

多项式的增广图示及其在工程 控制论中的应用

汪家诤

(浙江大学力学系, 1980年3月1日收到)

摘 要

本文图示复变数 $s(=x+iy)$ 的实系数多项式

$$K=f(s)\equiv a_0s^n+a_1s^{n-1}+\dots+a_{n-1}s+a_n$$

K 是实参数, 因此上式的图示表为 (x, iy, K) 中的一集空间曲线. 这曲线在三个坐标平面上的投影就是本文图示的内容. 在 (x, iy) 上的投影就是根轨迹. 不论 $n=2m+1$ 或 $n=2m+2$, 根轨迹方程都是 y^2 的 m 次方程. (K, x) 图线除了包含实曲线 $K_r=f(x)$ 以外, 尚包含复根的实数部随 K 变化的曲线, 这是新增的曲线. (K, x) 曲线对判别系统的绝对和相对稳定性是很有用的. (K, iy) 曲线对控制系统来说, 表示放大 K 和自然频率 $\omega(=y)$ 的关系曲线. 这三幅图线可应用于方程式论和工程控制论.

一、多项式增广图示的理论

在目前数学书中的实变数 x 的多项式

$$K_r=f(x)\equiv a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n \quad (1.1)$$

的图示, 不能对于每一根直线 $K_r=C$ (常数)都有 n 个交点. 这是由于复数根不能在实平面中显示的缘故. 不能显示“ n 次方程恒有 n 个根”的特性, 是现有图示法的缺点. 为了也显示复数根, 本文把 x 改为复数 $s(=x+iy)$ 而研究对应于(1.1)的

$$K=f(s)\equiv a_0s^n+a_1s^{n-1}+\dots+a_{n-1}s+a_n \quad (1.2)$$

的图示. 对于每一实数 K , 上式恒有 n 个根, 因此(1.2)在 (x, iy, K) 空间中由 n 支空间曲线所表示. 将 $s=x+iy$ 代入(1.2)得

$$K=\psi(x, y^2)+iy\phi(x, y^2) \quad (1.3)$$

式中

$$\psi(x, y^2)\equiv f(x)-\frac{y^2}{2!}f^{(2)}(x)+\frac{y^4}{4!}f^{(4)}(x)-\dots \quad (1.4)$$

$$\phi(x, y^2)\equiv f^{(1)}(x)-\frac{y^2}{3!}f^{(3)}(x)+\frac{y^4}{5!}f^{(5)}(x)\dots \quad (1.5)$$

其中 $f^{(t)}(x)$ 表示 $f(x)$ 的 t 阶导数.

(1.3)可分解为

$$y\phi(x, y^2) = 0 \quad (1.6, a)$$

$$K = \psi(x, y^2) \quad (1.6, b)$$

(1.6)就是(1.2)在 (x, iy, K) 的空间曲线方程. 这曲线由两个曲面的交线给出, 其中(1.6, a)是个柱面. 由于柱面与 (x, iy) 平面的交线也由(1.6a)表示, 所以(1.6a)就是(1.2)的根轨迹方程^[1]. 由此可见, 限于是实数值的任何复变函数, 令它的虚数部为零, 就可得到它的根轨迹方程.

(1.6, a)可以分解为

$$y = 0, \text{ 及 } \phi(x, y^2) = 0 \quad (1.7)$$

前者是实根的痕迹, 后者是复根的痕迹. ϕ 中出现的是 y^2 , 所以根轨迹对称于 x 轴. 为简省起见. 画根轨迹可以只画 $y > 0$ 的半平面.

因 $\frac{1}{t!}f^{(t)}(x)$ 是 x 的 $n-t$ 次多项式, 用 $\alpha^{(n-t)}(x)$ 表示, 并简写为 $\alpha^{(n-t)}$, 则(1.6)可写为

$$\alpha^{(n-1)} - y^2\alpha^{(n-3)} + y^{(4)}\alpha^{(n-5)} - \dots \begin{cases} (-1)^m(y^2)^m\alpha^{(0)} = 0 & \text{当 } n=2m+1 \\ (-1)^m(y^2)^m\alpha^{(1)} = 0 & \text{当 } n=2m+2 \end{cases} \quad (1.8)$$

$$K = \alpha^{(n)} - y^2\alpha^{(n-2)} + y^{(4)}\alpha^{(n-4)} - \dots \begin{cases} (-1)^m(y^2)^m\alpha^{(1)} & \text{当 } n=2m+1 \\ (-1)^{m+1}(y^2)^{m+1}\alpha^{(0)} & \text{当 } n=2m+2 \end{cases} \quad (1.9)$$

(1.8), (1.9)是多项式增广图示的基本算式.

从(1.8)看出, 不论(1.2)的次数 n 为 $2m+1$ 或 $2m+2$, 它的根轨迹方程都是 y^2 的 m 次方程, 各项系数 $\alpha^{(t)}$ 是 x 的多项式. 因 $m \leq 4$ 的代数方程可用公式求解, 所以 $n \leq 10$ 的多项式根轨迹都可用公式计算. 因 y 是实数, 只有 y^2 的正根才适用. 将对设定 x_i 和它对应的 r 个正根解 y_i^2 ($t=1, 2, \dots, r, r \leq m$)一起代入(1.9)可算出 r 个 K_i . 变动 x 就可得到作三幅图的数据资料.

