

# 简便积分方程法分析桩

云天铨

(武汉华中工学院, 1980年2月29日收到)

## 摘 要

本文用两种方法来分析桩受垂直载荷作用问题. 一种是: 将由 Mindlin 集中力组成的轴对称载荷沿弹性半空间  $z$  轴的  $[0, L]$  内分布, 并迭加 Boussinesq 的解; 另一种是: 除上述诸虚载荷外, 还将 Mindlin 的垂直集中力沿  $z$  轴的  $[0, L]$  内分布. 前者使边界条件为:

$$\left. \begin{aligned} 1. \quad & z=0, r \neq 0, \sigma_z = \tau_{rz} = 0 \\ 2. \quad & 0 \leq z \leq L, U(e, z) = a - e, (e \rightarrow a) \\ 3. \quad & P = -2\pi \left[ \int_0^L \tau_{rz}(a, z) dz + \int_0^a r \sigma_z(r, L) dr \right] \end{aligned} \right\} \quad (0.1)$$

的桩受垂直载荷问题归结为一个 Fredholm 第一种积分方程; 后者使边界条件 (其中 1, 3 式同) (0.1) 式中的 2 为:

$$0 \leq z \leq L, U(e, z) = a - e, (e \rightarrow a); W(a, z) = \text{常数} \quad (0.2)$$

的桩受垂直载荷问题归结为两个联立的 Fredholm 第一种方程式. 对刚性桩而言, 前者适于容许桩和其侧面附着的土有相对滑动情况; 后者适于无相对滑动情形.

这两种方法较现有的虚载荷分布于桩表面的诸法具有下列优点:

1. 所得的积分方程不是二维、奇异的; 而是一维、非奇异的.
2. 能考虑初应力的影响.

第一种方法还无须预先假定沉陷函数  $W$ ; 在可压缩桩中容易考虑三维应力的影响的好处.

本文还给出 Fredholm 第一种积分方程近似解误差估计的一个定理, 以及两种方法用 DJS-21 机计算单桩沉陷的结果.

## 记 号

$x, y, z$  直角坐标.

$r, \theta, z$  柱坐标.

$A, A_i, K_{ij} (i, j=1, 2)$  核算子.

$A^*$   $A$  的伴随算子.

$[A], [A_i]$  以  $A_{ij}$  和  $A_{iij}$  为元的矩阵.

$[K_{KL}]$  以  $K_{KLij} (K, L=1, 2)$  为元的  $2n \times n$  矩阵.

$a$  桩的半径 (桩表面的土变形后的位置到  $z$  轴的距离).

$\{B\}$  以  $B_i$  为元的列矩阵.

$c$  轴对称载荷或 Mindlin 垂直力分布深度.

$e$  桩表面的土变形前的位置与  $z$  轴距离.

$E$  半空间介质的杨氏模量.

$F$  无限维 Hilbert 空间一给出矢量.

- $\{F\}, \{F_i\}, \{U_i\}$  分别为以  $F_i, F_{ij}$  和  $U_{ij}$  为元的列矩阵.  
 $G; G_1$  半空间介质的剪切模量; 常数.  
 $H$  Hilbert 空间.  
 $K$  比例系数.  
 $L, \Delta L_P$  桩长, 桩受载后的伸长.  
 $P, Q$  作用于桩顶上的铅直力, 或 Boussinesq 集中力.  
 $R_1, R_2$  距离.  
 $S_n = X^* - X_n$ .  $X^*, X^0$  精确解和近似解.  
 $U_1, U_2$  径向和铅直位移. (或  $U, W$ ).  
 $X, X_1, X_2$  未知的虚载荷 (轴对称载荷或 Mindlin 垂直力) 分布的集度.  
 $\{X\}, \{X_i\}$  以  $X_j$  和  $X_{ij}$  为元的列矩阵.  
 $\mu$  Poisson 比.  
 $\lambda_j^2$  特征值.  $\Psi_j$  特征函数.  
 $\lambda = E / ((1 + \mu)(1 - 2\mu))$  Lamé 系数.  
 $\varphi$  摩擦角.  
 $e_z$   $z$  方向的单位伸长.  
 $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$  正应力柱坐标分量.  
 $\tau_{rz}$  剪应力.  
 下标:  $c$  代表可压缩桩的量.  
 $h$  代表桩顶的.  
 记号  $\langle \dots \rangle$  内积  
 $\|X\|^2 = \langle X, X \rangle$ ;  
 $( \quad )_r' = \partial( \quad ) / \partial r$ .

## 一、概 述

圆柱嵌入半空间的三维问题是弹性理论中的一个重要问题. 因为迄今桩和桩群的分析仍是土木工程中的一个主要课题. 许多研究者企图用弹性理论作桩受力分析的基础 (如 P. K. Banerjee<sup>[1]</sup>, R. Butterfield<sup>[2]</sup>, Poulos<sup>[3]</sup>, N. S. Mattes<sup>[4]</sup>, Muki 和 Sternberg<sup>[5]</sup>, Luk 和 Keer<sup>[6]</sup>等). 近十年来, 积分方程方法经常用于 (表面/体积) 比例低的问题 (如弹性半空间问题等), 因为对这类问题积分方程的方法常较有限元法给出计算省时而且结果更精确<sup>[1]</sup>. 但是, 许多作者利用虚的基本载荷 (Kelvin 或 Mindlin 的集中力) 沿真实的界面分布的办法推导出积分方程是奇异的, 二维的积分方程组. 自然, 这种积分方程组的数值计算是很费劲的.

不过, 对于许多问题可以不用将虚载荷放在真实的弹性体的边界上. 例如作者曾用由 Kelvin 集中力组成的“集中力偶”沿弹性体外的  $z$  轴分布来解迴转体的扭转问题<sup>[7]</sup>等. 因为这些虚的基本载荷并不分布于物体的表面或内部, 故所得的积分方程是非奇异的, 而且是一维的. 显然, 这种沿轴分布基本载荷所得的积分方程较之沿物体界面分布的要简单得多.

