text{ 且 } x\neq 0 \text{ 时}\end{aligned}\right\}\tag{2.6}$$

(2.6)式符合从物理直观得出的公式[1].

由定义 2 及(2.4)式容易推得:

定理1. 如果$f(u)$是R上的可积函数且

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)du=1$$

k是一个无穷大自然数，则函数

$$\delta(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } x\in R_1 \text{ 且} x\notin\alpha(o)\text{时}\\ kf(kx), & \text{当 } x\in\alpha(o)\text{时}\end{cases}$$

是一个 Dirac δ 函数.

从定理 1 知Dirac δ函数是一类函数. 现在我们举出几个不同的 Dirac δ 函数的例. 在这几个例子中，都假定它们的定义域是R_1，k是一个无穷大自然数.

例1. $$\delta_1(x)=\begin{cases}0, & \text{当}\notin\alpha(o)\text{时}\\ \dfrac{\sin kx}{\pi x}, & \text{当} x\in\alpha(o)\text{时}\end{cases}$$

这是Dirichlet 型的 δ 函数 ([4,5] 的定义不能包含 Dirichlet 型 δ 函数). 容易验证，函数$\delta_1(x)$满足定义 2 的条件，从而是一个 Dirac δ 函数. 事实上，设

$$f(u)=\frac{\sin u}{\pi u}$$

则

$$kf(kx)=k\cdot\frac{\sin kx}{\pi kx}=\frac{\sin kx}{\pi x}$$

由 (2.4) 式得

$$\int_{\alpha(o)}\delta_1(x)dx=\int_{\alpha(o)}\frac{\sin kx}{\pi x}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin u}{\pi u}du=1$$

条件$D(2)$是显然的.

例2. $$\delta_2(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } x\notin\alpha(o)\text{ 时}\\ \dfrac{k}{\pi(1+k^2x^2)}, & \text{当 } x\in\alpha(o)\text{ 时}\end{cases}$$

例3. $$\delta_3(x)=\begin{cases}0, & \text{当} x\notin\alpha(o)\text{时}\\ \dfrac{k}{\sqrt{\pi}}e^{-k^2x^2}, & \text{当} x\in\alpha(o)\text{时}\end{cases}$$

例4. $\delta_4(x)=\begin{cases} 0, & 当\, x \notin \left[-\frac{1}{2k}, \frac{1}{2k}\right] \\ k, & 当\, x \in \left[-\frac{1}{2k}, \frac{1}{2k}\right] \end{cases}$

容易验证，例2，例3，例4都满足定义 2 的条件.

三、Dirac δ 函数的性质

上面的 Dirac δ 函数的定义符合物理学上的公式，因此就可以从这定义推出物理学上的关于Dirac δ函数$\delta(x)$的公式.

定理2. 设$f(x)$是R上的实值连续函数，把$f(x)$从R自然扩张到R_1，又设$\delta(x)$是某一个Dirac δ 函 数，则下面筛取性质

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)dx=f(0) \tag{3.1}$$

成立.

证. 令

$$H(x)=\int_{-\infty}^{x} \delta(x)dx, \quad (x\in R_1) \tag{3.2}$$

由定义 2 得

$$H(x)=\begin{cases} 0, & 当x<0\ 且x\notin \alpha(o)时 \\ 1, & 当x>0\ 且x\notin \alpha(o)时 \end{cases}$$

至于$H(x)$在核子$\alpha(o)$上的函数值，随所选取的$\delta(x)$而定. 设a、$b\in R$ 且 $a<0<b$，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)dx=\int_{a}^{b} f(x)\delta(x)dx=\int_{a}^{b} f(x)dH(x) \tag{3.3}$$

把(3.3)式右边的积分区域限制在实数系R上，按实函数的 Stieltjes 积 分的分部积分法就得

$$\int_{a}^{b} f(x)dH(x)=f(b)-\int_{0}^{b} df(x)=f(0)$$

计及(3.3)式就得(3.1)式. 定理证完.

从 (3.1) 式容易导出筛取性质另一形式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-a)dx=f(a) \tag{3.4}$$

其中a是任意实数，$f(x)$ 是 R 上任意连续函数.