要写出各 $\alpha^{(t)}$, 可自

$$\alpha^{(n)} = f(x), \alpha^{(n-1)} = f^{(1)}(x), \alpha^{(n-2)} = \frac{1}{2}f^{(2)}(x)$$

开始, 应用关系式

$$\alpha^{(i-1)} = \frac{1}{n-(i-1)} \frac{d\alpha^{(i)}}{dx} \quad (1.10)$$

一直写到

$$\alpha^{(1)} = na_0x + a_1, \alpha^{(0)} = a_0$$

对于(1.7)中 $y=0$, (1.6)简化为(1.1). 这是以往图示内容. 在 (K, x) 图中用实线表示. 自(1.9)算得的曲线用虚线表示, 称为复根曲线 K_c .

对于 $n=2m+2$, $\alpha^{(1)}$ 又是 $\alpha^{(2)}$, $\alpha^{(3)}$, $\dots, \alpha^{(n-1)}$ 的因式时, 从(1.8)的第二式看出 $\alpha^{(1)} = na_0x + a_1 = 0$ 是根轨迹的一部分. 此时(1.9)的第二式成为

$$K = \sum_{i=0}^{m+1} (-1)^i (y^2)^i \alpha^{(n-2i)} \left(-\frac{a_1}{na_0} \right) \quad (1.11)$$

这是在 $x = -a_1/na_0$ 平面上的 (K, iy) 曲线方程, 在图中画成点线, 并用 K_c^* 表示.

(K, x) 图线除了 $a^{(1)} = 0$ 是根轨迹的情况以外, 都能显示“ n 次方程恒有 n 个根”的特性. 因任作 $K = C$ 直线与实曲线 K_r 的交点数为 n_r , 与 K_c 的交点数为 n_c , 则有

$$n_r + 2n_c = n \quad (1.12)$$

式中系数 2 由于 $x_i + iy_i$, $x_i - iy_i$ 在 (K, x) 上合成一点. t 重根的一点作 t 点计算.

二、特征方程的常数项 a_n 作为 K 的图示

为了本文图示应用于方程式论, 我们研究

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0 \quad (2.1)$$

中的 a_n 作为 K 的图示, 即研究

$$K = -(a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s) \quad (2.2)$$

的图示. 上式实曲线 K 通过原点. 又为了应用于研究控制系统的稳定性, 规定各 $a_i > 0$. 因若有一个系数 $a_i \leq 0$, 系统便不稳. 于是当 x 自 0 增至 $+\infty$ 时, K_r 自 0 减至 $-\infty$. 所以系统的稳定区在 $K > 0$ 这边.

例. 三次方程以 a_3 为 K 的图示

$$K = -(a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s)$$

应用(1.8)和(1.9)的第一式得

$$3a_0 x^2 + 2a_1 x + a_2 - a_0 y^2 = 0 \quad (2.3)$$

$$K = -(a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x) + y^2(3a_0 x + a_1) \quad (2.4)$$

(2.3)可改写为

$$\left[\sqrt{3} \left(x + \frac{a_1}{3a_0} \right) \right]^2 - y^2 = \frac{a_2^2 - 3a_0 a_2}{3a_0^2} \quad (2.5)$$

当 $a_2^2 - 3a_0 a_2 \neq 0$, 根轨迹是双曲线, 它的渐近线为

$$\sqrt{3} \left(x + \frac{a_1}{3a_0} \right) + y = 0 \quad \text{及} \quad \sqrt{3} \left(x + \frac{a_1}{3a_0} \right) - y = 0$$

当 $a_2^2 - 3a_0 a_2 = 0$, 根轨迹退化成上列两直线. 参看图表一. 应用对称性, (x, iy) 和 (K, iy) 只画 $y > 0$ 的半平面. 因 $+y$ 和 $-y$ 只合成一个频率, 所以 (K, iy) 半平面图可显示对于 K 的频率个数.

最有应用价值的是 (K, x) . K_c 与 K 轴的交点 A 的坐标由 (2.3), (2.4) 令 $x = 0$ 得 $K_A = a_1 a_2 / a_0$. 所以 K 的稳定区为 $(0, a_1 a_2 / a_0)$. K_c 与 K_r 的交点 M 称为相对稳定极限点. $x < x_M$ 就不存在“相对稳定区”. 要求 x_M , 可令 $K_c = K_r$, 自 (2.4) 得

$$y^2(3a_0 x + a_1) = 0$$

当 $y \neq 0$, 则 $x_M = -\frac{a_1}{3a_0}$, 即 M 在中心线上;

当 $3a_0 x + a_1 = 0$, 则 $y = 0$, 再由(2.3)得

$$x_M = \left[-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 3a_0 a_2} \right] / 3a_0, \quad M \text{ 为 } K_r \text{ 的极大点.}$$

图表一中的影线区称为稳定域 (stable region), 用 SR 表示. M 点是 SR 中 $-x$ 方向的最深点. 根轨迹线上的箭头表示 K 自 $-\infty$ 增大至 0, 再增至 $+\infty$.