至于单桩受垂直载荷作用这个基本问题, 已有一些作者从不同角度分析载荷——沉陷关系而给出近似的算法<sup>[2-6]</sup>. 他们的分析方法是类似的, 即虚载荷沿桩表面分布. 不过, 这些分析方法也并不完美. 例如 Butterfield 和 Banerjee<sup>[2]</sup>综合发展一个适于不可压缩和可压

缩桩嵌入各向同性、线性齐次的弹性介质中的方法。他们考虑的问题，其边界条件是：

$$z=0, \sigma_z=\tau_{rz}=0; 0 \leq z \leq L, W(a, z)=f_1(z), U(a, z)=f_2(z)$$

其中  $f_1(z)$  和  $f_2(z)$  是给定的函数；对不可压缩桩而言，给出  $f_1(z)=\text{常数}$ ， $f_2(z)=0$ ；对可压缩桩则稍加修正。他们将沿纵向和径向的虚载荷  $\Phi_z$  和  $\Phi_r$ （Mindlin 的垂直和水平集中力）作用于桩的表面，获得两个二维的奇异积分方程。为了简化计算，他们放松了径向的相容条件。

R. Butterfield 等人的这个方法用来描述桩的工作，至少有两点不足之处：

1. 没有考虑到桩还未受到载荷时，桩和土之间的初应力的影响；
2. 桩表面的沉陷函数需要预先给出。但实际上除非作些补充的假定（例如桩表面和土粘在一起，无相对滑动），否则沉陷函数是未知的。不过，粘在一起的假定又和他们放松了径向的相容条件相矛盾。再者，在某些情况下，土和桩表面各点都粘在一起是靠不住的，例如对于某些点  $\tau_{rz}(a, z) > \sigma_r(a, z) \tan \varphi$ ，所以，我们最好不把桩表面的沉陷函数  $f_1(z)$  假定为已知函数。

鉴于上述，本文的第一种方法用 Mindlin 的水平集中力组成的轴对称载荷在  $z$  轴  $[0, L]$  内分布的方法，同时考虑载荷作用之前桩嵌入的初应力。这种方法，无需预先给定桩表面的沉陷函数  $f_1(z)$ 。对于不可压缩桩而言，将桩表面完全与土粘在一起的假定放松为只在某些点相互粘结，例如桩顶的沉陷等于桩底  $W(a, L)$  介质的沉陷。对可压缩桩而言，采用了粘结假定（即  $\tau_{rz}(a, z) = \sigma_r(a, z) \tan \varphi$ ），这里面包含着桩表面沉陷函数  $f_1(z)$  是已知的意思。这是因为只有采用了粘结假定，桩表面的沉陷才能已知。因此，我们所论述的问题，其边界条件用 (0.1) 式描述。用此法分析是非常简单的。对于不可压缩和可压缩的桩，二者均可得到一维的 Fredholm 第一种积分方程。而在文[2]中，对不可压缩桩，得到的是两个二维的第一种奇异的积分方程；对于可压缩桩，只考虑桩的一维应力状态还得出复杂的偏微分方程组，且需用繁覆的迭代算法来逼近。

用类似的方法，对于预先给定沉陷函数  $f_1(z)$ ，本文的第二种方法将边界条件为(0.2)的受垂直载荷的单桩问题归结为两个联立的一维、非奇异的 Fredholm 第一种积分方程。

误差估计是数值分析的一个重要课题。可是在三维弹性体的积分方程方法的论文中均未见论述。本文在某些假设的基础上给出了 Fredholm 第一种积分方程近似解误差估计的一个定理。

最后，文中给出单桩受垂直载荷问题用 DJS-21 机计算的结果。

本文适用的假定是：半空间为均匀各向同性的线性弹性介质；桩为中长桩 ( $10 \leq L/D \leq 100$ )；小位移（即  $e \rightarrow a$ ）。不过对于  $e \rightarrow a$  情形，可用本文公式作  $N$  次连续扩孔 ( $e_{i+1} = a_i, e_i \rightarrow a_i, i = 1, 2, \dots, N$ ) 来逼近。

## 二、积分方程的推导

嵌入半空间的圆柱在轴向载荷  $P$  作用下的应力场可用此法描述：1) 载荷  $P$  作用在半空间原点  $(0, 0, 0)$ ，2) 介质从圆柱占据的位置中被赶出。基于这个观点，我们来推导积分方程。

Mindlin 给出半无限体内受集中力作用这一问题的解. 当平行于表面  $x$  轴的集中力作用于  $(0, 0, c)$  处时, 任意点  $N(x, y, z)$  的位移分量是<sup>[9]</sup>:

$$\left. \begin{aligned} dU_0 &= \left\{ \left[ \frac{(3-4\mu)}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{x^2}{R_1^3} + \frac{(3-4\mu)x^2}{R_2^3} + \frac{2cz(1-3x^2/R_2^2)}{R_2^5} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 4(1-\mu)(1-2\mu)(1-x^2/(R_2(R_2+z+c)))/(R_2+z+c) \right] \cos\theta - xy \sin\theta \right. \\ &\quad \left. \cdot \left[ \frac{1}{R_1^3} + \frac{(3-4\mu)}{R_2^3} - \frac{6cz}{R_2^5} - 4(1-\mu)(1-2\mu)/(R_2(R_2+z+c)^2) \right] \right\} \\ &\quad / (16\pi G(1-\mu)) \\ dW_0 &= x \left[ \frac{(z-c)}{R_1^3} + \frac{(3-4\mu)(z-c)}{R_2^5} - \frac{6cz(z+c)}{R_2^5} + 4(1-\mu) \right. \\ &\quad \left. \cdot \frac{(1-2\mu)}{(R_2(R_2+z+c))} \right] / (16\pi G(1-\mu)) \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

$$\text{式中} \quad R_1 = [x^2 + y^2 + (z-c)^2]^{1/2} \quad R_2 = [x^2 + y^2 + (z+c)^2]^{1/2}$$

$$x = r \cos\theta \quad y = -r \sin\theta$$

同样, 我们可以得到等值反向的集中力作用于  $(-\Delta x, 0, c)$  处, 点  $N(x, y, z)$  的位移. 由这样一对力共同作用下, 当  $\Delta x \rightarrow 0$  时, 任意点  $N(x, y, z)$  的位移为:

$$\left. \begin{aligned} dU_1 &= \partial(dU_0)/\partial x = \left\{ \left[ -\frac{(3-4\mu)}{R_1^3} - \frac{1}{R_2^3} + \frac{(2R_1^2 - 3x^2)}{R_1^5} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(2R_2^2 - 3x^2)(3-4\mu)}{R_2^5} - \frac{6cz}{R_2^5} - \frac{6cz(2R_2^2 - 5x^2)}{R_2^7} + 4(1-\mu) \right] \right. \\ &\quad \left. \cdot (1-2\mu) \left( \frac{(R_2+z+c)(x^2 - 3R_2^2)}{(R_2^3(R_2+z+c)^3)} - \frac{2R_2 x^2}{(R_2^3(R_2+z+c)^3)} \right) \right. \\ &\quad \left. + r \sin^2\theta \left[ \frac{(R_1^2 - 3x^2)}{R_1^5} + \frac{(3-4\mu)(R_2^2 - 3x^2)}{R_2^5} - \frac{6cz(R_2^2 - 5x^2)}{R_2^7} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 4(1-\mu)(1-2\mu) \frac{(R_2+z+c)(R_2^2 - x^2) - 2x^2 R_2}{(R_2^3(R_2+z+c)^3)} \right] \right\} \\ &\quad / (16\pi G(1-\mu)) \\ dW_1 &= \partial(dW_0)/\partial x = \left[ \frac{(z-c)(R_1^2 - 3x^2)}{R_1^5} + \frac{(3-4\mu)(z-c)(R_2^2 - 3x^2)}{R_2^5} \right. \\ &\quad \left. - \frac{6cz(z+c)(R_2^2 - 5x^2)}{R_2^7} + 4(1-\mu)(1-2\mu) \left[ \frac{(R_2+z+c)(R_2^2 - x^2)}{(R_2^3(R_2+z+c)^3)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{x^2 R_2}{(R_2^3(R_2+z+c)^3)} \right] \right] / (16\pi G(1-\mu)) \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

当上述的一对力沿  $z=c$  处的  $xy$  平面内均匀地与  $z$  轴对称地分布时, 任意点  $N(x, y, z)$  的位移可由 (2.2) 式积分得出:

$$\left. \begin{aligned} dU &= \int_0^\pi dU_1 d\theta = X(c) r \left\{ \frac{2\mu}{R_1^3} + \frac{(4-6\mu)}{R_2^3} - \frac{3r^2}{2R_1^5} + \left[ \frac{1.5r^2(3-4\mu)}{R_2^5} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{12cz}{R_2^5} + \frac{15czzr^2}{R_2^7} + 4(1-\mu)(1-2\mu) \frac{(R_2+z+c)(0.5r^2 - 2R_2^2)}{(R_2^3(R_2+z+c)^3)} \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{0.5R_2 r^2}{(R_2^3(R_2+z+c)^3)} \right\} / (16G(1-\mu)) \\ dW &= \int_0^\pi dW_1 d\theta = X(c) \left\{ \frac{(z-c)(R_1^2 - 1.5r^2)}{R_1^5} + \frac{(3-4\mu)(z-c)(R_2^2 - 1.5r^2)}{R_2^5} \right. \\ &\quad \left. - \frac{6cz(z+c)(R_2^2 - 2.5r^2)}{R_2^7} + 4(1-\mu)(1-2\mu) \left[ \frac{(R_2+z+c)(R_2^2 - 0.5r^2) - 0.5R_2 r^2}{(R_2^3(R_2+z+c)^3)} \right] \right\} / (16G(1-\mu)) \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

式中  $X(c)$  表示轴对称载荷在  $z=c$  处分布的集度.

令带有集度函数  $X(c)$  的轴对称载荷沿  $z$  轴的  $(0, L)$  内分布, 再加上作用于原点  $(0, 0, 0)$  垂直  $xy$  平面的集中力<sup>[10]</sup>, 我们便得到任意点  $N(r, \theta, z)$  的位移如下:

$$U(r, z) = \int_0^L A(r, z, c) X(c) dc + U_p(r, z) \quad (2.4)$$

$$W(r, z) = \int_0^L B(r, z, c) X(c) dc + W_p(r, z) \quad (2.5)$$

$$\text{式中} \quad A(r, z, c) = r \left\{ \frac{2\mu}{R_1^3} + \frac{(4-6\mu)}{R_2^3} - \frac{1.5r^2}{R_1^5} + \left[ \frac{1.5r^2(3-4\mu)}{R_2^5} - \frac{12cz}{R_2^5} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{15czzr^2}{R_2^7} + 4(1-\mu)(1-2\mu) \frac{(R_2+z+c)(0.5r^2 - 2R_2^2)}{(R_2^3(R_2+z+c)^3)} \right] \right. \\ \left. - \frac{0.5R_2 r^2}{(R_2^3(R_2+z+c)^3)} \right\} / (16G(1-\mu)) \quad (2.6)$$

$$B(r, z, c) = [(z-c)(R_1^2 - 1.5r^2)/R_1^5 + (3-4\mu)(z-c)(R_2^2 - 1.5r^2)/R_2^5 - 6cz(z+c)(R_2^2 - 2.5r^2)/R_2^5 + 4(1-\mu)(1-2\mu)((R_2+z+c)(R_2^2 - 0.5r^2) - 0.5R_2r^2)/(R_2^3(R_2+z+c)^2)]/(16G(1-\mu)) \quad (2.7)$$

$$U_p(r, z) = P(1-2\mu)(1+\mu)[z(r^2+z^2)^{-1/2} - 1 + r^2z(r^2+z^2)^{-3/2}/(1-2\mu)]/(2\pi Er) \quad (2.8)$$

$$W_p(r, z) = P[(1+\mu)z^2(r^2+z^2)^{-3/2} + 2(1-\mu^2)(r^2+z^2)^{-1/2}]/(2\pi E) \quad (2.9)$$

令(0.1)成立, 可得:

$$\int_0^L A(e, z, c)X(c)dc = F(z)$$

或  $AX = F$  (2.10)

式中  $F = F(z) = a - e - U_p(a, z)$  (2.11)

至此, 受垂直载荷的圆柱嵌入半空间的三维问题归结为 Fredholm 第一种积分方程(2.10)式, 可用已知诸法求解.

一旦解出(2.10), 位移可由(2.4), (2.5)式算出.