筛取性质证完后，[1]60页的每一公式就容易证实了. 例如对其中的 (3.1) 式，根据筛取性质，对任意R上的连续函数$f(x)$都有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot x\delta(x)dx=f(0)\cdot 0=0$$

从而

$$x\delta(x)\overset{(弱)}{=\!=}0$$

再推导[1]60页的(3.1)式. 对于任意连续函数$f(x)$，任意实数$a>0$，因为

$$\delta(x^2-a^2)=0, \quad 当 -\frac{a}{2}\leqslant x\leqslant \frac{a}{2}时$$

令 $u=x^2-a^2$，则 $du=2xdx$，再令

$$g(u)=\frac{f(x)}{2x}$$

于是得

$$\int_0^{+\infty} f(x)\delta(x^2-a^2)dx=\int_{\frac{a}{2}}^{+\infty} f(x)\delta(x^2-a^2)dx=\int_{-\frac{3a^2}{4}}^{+\infty} g(u)\delta(u)du=g(0)=\frac{f(a)}{2a}$$

同样可得

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)\delta(x^2-a^2)dx=\frac{f(-a)}{2a}$$

由 (3.4) 式得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x^2-a^2)dx=\frac{1}{2a}[f(a)+f(-a)]$$

$$=\frac{1}{2a}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta(x-a)dx+\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta(x+a)dx\right]$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\left[\frac{1}{2a}\{\delta(x-a)+\delta(x+a)\}\right]dx$$

这就是

$$\delta(x^2-a^2)\overset{(弱)}{=\!=}\frac{1}{2a}\{\delta(x-a)+\delta(x+a)\}\quad(a>0)$$

在广义函数论中，如何表示两个或多个δ函数的乘积是比较困难的．在本文中，Dirac δ 函数已被表示为通常意义下的点函数，因此，两个或多个 δ 函数的乘积也就是两个或多个通常意义下点函数的乘积．

作者衷心感谢关肇直教授的指导和鼓励．

参 考 文 献

1. Dirac, P. A. M., *The Principles of Quantum Mechanics*, Oxford Clarendon Press, 3th ed., (1947).
2. Robinson, A., *Nonstandard Analysis*, North-Holland Amsterdam, (1966).
3. Kelemen, P. J. and Robinson, A., The Nonstandard $\lambda:\phi_2^4(x)$:Model I. The technique of nonstandard analysis in theoretical physics, *J. Math. Phys.*, 13, 12, Dec. (1972).
4. Lightstone, A. H. and Robinson, A., *Nonarchimedean Fields and Asymptotic Expansions*, North-Holland, (1975).
5. Lightstone A. H. and Kam Wong, Dirac Delta Functions via Nonstandard Analysis, *Canad. Math. Bull.* 81, 5 (1975) 759—762. Zbl. 329. 26020.
6. Van Osdol and Donovan, H., Truth with respect to an ultrafilter or how to make intuition rigorous, *Amer. Math. Monthly* 79, (1972)355—363.

A Mathematical Representation of Dirac δ Function

Wang Jin-ru

(*South China Institute of Technology, Guangzhou*)

Abstract

Dirac's definition of a δ function $\delta(x)$ in the real number system R is the idealization of a function satisfying the following conditions

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)dx=1 \tag{0.1}$$

$$\delta(x)=0,\ \text{for } x\neq 0 \tag{0.2}$$

These conditions in standard analysis are inconsistent, since the integral of any function which has a value of zero, with the exception of that which at one point.

Let R be the real number system, k be an infinite natural number and

$$a(o)=\left\{x\mid x=\frac{u}{k},\ u\in R\right\}$$

$$R_1=\{x\mid x=u+t,\ u\in R,\ t\in a(o)\}$$

The function $\delta(x)$ is called a Dirac δ function if

$$\int_{a(o)}\delta(x)dx=1 \tag{0.3}$$

$$\delta(x)=0,\ \text{for } x\in R_1 \text{ and } x\notin a(o) \tag{0.4}$$

The conditions (0.3) and (0.4) imply that

$$\begin{cases}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)dx=1\\ \delta(x)=0,\ \text{for } x\in R \text{ and } x\neq 0\end{cases}$$

which is in agreement with the conditions (0.1) and (0.2). (In [4,5], $\delta(x)\simeq 0$ but not $\delta(x)=0$ when $x\in R$ and $x\neq 0$).

Theorem 1. If $f(u)$ is an integrable function on R and

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)du=1$$

then

$$\delta(x)=\begin{cases}0,\ \text{for } x\in R_1 \text{ and } x\notin a(o)\\ kf(kx),\ \text{for } x\in a(o)\end{cases}$$

is a Dirac δ function.

Various examples of Dirac δ functions can be presented. e. g.

$$\delta(x)=\begin{cases}0,\ \text{for } x\in R_1 \text{ and } x\notin a(o)\\ \dfrac{\sin kx}{\pi x},\ \text{for } x\in a(o)\end{cases}$$

Some important properties of δ function $\delta(x)$ have been derived.