三、多项式的渐近曲线——二项式图线

当 $|s| \rightarrow \infty$ 时, 多项式(1.2)趋近于二项式

$$K = a_0 \left(s + \frac{a_1}{na_0} \right)^n \quad (3.1)$$

所以(1.2)的 (x, iy) , (K, x) , (K, iy) 分别以(3.1)的三幅图线为渐近线. 因此掌握二项式的图线对于作多项式的图线有指导作用. 当 $|s|$ 充分大时, 两者图线已很靠近, 可以用前者代替后者. 但离原点不远处两者图线不同.

当 $K/a_0 > 0$ 时, 将 K/a_0 改写为 $K/a_0 (\cos 2\pi h + i \sin 2\pi h)$, 然后用 DeMoivre 公式将(3.1)两边开 n 次方, 得

$$x + \frac{a_1}{na_0} = \sqrt[n]{\frac{K}{a_0}} \cos \frac{2\pi h}{n}, \quad y = \sqrt[n]{\frac{K}{a_0}} \sin \frac{2\pi h}{n} \quad (3.2)$$

当 $K/a_0 < 0$ 时, $K/a_0 = |K/a_0| [\cos(2\pi h + \pi) + i \sin(2\pi h + \pi)]$

$$x + \frac{a_1}{na_0} = \sqrt[n]{\left| \frac{K}{a_0} \right|} \cos \frac{2\pi h + \pi}{n}, \quad y = \sqrt[n]{\frac{K}{a_0}} \sin \frac{2\pi h + \pi}{n} \quad (3.3)$$

其中 $h = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

将上两式的后一式除以前一式得

$$y = \left(x + \frac{a_1}{na_0} \right) \tan \frac{\varphi}{n} \quad \begin{cases} \varphi = 2h\pi & \text{当 } K/a_0 > 0 \\ \varphi = (2h+1)\pi & \text{当 } K/a_0 < 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

上式就是(3.1)的根轨迹, 也就是多项式(1.2)的根轨迹的渐近线. (3.4)共有 n 根直线, 它们汇交于 $C(-a_1/na_0, 0)$, 称为中心点. 这 n 根直线 n 等分 x 轴为边的平角. 作多项式根轨迹时, 应先作这 n 根渐近线. $n=5$ 及 6 时二项式图线如图表二. 值得注意, (K, x) 图中 K_c 的斜率越靠近中心线的 K_c 它的斜率越陡.

四、 $n=5$ 及 6 的特征方程以 $a_n \equiv K$ 的图示

$n=5$ 或 6 时, $m=2$. 求解根轨迹方程只要解 y^2 的二次方程. 因此作图数据甚易算得.

例1.^{(2)(a)} $K = -(8s^5 + 6s^4 + 2s^3 + s^2 + 3s)$

(1.8)和(1.9)分别成为

$$40x^4 + 24x^3 + 6x^2 + 2x + 3 - y^2(80x^2 + 24x + 2) + 8y^4 = 0 \quad (4.1)$$

$$K_c = K, + y^2[80x^3 + 36x^2 + 6x + 1 - (40x + 6)y^2]$$

自(4.1)解出 y^2 得

$$y^2 = 5x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{8} \pm \sqrt{20x^4 + 12x^3 + \frac{11}{4}x^2 + \frac{1}{8}x - \frac{23}{64}}$$

由此作出三幅图如图表三(I). 从 (K, x) 图看出, 在 $x > 0$ 半平面中, 有 K_c 自 $-\infty$ 至 $+\infty$ 整支曲线, 因此它所表示的控制系统不稳.

例2.^{(2)(b)} $K = -(s^6 + 6s^5 + 21s^4 + 44s^3 + 62s^2 + 52s)$

先行变数变换 $s+1=Z$ (即 $x+1=X$) 得

$$K = -(Z^6 + 6Z^4 + 11Z^2 - 18)$$

于是

$$K_c = -(X^2 - 1)(X^4 + 7X^2 + 18)$$

$$y^2 = [5X^2 + 6 \pm \sqrt{16X^4 + 24X^2 + 3}]/3$$

$$K_c = K_c + y^2[15X^4 + 36X^2 + 11 - 3(5X^2 + 2)y^2 + y^4] \quad (4.2)$$

显然, (K, X) , (X, iy) 图线都以 $X=0$ 为对称轴. 从图表三(I), (K, x) 看出 K 的稳定区是 $(0, 48.48)$. 又 K 在 $(23.61, 24.38)$ 区间中与 $K=C$ 只有一个交点. 因此 (1.12) 在这区间失效, 即单独 (K, x) 图不能表示“ n 次方程恒有 n 个根”, 需要 (K, iy) 图加以补充才行. 令 $X=0$, (4.2) 成为

$$K_c = 18 + 11y^2 - 6y^4 + y^6 \quad (4.3)$$

上式表示在 $X=x+1=0$ 平面中的曲线方程. C 在 $(23.61, 24.38)$ 中时, $K=C$ 与 (4.3) 曲线交于六点, 各点 y 可不相同, 而 $x=-1$. 即相应的控制系统出现三种振荡频率 ω 而只有一种衰减系数 $\sigma=-1$. 由图 $x < -1$ 不存在“相对稳定”, 因此区间 $(23.61, 24.38)$ 是相对稳定极限区. 在这区间衰减系数不随放大 (K) 而变, 而且这区间是 SR 域中的最深底线. 系统在此衰减非常迅速. 这种重要特性只有偶次方程才有可能实现, 在(八)中将进一步作普遍性研究.