### 三、不可压缩桩的解

通常积分方程(2.10)式最简单的数值处理是用下列离散型式来代替.

$$\sum_{j=1}^n A_{ij}X_j = F_i, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (3.1)$$

或  $[A]\{X\} = \{F\}$  (3.2)

式中  $[A] = n \times n$  矩阵,  $\{X\}$ ,  $\{F\}$  是  $n$  列向量,

$$\left. \begin{aligned} A_{ij} &= \int_{(a-L)\Delta L}^{i\Delta L} A(e, z_i, c)dc, \quad \Delta L = L/n \\ X_j &= X(c_j), \quad F_i = F(z_i) = a - e - U_p(e, z_i) \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

(3.2)式的解

$$\{X\} = [A]^{-1}\{F\} \quad (3.4)$$

一旦  $\{X\}$  算出, 则受轴向载荷  $P$  时, 不可压缩桩顶的位移 (等于桩底部的位移) 很容易由(2.5)式算得为:

$$W(a, L) = \int_0^L B(a, L, c)X(c)dc + W_p(a, L) = \sum_{j=1}^n B_jX_j + W_p(a, L) \quad (3.5)$$

或  $W(a, L) = \{B\}^T\{X\} + W_p(a, L)$

式中  $\{B\} = \{B_j\}$ ,  $B_j = \int_{(a-L)\Delta L}^{j\Delta L} B(a, L, c)dc$  (3.6)

代(3.4)式入(3.5)式, 得

$$W(a, L) = \{B\}^T[A]^{-1}\{F\} + W_p(a, L) \quad (3.7)$$

注意上述位移包括由于桩嵌入的初沉陷的桩顶位移  $W_0$ . 如果除去初沉陷  $W_0$ , 则桩的净沉陷  $W_{nh}$  为:

$$W_{nh} = W_k - W_0 = W(a, L) - W_0(a, L) \quad (3.8)$$

$$\text{式中 } W_0(a, L) = \int_0^L B(a, L, c) X_0(c) dc = \sum_{i=1}^n B(a, L, c_i) X_0(c_i) \quad (3.9)$$

$X_0(c)$  为相应于  $P=0$  时积分方程 (2.10) 的解.

#### 四、可压缩桩的解

本节所考虑的边界条件与上节不同的是假定桩的表面各点都被介质粘结. 于是和(2.10)式稍有不同, 此时的积分方程是:

$$U(e, z) = \int_0^L A(e, z, c) X(c) dc + U_P(e, z) = a[1 + (\sigma_{r_0} - \mu_c \sigma_{r_0} - \mu_c \sigma_{z_0})/E_c] - e \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \text{其中 } \sigma_{z_0} &= -[P + 2\pi a \int_0^z \tau_{rz}(a, z) dz]/(\pi a^2) \\ \tau_{rz}(a, z) &= \sigma_{r_0}(a, z) \operatorname{tg} \varphi \\ \sigma_{r_0} = \sigma_r|_{r=a} &= (\lambda + 2G) \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r=a} + \lambda \left( \frac{U}{r} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) \Big|_{r=a} \\ \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r=a} &= \int_0^L A'_r(a, z, c) X(c) dc + U'_{Pr}(e, z) \\ \frac{\partial W}{\partial r} \Big|_{r=a} &= \int_0^L B'_r(a, z, c) X(c) dc + W'_{Pr}(a, z) \\ A'_r(a, z, c) &= \partial A(r, z, c) / \partial r|_{r=a} \\ U'_{Pr}(a, z) &= \partial U_P(r, z) / \partial r|_{r=a} \\ B'_r(a, z, c) &= \partial B(r, z, c) / \partial z|_{r=a} \\ W'_{Pr}(a, z) &= \partial W_P(r, z) / \partial z|_{r=a} \end{aligned} \quad (4.2)$$

将 (4.2) 式代入 (4.1) 式得

$$\int_0^L A_1(e, z, c) X(c) dc = F_1(z) \quad (4.3)$$

$$\text{或写成简明的形式 } A_1 X = F_1 \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \text{式中 } A_1(e, z, c) &= \{A - a(1 - \mu_c)[(\lambda + 2G)A'_r + \lambda A/a + \lambda B'_r]/E_c \\ &\quad - (2\mu_c \operatorname{tg} \varphi/E_c) \int_0^z [(\lambda + 2G)A'_r + \lambda A/a + \lambda B'_r] dz \\ F_1(z) &= a - U_P(e, z) - e + a(1 - \mu_c)[(\lambda + 2G)U'_{Pr}(a, z) + \lambda U_P(a, z)/a \\ &\quad + \lambda W'_{Pr}(a, z)]/E_c + (\mu_c P/\pi a + 2\mu_c \operatorname{tg} \varphi) \int_0^z [(\lambda + 2G)U'_{Pr}(a, z) + \lambda U_P(a, z)/a \\ &\quad + \lambda W'_{Pr}(a, z)] dz/E_c \end{aligned} \quad (4.5)$$

可压缩桩所得的积分方程 (4.3) 式仍是 Fredholm 第一种积分方程, 可用同不可压缩桩一样的方法求解.

可用同上法处理, 桩底的位移  $W_c(a, L)$  是:

$$W_c(a, L) = \{B\}^T [A_1]^{-1} \{F_1\} + W_P(a, L) \quad (4.6)$$

$$\text{其中 } A_{1,ij} = \int_{(i-1)\Delta L}^{i\Delta L} A_1(e, z_i, c) dc, \quad F_{1,i} = F_1(z_i) \quad (4.7)$$

桩顶位移  $W_{ch}$  (包括初嵌入沉陷) 是:

$$W_{ch} = W_c(a, L) - \Delta L_p \tag{4.8}$$

式中 
$$\Delta L_p = -[PL/\pi a^2 + (2\text{tg}\varphi/a) \int_0^L \int_0^z \sigma_{r_0} dz dz - 2\mu_c \int_0^L \sigma_{r_0} dz]/E_c \tag{4.9}$$

桩顶的净沉陷 (除去初嵌入沉陷) 为:

$$W_{nch} = W_{ch} - W_{cho}$$

式中初沉陷  $W_{cho} = \int_0^L B(a, L, c) X_1(c) dc$ ,  $X_1(c)$  表示  $P = 0$  时, 积分方程(4.3) 的解.

### 五、Fredholm 第一种积分方程近似解的 误差估计的一个定理

本节我们研究一个给定的近似解  $X^0(c)$  的误差估计问题, 假定  $AX^0$  存在于定义域. 现在, 我们要求求出  $e$ , 使得  $\|X^* - X^0\| \leq e$ .

#### 定理

假设

1. 积分方程  $AX = F$  有唯一解  $X^*$ .

2. 存在一正整数  $m < \infty$ , 使得

$$K = \max K_i \geq K_j \quad (i = 1, 2, \dots, m. \quad j = m+1, m+2, \dots) \tag{5.1}$$

式中 
$$K_i = \|F - AX_{i+1}\| / \|F - AX_i\| < 1 \quad i = 0, 1, 2, \dots \tag{5.2}$$

$$X_{i+1} = X_i + G_1 A^*(F - AX_i) \tag{5.3}$$

$$0 < G_1 = \text{const} < 2 / \sum_{j=1}^{\infty} (1/\lambda_j^2) \tag{5.4}$$

则 
$$\|X^* - X^0\| \leq G_1 \|A^*\| \cdot \|F - F^0\| / (1 - K) \tag{5.5}$$

#### 证明

依假设,  $AX = F$  有唯一解  $X^*$ . 此解  $X^*$  可由序列  $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$  [其中  $X_n$  由 (5.3) 式从任一  $X_0 \in H$  迭代算出] 逼近<sup>[11, 12]</sup>.

首先, 我们证明  $K_i < 1$ , ( $i = 1, 2, \dots$ )

令  $S_n = X^* - X_n$ , 由 (5.3) 式得

$$AS_n = AS_{n-1} - G_1 AA^* AS_{n-1} \tag{5.6}$$

式中 
$$Q = 2G_1 \|A^* AS_{n-1}\|^2 - G_1^2 \|AA^* AS_{n-1}\|^2 \tag{5.7}$$

由 Hilbert 公式和 Schwarz 不等式, 我们得

$$\begin{aligned} \|AA^* AS_{n-1}\|^2 &= \langle A^* AA^* AS_{n-1}, A^* AS_{n-1} \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} | \langle A^* AS_{n-1}, \Psi_j \rangle |^2 / \lambda_j^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \|A^* AS_{n-1}\|^2 \cdot \|\Psi_j\|^2 / \lambda_j^2 \end{aligned}$$

$$\text{故} \quad Q \geq G_1 \|A^* A S_{n-1}\|^2 \left( 2 - G_1 \sum_{i=1}^{\infty} 1/\lambda_i^2 \right) \quad (5.8)$$

将 (5.4) 式代入 (5.8) 式, 得  $Q > 0$

因此  $\|A S_{n-1}\|^2 = \|A(X^* - X_{n-1})\|^2 = \|F - A X_{n-1}\|^2 > \|A S_n\|^2 = \|F - A X_n\|^2$

即  $K_i = \|F - A X_{i+1}\| / \|F - A X_i\| < 1 \quad (i=0, 1, 2, \dots)$

然后, 我们再来证完此定理,

$$\begin{aligned} X_{n+1} - X_n &= G_1 A^*(F - A X_n) \\ X_n - X_{n-1} &= G_1 A^*(F - A X_{n-1}), \dots \end{aligned}$$

$$X_{n+1} - X_0 = \sum_{i=0}^n G_1 A^*(F - A X_i)$$

$$\begin{aligned} \|X_{n+1} - X_0\| &\leq G_1 \|A^*\| \cdot [\|F - A X_0\| + K_0 \|F - A X_0\| + K_0 K_1 \|F - A X_0\| \\ &\quad + \dots + K_0 K_1 \dots K_n \|F - A X_0\|] \end{aligned}$$

从 (5.1) 式, 得

$$\begin{aligned} \|X_{n+1} - X_0\| &\leq G_1 \|A^*\| \cdot \|F - A X_0\| (1 + K + K^2 + \dots + K^n) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \|X_{n+1} - X_0\| &= \|X^* - X_0\| \leq G_1 \|A^*\| \cdot \|F - A X_0\| / (1 - K) \end{aligned}$$

令  $X_0 = X^0, A X_0 = A X^0 = F^0$ , 即得:

$$\|X^* - X^0\| \leq G_1 \|A^*\| \cdot \|F - F^0\| / (1 - K) \quad (\text{证完})$$

如所周知, 从近似解的有限信息来判断精确解和离散化求出的近似解之间的误差常常是很难的, 一定要附加某些假设. 本定理的假设 (5.1) 式就是利用有限步收缩比率的信息来估计无限步迭代计算收缩的情形. 这一假设随着  $m$  取充分大时, 定理的误差估计就愈可靠.

从近似解  $X^0$  所得的位移  $W$  的近似值, 其误差估计是:

$$\|W^* - W\| \leq G_1 \|B\| \cdot \|A^*\| \cdot \|F - F^0\| / (1 - K) \quad (5.9)$$

## 六、边界条件为 (0.2) 式示的桩的积分方程分析法 (第二法)

当我们遇到不可压缩桩的表面完全与介质粘结, 无相对滑动情形, 即边界条件为 (0.2) 式, 我们需要在  $z$  轴的  $[0, L]$  内, 除上述方法所加的虚载荷外, 加上集度为未知函数  $X_2(c)$  的 Mindlin 垂直集中力, 才能满足 (0.2) 式的两个给定的边界条件. 在这些虚载荷作用下, 半空间任一点  $N(r, z)$  的位移分量为:

$$U_1(r, z) = \int_0^L K_{11}(r, z, c) X_1(c) dc + \int_0^L K_{12}(r, z, c) X_2(c) dc + U_P(r, z) \quad (6.1)$$

$$U_2(r, z) = \int_0^L K_{21}(r, z, c) X_1(c) dc + \int_0^L K_{22}(r, z, c) X_2(c) dc + W_P(r, z) \quad (6.2)$$

式中核算子  $K_{11}, K_{21}$  分别与 (2.6), (2.7) 式同;  $U_P$  和  $W_P$  与 (2.8), (2.9) 式同;



$$\left. \begin{aligned} K_{12}(r, z, c) &= r[(z-c)/R_1^3 + (3-4\mu)(z-c)/R_2^3 - 4(1-\mu)(1-2\mu)/(R_2 \\ &\quad \cdot (R_2+z+c)) + 6cz(z+c)/R_2^5]/(16\pi G(1-\mu)) \\ K_{22}(r, z, c) &= [(3-4\mu)/R_1 + (8(1-\mu)^2 - (3-4\mu))/R_2 + (z-c)^2/R_1^3 \\ &\quad + ((3-4\mu)(z+c)^2 - 2cz)/R_2^3 + 6cz(z+c)^2/R_2^5]/(16\pi G(1-\mu)) \end{aligned} \right\} (6.3)$$

令满足边界条件 (0.2), 得

$$K_{11}X_1 + K_{12}X_2 + U_P(a, z) = a - e = U_1 \quad (6.4)$$

$$K_{21}X_1 + K_{22}X_2 + W_P(a, z) = W_R = U_2 \quad (6.5)$$

式中  $W_R$  为常数, 等于桩的沉陷值.