五、标准多项式及其应用

为了减少多项式的系数符号, 我们先将(1.2)除以 a_0 , 然后令 $s = Z - \frac{a_1}{na_0}$ 以化去其第二项, 最后将常数项并入 K . 于是得到减少三个系数符号的多项式

$$K = Z^n + b_2 Z^{n-2} + b_3 Z^{n-3} + \dots + b_{n-1} Z \quad (5.1)$$

上式称为标准多项式, 现在用它研究下列问题.

(A) 五次多项式的根轨迹成左右对称条件

标准五次多项式的根轨迹方程为

$$y^4 - (10X^2 + b_2)y^2 + (5X^4 + 3b_2 X^2 + 2b_3 X + b_4) = 0$$

自上式看出当 $b_3=0$ 时, 根轨迹对 y 轴对称. 但(1.2)当 $n=5$ 时变换成标准式的系数关系为

$$b_3 = \frac{a_3}{a_0} - \frac{a_1}{5a_0} \left(3 \frac{a_2}{a_0} - \frac{4}{5} \frac{a_1^2}{a_0^2} \right)$$

所以一般五次多项式的根轨迹成左右对称(注一)的条件为

$$a_3 = \frac{a_1}{5a_0} \left(3a_2 - \frac{4}{5} \frac{a_1^2}{a_0} \right)$$

(B) 偶次多项式的根轨迹成左右对称的条件

凡(1.2)是偶次的, $\alpha^{(1)} = n a_0 x + a_1 = 0$ 就属于渐近线之一. 由于(1.2)的每一支根轨迹只趋近于一支渐近线, 因此当根轨迹成左右对称时, $x = -a_1/na_0$ 必须是根轨迹之一, 而且这直线就是对称轴. 将(1.2)化成(5.1), 则 $X=0$ 为根轨迹之一. 设此时 $\alpha(x)$ 化成 $\beta(X)$, 则 $\beta^{(3)}, \beta^{(5)}, \dots, \beta^{(n-1)}$ 都以 X 为因式. 但 $\beta^{(1)}(X)$ 的常数项为 b_1 , 因此 $b_3 = b_5 = \dots = b_{n-1} = 0$.

(注一) “左右对称”指曲线对 x 轴的某一垂线成对称.

于是(5.1)成为

$$K = Z^n + b_2 Z^{n-2} + b_4 Z^{n-4} + \dots + b_{n-2} Z^2 \quad (5.2)$$

所以偶次多项式的图线成左右对称时, 它化成的标准多项式只含包 Z 的偶次幂

六、多项式的图线特性

(A) 中心线的特性

在 (K, x) 图中, 多项式(1.2)对于 $K=C$ 的 n 个根 z_1, z_2, \dots, z_n 的平均值在中心线上. 即

$$\bar{z} = \sum z_i / n = -a_1 / na_0 = x$$

若 n 个根中, 有 σ 个实根 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\sigma$, 及 2τ 个共轭复根, $x_p \pm iy_p (p=1, 2, \dots, \tau)$, 那么

$$\sum_{q=1}^{\sigma} \lambda_q + 2 \sum_{p=1}^{\tau} x_p = -a_1 / a_0 \quad (6.1)$$

(6.1)对任何 K 都成立, 所以可以用来计算最后一支复根曲线 K_C .

标准多项式的各阶导数都缺第二项, 所以 $x = -a_1 / na_0$ 也是(1.2)的各阶导函数的中心线. 若已知 $n-2$ 个极值点的 x 坐标, 那么剩下一个也易算得.

(B) 根轨迹与 x 轴的交点定理

当 $f^{(1)}(x) \equiv a^{(n-1)} = 0$ 时, 由(1.8)可知必有一根 $y^2 = 0$. 所以根轨迹与 x 轴的交点的横坐标即实曲线的极值点的横坐标. 设 $f^{(1)}(x) = 0$ 有 $n-1$ 个相异实根 c_1, c_2, \dots, c_{n-1} (已按大小顺序排列). 设(1.2)中 $a_0 > 0$, 则 c_1, c_3, \dots 是 K 的极小值点, c_2, c_4, \dots 是极大值点. 在 (K, x) 图中自实曲线 K , 的极小值点出发, 各有一条 K_C 线趋于 $-\infty$; 自极大值点出发各有一条 K_C 趋于 $+\infty$. 在 (x, iy) 图中, 分别自 x 轴上的各 c_i 点有一条复根轨迹趋近于渐近线. 若 $c_1 = c_2$, 则有二条根轨迹相交于 x 轴上同一点, 在 (K, x) 图中有一整支 K_C 自 $-\infty$ 至 $+\infty$, 且通过拐点, 若 $f^{(1)}(x)$ 有一不能在实域内分解的二次式, 在 (K, x) 中就有一支 K_C 自 $-\infty$ 至 $+\infty$.

七、 (K, x) 和 (K, iy) 图线的配合应用

(A) 方程式论中的应用

有了 (K, x) , (K, iy) 图线, 就可以从图上求任何 a_n ($\equiv K$) 值的特征方程的 n 个根. 对例 2, 设 $K=20$, 则在 (K, x) 图得

$$x_1 = -0.65, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = -1.35$$

在 (K, iy) 图得 $y_1 = 1.73, \quad y_2 = 0.49$

y_2 是在点线上的, 是与 $x = -1$ 配合的, 故六根为

$$0.65 \pm 1.73i, \quad -1 \pm 0.49i, \quad -1.35 \pm 1.73i$$

又如 $K=10$, 在 (K, x) 图中得四个交点

$$\lambda_1 = -0.265, \quad \lambda_2 = -1.735, \quad x_1 = -0.5, \quad x_2 = -1.5$$

在 (K, iy) 中得一个交点 $y = 1.86$. 故六根为

$$-0.265, \quad -1.735, \quad -1.5 \pm 1.86i, \quad -0.5 \pm 1.86i$$

(B) 常系数线性微分方程中的应用

特征方程的根既然可从图中求得，它所对应的微分方程解案就可立刻写出。如上例 $K=20$ ，则解案可写为

$$B_1 e^{-0.65t} \sin(1.73t + \varphi_1) + B_2 e^{-t} \sin(0.49t + \varphi_2) + B_3 e^{-1.35t} \sin(1.73t + \varphi_3)$$

对于 $K=10$ ，解案为

$$A_1 e^{-0.285t} + A_2 e^{-1.735t} + B_1 e^{-0.5t} \sin(1.86t + \varphi_1) + B_2 e^{-1.5t} \sin(1.86t + \varphi_2)$$

式中 B, A, φ 是积分常数，由初始条件决定。

(C) 绝对和相对稳定区的确定。

从 (K, x) 图中 K_c 与各 K_c 在 K 轴上的交点就可直观地看出 K 的稳定性区间，参看图表一和三(II)就可明白。以后将发表求 $K(\equiv \alpha_n)$ 的稳定区的方法。

用 (K, x) 图线求 K 对于指定衰减系数 μ 的相对稳定区是很方便的，只要作 $x = -\mu$ 直线，它和 K_c, K_c 的交点就可看出相对稳定区。这方法比“将特征方程用变换 $X = x + \mu$ ，然后用 Routh-Hurwitz 法判别”要简便得多。例如对例 2， $\mu = 0.5$ 的相对稳定区由直线 $x = -0.5$ 的交点看出为 $(15.3, 28.3)$ 。又若 $\mu = 0.7$ ，由 $x = -0.7$ 得 $(21.2, 25.4)$ 。

八、衰减系数不随放大而变的重要情况

从例 2，我们发现线性控制系统的衰减系数 μ 可以不随放大 K 在其某区间变化而变化。而且在这 K 区中，稳度是很大的，成为相对稳定的极限区。现在来探求这种系统存在的必要条件。

要 μ 不随 K 而变，必须在 (x, iy) 和 (K, x) 图线中都有一条 $x + \mu = 0$ 的直线。从(1.8)看出， $n = 2m + 1$ 时， $(y^2)^m$ 的系数 $a_0 \neq 0$ ，(1.8)只有 m 个 y^2 的根。不具备 $x + \mu = 0$ 有无穷个 y^2 的条件，所以奇次多项式不可能有这特性。对于 $n = 2m + 2$ ， $(y^2)^m$ 的系数 $a^{(1)} = na_0 x + a_1$ ，当 $a^{(1)}$ 是 $\alpha^{(3)}, \alpha^{(5)} \dots \alpha^{(n-1)}$ 的因式时， $x = -a_1/na_0$ 是根轨迹之一。此时 $\mu = a_1/na_0$ 正合条件，再按(五)(B)得结论：

要衰减系数 μ 不随 K 而变，只有偶次多项式能化成只含 X 的偶次幂的标准多项式时才有可能。此时三幅图线都是左右对称型的。

这仅是必要条件。要 K 确实存在一个“ m 个不同频率 $\omega(\equiv y)$ 但只有一个 x ”的区间，尚需另加条件。现在对 $n = 2, 4, 6$ 加以说明。

$$(A) \quad n = 2. \quad K = a_0 s^2 + a_1 s + a_2$$

(1.8) 成为 $2a_0 x + a_1 = 0$ 。故 $x = -a_1/2a_0$ 是根轨迹。由图表四(I)可知， $n = 2$ 恒有相对稳区 $(-\infty, a_2 - a_1^2/4a_0)$