由平衡方程, 决定作用于桩顶的载荷  $Q$  与 Boussinesq 的虚力  $P$ , 以及  $X_1(c)$  和  $X_2(c)$  之间的关系, 即:

$$Q = P + \int_0^L X_2(c) dc = -2\pi \left[ a \int_0^L \tau_{rz}(a, z) dz + \int_0^a r \sigma_z(r, L) dr \right] \quad (6.6)$$

式中:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{rz}(a, z) &= \sigma_r(a, z) \tan \varphi \\ \sigma_r(a, z) &= \{(\lambda + 2G)\partial U_1/\partial r + \lambda(\partial U_2/\partial z + U_1/r)\}_{r=a} \\ \sigma_z(r, L) &= \{(\lambda + 2G)\partial U_2/\partial z + \lambda(\partial U_1/\partial r + U_1/r)\}_{z=L} \\ \frac{\partial U_1}{\partial r} \Big|_{r=a} &= \left\{ \int_0^L \frac{\partial K_{11}(r, z, c)}{\partial r} X_1(c) dc + \int_0^L \frac{\partial K_{12}(r, z, c)}{\partial r} X_2(c) dc \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial U_P(r, z)}{\partial r} \right\}_{r=a} \\ \frac{\partial U_2}{\partial z} \Big|_{r=a} &= \frac{\partial U_2(a, z)}{\partial z} = 0 \quad (\text{即 } r=a \text{ 的桩表面沉陷同}) \\ \frac{\partial U_1}{\partial r} \Big|_{z=L} &= \left\{ \int_0^L \frac{\partial K_{11}(r, L, c)}{\partial r} X_1(c) dc + \int_0^L \frac{\partial K_{12}(r, L, c)}{\partial r} X_2(c) dc \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial U_P(r, L)}{\partial r} \right\} \\ \frac{\partial U_2}{\partial z} \Big|_{z=L} &= \left\{ \int_0^L \frac{\partial K_{21}(r, z, c)}{\partial z} X_1(c) dc + \int_0^L \frac{\partial K_{22}(r, z, c)}{\partial z} X_2(c) dc \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial W_P(r, z)}{\partial z} \right\}_{z=L} \end{aligned} \right\} (6.7)$$

将 (6.7) 代入 (6.6). 再将  $P$  的项集中, 得出  $P$  与  $X_1, X_2$  的关系式, 再代入 (6.4), (6.5) 式, 便得到不含  $P$  的两个联立的积分方程:

$$\underline{K}_{11}X_1 + \underline{K}_{12}X_2 = \underline{F}_1 \quad (6.8)$$

$$\underline{K}_{21}X_1 + \underline{K}_{22}X_2 = \underline{F}_2 \quad (6.9)$$

这两个联立的 Fredholm 第一种积分方程的迭代解法可以参照 [8], 其数值解仍同上述, 即用离散的类型来代替, 即

$$\{X\} = [K]^{-1} \{F\} \quad (6.10)$$

式中:  $[K]$  为以  $K_{KLij}$  为元素的  $2 \times n \times n$  矩阵;

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix};$$

$\{X_i\}$  和  $\{F_i\}$  均为  $n$  维列矢量, 分别以  $X_{ij}$  和  $F_{ij}$  为元素;

$$K_{KLij} = \int_{(j-1)\Delta L}^{j\Delta L} \underline{K}_{KL}(e, z, c) dc, \quad (K, L=1, 2; \quad i, j=1, 2, \dots, n) \quad (6.11)$$

$$X_{ij} = X_i(c_j), \quad i=1, 2; \quad j=1, 2, \dots, n$$

$$\underline{F}_{ij} = \underline{F}_i(z_j), \quad i=1, 2; \quad j=1, 2, \dots, n \quad \Delta L = L/n$$

而积分方程 (6.8)、(6.9) 中的核和函数为:

$$\left. \begin{aligned} \underline{K}_{11}(r, z, c) &= K_{11} + T_1 \underline{u} / s \\ \underline{K}_{12}(r, z, c) &= K_{12} + T_2 \underline{u} / s \\ \underline{K}_{21}(r, z, c) &= K_{21} + T_1 \underline{w} / s \\ \underline{K}_{22}(r, z, c) &= K_{22} + T_2 \underline{w} / s \\ \underline{F}_1(z) &= a - e + \underline{u} T_3 / s \\ \underline{F}_2(z) &= W_r + \underline{w} T_3 / s \end{aligned} \right\} \quad (6.12)$$

式中:  $K_{11}$ ,  $K_{12}$ ,  $K_{21}$ ,  $K_{22}$  见 (6.4), (6.5) 式.