为简便起见，以下只讨论标准多项式。应用时应该用变换 $X = x + a_1/na_0$ 化成所需之式。

$$(B) \quad n = 4 \quad K = -(Z^4 + bZ^2)$$

条件 $b > 0$ 。如图表四(II)。相对稳区 $(0, b^2/4)$

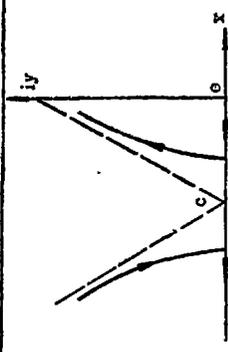
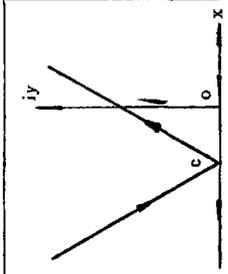
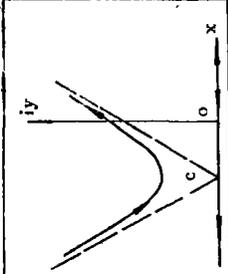
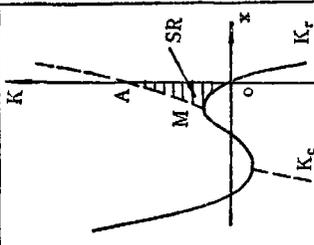
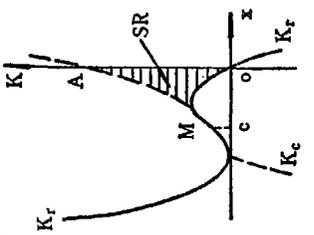
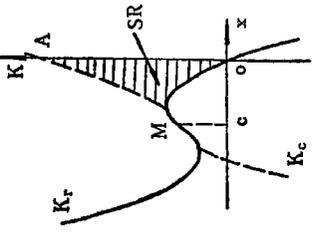
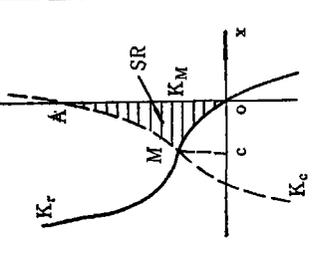
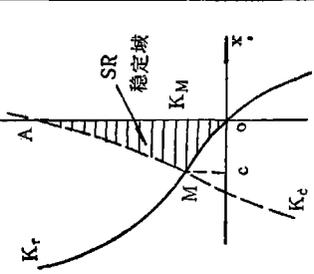
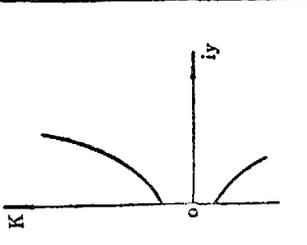
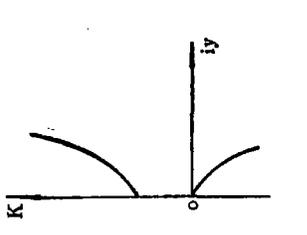
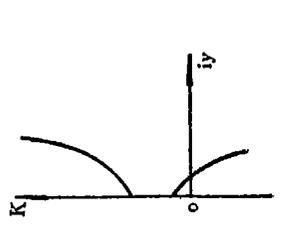
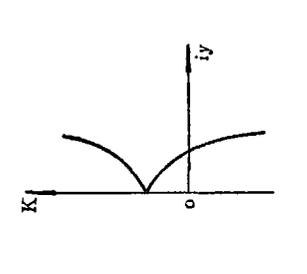
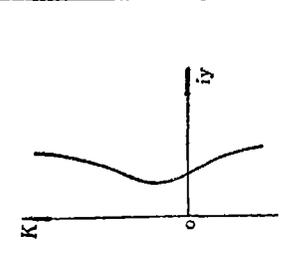
$$(C) \quad n = 6 \quad K = -(Z^6 + b_2 Z^4 + b_4 Z^2)$$

条件： $b_2^2 > 3b_4$ 。相对稳定极限区为 (K_1, K_2) ，其中

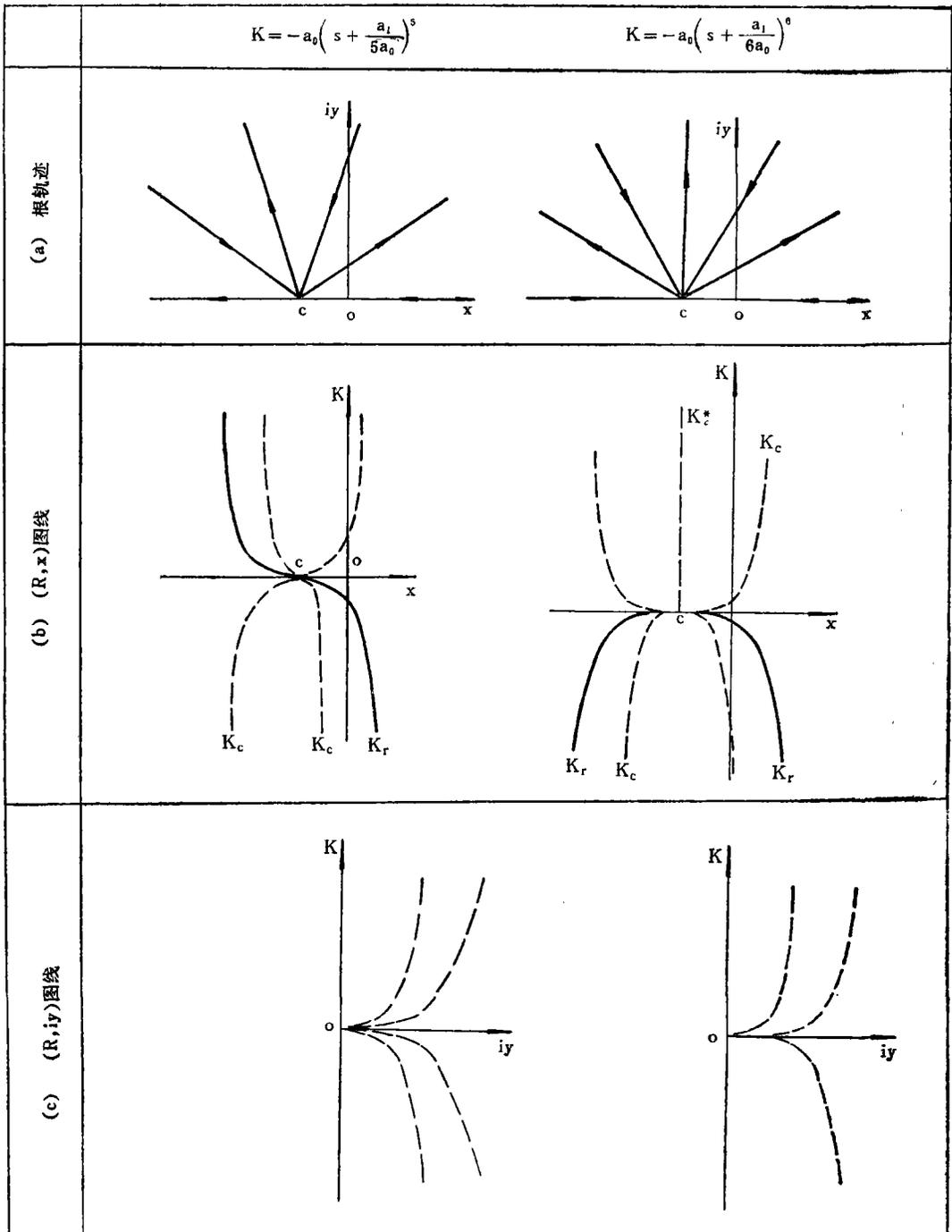
$$K_1 = \frac{2}{27} \left[b_2 \left(\frac{9}{2} b_4 - b_2^2 \right) - (b_2^2 - 3b_4)^{3/2} \right]$$

图表一

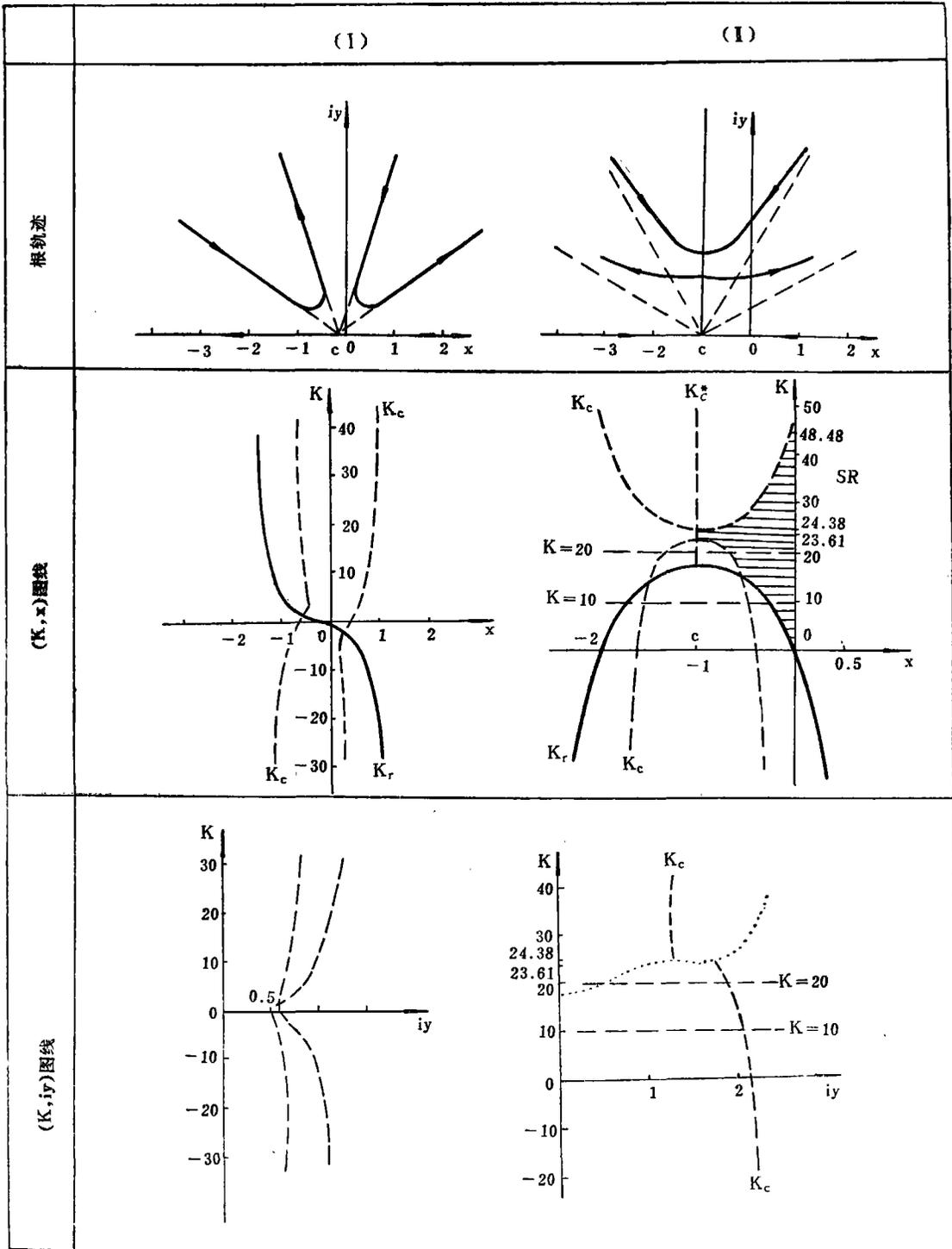
$K = -(a_0s^3 + a_1s^2 + a_2s)$

	<p>(II) $a_1^2 - 3a_0a_2 > 0$</p> 	<p>(I) $a_1^2 - 3a_0a_2 = 0$</p> 	<p>(I) $a_1^2 - 3a_0a_2 < 0$</p> 		
<p>(a) 根轨迹</p>					
<p>(b) (K, x) 图线</p>	<p>(iii) $a_1^2 > 4a_0a_2$</p> 	<p>(ii) $a_1^2 = 4a_0a_2$</p> 	<p>(i) $a_1^2 < 4a_0a_2$</p> 		
<p>(c) (K, iy) 图线</p>					

图表二



图表三



图表四

<p>根轨迹</p>		
<p>(K, x)图</p>		
<p>(K, iy)图</p>		
	<p>(I) $K = a_0 s^2 + a_1 s + a_2$</p>	<p>(I) $K = -(Z^4 + bZ^2)$</p>

$$K_2 = \frac{2}{27} \left[b_2 \left(\frac{9}{2} b_4 - b_2^2 \right) + (b_2^2 - 3b_4)^{3/2} \right]$$

现在声明, 对任何大偶数 $n=2m+2$ 都存在适合这样要求的多项式. 我们只要造出一个 n 次标准多项式(5.2), 使它在 $X=0$ 上存在一个区间, 当这(5.2)经 $X=x+\mu$ 变换后, 成为只有一个衰减系数 μ 而有 m 个不同频率的系统.

(5.2)的(1.9)当 $X=0$ 时成为

$$K_C(0) = -y^2 [b_{n-2} - y^2 b_{n-4} + \dots + (-1)^m (y^2)^m] \quad (8.1)$$

任取 m 个相异正数 $p_i (i=1, 2, \dots, m)$, 作

$$K_C(0) = -y^2 \prod_{i=1}^m (p_i - y^2)$$

应用根和系数的关系式

$$\sum_{i=1}^m p_i = b_2, \dots, \prod_{i=1}^m p_i = b_{n-2}$$

以此各 b_i 能够使(5.2)合乎要求. 现说明如下.

将各 p_i 按大小排列, 则由 Roule 定理, 在 $p_{i-1} < p$ 之间 $\frac{dK_C(0)}{dy}$ 一定有一根 q_i . 显然 $K_C(q_i) \neq 0$, 于是

$$0 < q_1 < p_1 < q_2 < p_2 < \dots < q_m < p_m$$

因 $\frac{dK_C(0)}{dy} = -2b_{n-2}y + 4b_{n-4}y^3 - \dots + (-1)^{m+1} (2m+2)(y^2)^m$

所以 $y=0$ 是 $\frac{dK_C(0)}{dy} = 0$ 之根. 又

$$\left. \frac{d^2K_C(0)}{dy^2} \right|_{y=0} = -2b_{n-2} < 0$$

所以 $y=0$ 时, $K_C(0)$ 是极大值. 于是可知 q_1, q_3, \dots 时 $K_C(0)$ 是极小值; q_2, q_4, \dots 时 $K_C(0)$ 是极大值. 设 M 是 $K_C(0)$ 各极小值的最大者, l 是各极大值的最小者. 则 (M, l) 就是 $x = -a_1/na_0$ 上的相对稳定极限区间.