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= -2\pi \left\{ a \operatorname{tg} \varphi \cdot (\lambda + 2G) \int_0^L \frac{\partial K_{11}(r, z, c)}{\partial r} \Big|_{r=a} dz + (\lambda + 2G) \right. \\ &\quad \cdot \left. \int_0^L \frac{\partial K_{21}(r, z, c)}{\partial z} \Big|_{z=L} dr + \lambda \int_0^L \frac{\partial K_{11}(r, L, c)}{\partial r} dr + \lambda \int_0^L K_{11}(r, L, c) dr \right\} \\ T_2 &= -2\pi \left\{ a \operatorname{tg} \varphi \cdot (\lambda + 2G) \int_0^L \frac{\partial K_{12}(r, z, c)}{\partial r} \Big|_{r=a} dz + (\lambda + 2G) \right. \\ &\quad \cdot \left. \int_0^L \frac{\partial K_{22}(r, z, c)}{\partial z} \Big|_{z=L} dr + \lambda \int_0^L \frac{\partial K_{12}(r, L, c)}{\partial r} dr + \lambda \int_0^L K_{12}(r, L, c) dr \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\pi} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (6.13)$$

$$T_3 = 2\pi \operatorname{tg} \varphi \cdot \lambda L (a - e)$$

$$s = 1 + 2\pi a \operatorname{tg} \varphi \cdot (\lambda + 2G) \int_0^L \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=a} dz + 2\pi (\lambda + 2G) \int_0^L r \frac{\partial W}{\partial z} \Big|_{z=L} dr$$

$$+ 2\pi \lambda \left( \int_0^L r \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{z=L} dr + \int_0^L u(r, L) dr \right)$$

$$\underline{u} = \underline{u}(r, z) = U_p(r, z) / P \quad U_p \text{ 见 (2.8) 式}$$

$$\underline{w} = \underline{w}(r, z) = W_p(r, z) / P \quad W_p \text{ 见 (2.9) 式}$$

核 $K_{KL}$ 和函数 $F_i$ 均为已知(给定 $W_R, a, e$ ),就能求出(6.10)的解.一旦求得解 $X_1, X_2$ 后,由(6.6)式,可求出对应沉陷值 $W_R$ 时作用于桩顶的载荷 $Q$ ,以及桩底的反力 $P_B$ .

$$P_B = -2\pi \int_0^a r \sigma_z(r, L) dr \quad (6.14)$$

## 七、数值算例

用DJS-21计算机计算了单根不可压缩桩和可压缩桩的数值算例.对于边界条件为(0.1)式的问题,用第一种方法;对于边界条件为(0.2)式的问题,用第二种方法(只算不可压缩桩).桩都分成十等分,积分运算用梯形公式,亦有用Romberg公式进行近似计算.两种方法的部份计算结果用下图表示.

第一种方法的结果示于图1至图3.图1表示不同的初应力(即不同的 $e/a$ 值)对不可压缩桩顶净沉陷的影响.由图表明:不同的初应力仅对短桩( $L/D < 10$ )的净沉陷影响较大;净沉陷沿 $L/D$ 变化规律与Poulos<sup>[3]</sup>等人算的沉陷沿 $L/D$ 变化规律相似,但净沉陷的数值较Poulos的沉陷数值小.

所谓净沉陷 $W_{na}$ 就是沉陷值 $W_n$ 不计初沉陷 $W_0$ .初沉陷值为桩嵌入而载荷未加上时的沉陷,系由初应力导至的;若无初应力(即 $e=a$ ),则初沉陷 $W_0=0$ ,此时净沉陷就是通常的沉陷值.净沉陷的计算在工程上是感兴趣的.

图2表示不同的 $L/D$ 在 $e/a$ 定值时,弹性模量 $E_c$ 对初沉陷 $W_0$ 的影响.通常 $E_c$ 增加, $W_0$ 也增.但 $L/D$ 较大时其影响不大.图3表示若载荷 $P$ 不大,沉陷 $W_{na}$ 会是负值.

图4为用第二种方法计算桩一土之间无相对滑动时,不同的 $L/D$ 产生相同的沉陷值时所需的作用于桩顶的力 $Q$ .不同的初应力(即 $e/a$ )亦有类似曲线.

最后,我们还指出一些计算结果:用第一种方法计算可压缩桩,采用较精确的三维应力状态( $\mu_c=0.3$ )与一维应力状态( $\mu_c=0$ )所得的结果(沉陷或净沉陷)差别是很小的(当 $L/D=10\sim 100$ 时,约为 $0.5\sim 1.8\%$ );用第二种方法求得的桩底的反力 $P_B$ 与载荷 $Q$ 之比值很小(当 $L/D=10$ 时,不到 $1\%$ ;  $L/D$ 愈大时此值愈小;初应力愈大( $e/a$ 越少)时,此值愈小),可以认为中长桩( $L/D \geq 10$ )的载荷差不多全靠桩侧面的剪应力承担,初应力越大越是如此.限于篇幅不详述.

## 八、结 论

1) 对于边界条件为(0.1)式的不可压缩或可压缩桩受垂直载荷问题,本文的第一种方法用轴对称载荷沿 $z$ 轴分布并和Boussinesq的解迭加就能使问题归结为一个一维的非奇异的Fredholm型第一种积分方程;对于边界条件为(0.2)式的不可压缩桩受垂直载荷问题,本文的第二种方法用上述第一法的载荷再加上Mindlin的垂直力沿 $z$ 轴分布就能使问题归结为两个一维的,联立非奇异Fredholm第一种积分方程式.这些方法较虚载荷分布于边界面的诸法均为简便,因为后者所得到的是奇异的多维的第一种积分方程组.

2) Fredholm第一种积分方程近似解的误差估计定理是:

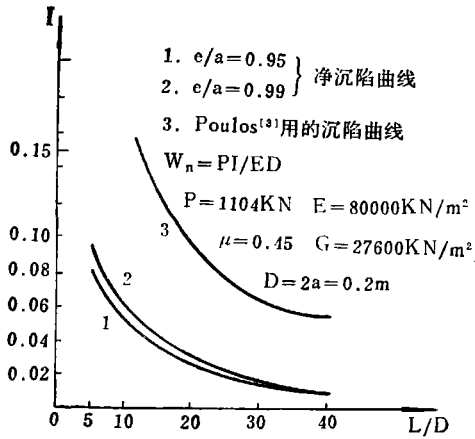


图1 不可压缩桩净沉降曲线

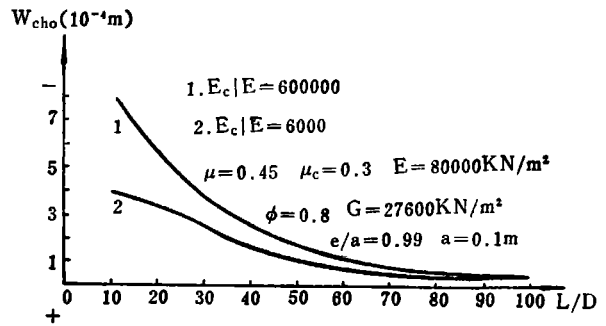


图2 可压缩桩初沉降曲线

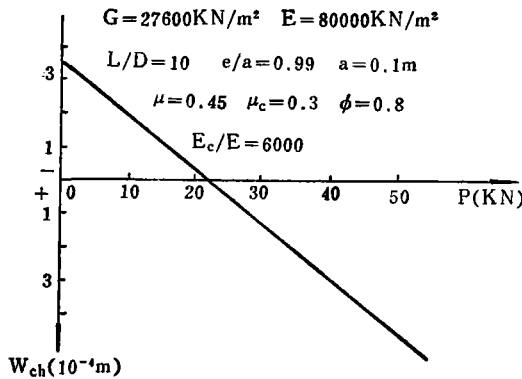


图3 沉降的负值情形

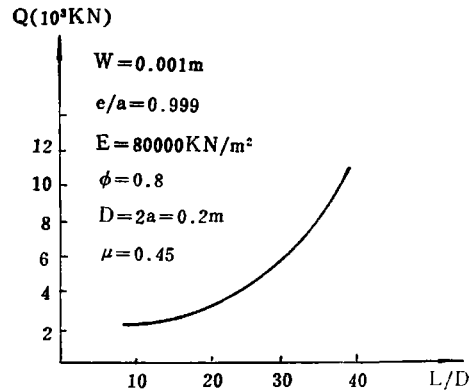


图4 桩一土无相对滑动时的沉降一载荷曲线

$$\|X^* - X^0\| \leq G_1 \|A^*\| \cdot \|F - F^0\| / (1 - K)$$

由近似解  $X^0$  所得的位移的误差估计是:

$$\|W^* - W\| \leq G_1 \|B\| \cdot \|A^*\| \cdot \|F - F^0\| / (1 - K)$$

3) 用本文方法分析桩, 较之由 Butterfield, R. 等人所发展的方法有如下优点:

- (1) 积分方程是一维、非奇异的, 计算简便.
- (2) 能考虑初应力的影响.

(3) 本文的第一法可以不必预先假定沉降函数; 对压缩桩考虑三维应力状态且其计算简单, 即仍归结为一个一维非奇异 Fredholm 第一种积分方程.

4) 此法可用于桩群或半空间的应力分析.

## 参 考 文 献

1. Banerjee, P. K., Integral equation method for analysis of piece-wise non-homogeneous three-dimensional elastic solids of arbitrary shape, *Int. J. Mech. Sci.*, 18, (1976), 293.
2. Butterfield, R. and Banerjee P. K., The elastic analysis of compressible piles and pile groups, *Geotechnique*, 21, (1971), 43.
3. Poulos, H. G., Load-settlement predictions for piles and piers, *Proc. ASCE SM*, 9, (1972), 879.
4. Mattes, N. S., The influence of radial displacement compatibility on pile settlements, *Geotechnique*, 19, (1969), 157.
5. Muki, R. and Sternberg, E., Elastostatic load-transfer to a half-space from a partially embedded axially loaded rod, *Int. J. Solid Structures*, 5, (1969), 587.
6. Luk, V. K. and Keer, L. M., Stress analysis for an elastic half-space containing an axially-loaded rigid cylinder rod, *Int. J. Solid Structures*, 15, (1979), 805.
7. Yun Tian-quan (云天铨), An integral equation method for solving the torsion problem of bodies of revolution, *J. H. I. T.*, 1, 1 (1979), 82.
8. 云天铨, 轴对称问题的积分方程的迭代法, *应用数学与力学*, 1, 1, (1980), 115.
9. Mindlin, R. B., Force at a point in the interior of a semi-infinite solid, *J. Physics*, 77, (1936), 195.
10. Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N., *Theory of elasticity*, McGraw-Hill, (1970).
11. 云天铨, Fredholm第一种积分方程  $Ax=y$  的最速迭代解法, *华中工学院学报*, 3, (1978), 94.
12. Diaz, J. B. and Metcalf, F. T., On iteration procedures for equations of the first kind,  $Ax=y$ , and Picard's criterion for the existence of a solution, *Math. Comp.*, 24, (1970), 923.

## Pile Analysis by Simple Integral Equation Methods

Yun Tian-quan

(Department of Mechanics, Huazhong Institute of Technology, Wuhan)

### Abstract

Two simple integral equation methods are proposed for the analysis of vertical loaded pile. One of them is: let the axisymmetrical loads formed by Mindlin's horizontal point forces be distributed along the axis  $z$  in  $[0, L]$  of the elastic half-space, and composed with the Boussinesq's point force. The other is: in addition to the above fictitious loads, the Mindlin's vertical forces are distributed along the axis  $z$  in  $[0, L]$ . The former reduces the problem of a vertical loaded pile embedded in a half-space with the following boundary conditions:

$$\left. \begin{array}{l} 1. \quad z=0, \quad r \neq 0, \quad \sigma_z = \tau_{rz} = 0 \\ 2. \quad 0 \leq z \leq L, \quad U(e, z) = a - e, \quad (e \rightarrow a) \\ 3. \quad P = -2\pi \left[ a \int_0^L \tau_{rz}(a, z) dz + \int_0^a r \sigma_z(r, L) dr \right] \end{array} \right\} \quad (0,1)$$

to a Fredholm integral equation of the first kind: the latter reduces the same problem but with boundary conditions only deferred from the second term of (0,1), i. e.,

$$0 \leq z \leq L, \quad U(e, z) = a - e, \quad (e \rightarrow a); \quad W(a, z) = \text{const.} \quad (0,2)$$

to two coupled Fredholm integral equations of the first kind. For a loaded rigid pile, the former suits for the cases which permit slides between the pile and the medium, but the latter suits the cases of no slides between the pile and the medium.

Comparing with the current methods of fictitious loads distributed on the actual boundary, the above two methods have following advantages:

1. The integral equation (or equations) obtained is one-dimensional and nonsingular.
2. The effect of initial stress may be taken into account.

For the first method, there are additional advantages: the settlement function need not prescribed and three-dimensional stress state in compressible piles may be taken into account.

A theorem of error estimation for an approximate solution of Fredholm integral equation of the first kind is present, and numerical examples of two analytic methods for single loaded piles have been calculated by DJS-21 computer.