施行坐标轴的平移: $X = x + \mu$, $K' = K + C$ 可以将这区间放置于 (K, x) 平面中任何所需要的地方.

参 考 文 献

1. Evans W. R., Graphical analysis of control systems, *Trans AIEE*, 67 (1948), 547-551.
2. Анзерман, М. А. Теория автоматического регулирования двигателей (уравнения движения и устойчивость) Государственное издательство технико-теоретической литературы, МОСКВА (1952) (a)277 (b)273.

Extended Graphical Representation of Polynomials with Applications to Cybernetics

Wong Chia-ho

(Zhejiang University, Hangzhou)

Abstract

In this paper, the polynomial of a complex variable $s(\equiv x+iy)$ with real coefficients

$$K = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n$$

is graphically represented by three plane curves which are the projections of a space curve on three coordinate planes of the coordinate system (x, iy, K) in which K is confined to be real. The projection on (x, iy) plane is just the root locus of polynomial with K as a real parameter. It is remarkable that the equation of the root locus is m th degree of y^2 , whether $n=2m+1$ or $n=2m+2$. In addition to the real curve $K_r=f(x)$ in the figure (K, x) , there exists another curve K_c which is plotted by the real parts of all complex roots against those of K . The (K, x) curve is particularly important to determine the absolute as well as the relative stability interval of K for linear systems. For cybernetics, the (K, iy) curve can be used to show the relation between the natural frequency ω and the gain K . Such three figures are useful for studying the theory of equation and cybernetics.