应用数学和力学，第2卷第4期（1981年8月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

关于连续介质有限变形问题的几点讨论*

程 沅 生

（上海工业大学机械工程系，1980年4月17日收到）

摘 要

本文讨论了三个问题：

1.讨论了有限变形特征张量 θ^{ij} 的物理意义，作为B. Д. Бондарь 一文[2]的补充

2.对 W. Segawa 一文[4]列出的四个有限变形特征张量进行了分析和补充讨论

3.一般的有限变形通过简单加载过程实现的可能性并不总是存在的，这就要看所给出的有限变形是否满足相容性方程．本文指出，Л. И. Седов[9]所举之例在$k=1$时也不满足相容性方程，Седов所给出的变形不管 k 等于什么值都不能通过简单加载来实现的．

一、θ^{ij}的物理意义

研究连续介质有限变形一般理论，采用 Lagrange 观点往往是很有效也是很有趣的．Lagrange坐标系$o\xi^1\xi^2\xi^3$是被嵌在介质内部跟随介质一起位移的．设在介质没有变形的初始状态时，Lagrange 坐标系的基本度量张量为$\mathring{\mathbf{G}}=\mathring{g}_{ij}\mathring{\boldsymbol{\partial}}^i\mathring{\boldsymbol{\partial}}^j=\mathring{g}^{ij}\mathring{\boldsymbol{\partial}}_i\mathring{\boldsymbol{\partial}}_j$，基底向量为$\mathring{\boldsymbol{\partial}}_i$、$\mathring{\boldsymbol{\partial}}^i$．随着介质的变形，Lagrange 坐标系的基本度量张量变为$\hat{\mathbf{G}}=\mathring{g}_{ij}\hat{\boldsymbol{\partial}}^i\hat{\boldsymbol{\partial}}^j=\hat{g}^{ij}\hat{\boldsymbol{\partial}}_i\hat{\boldsymbol{\partial}}_j$，基底向量为$\hat{\boldsymbol{\partial}}_i$、$\hat{\boldsymbol{\partial}}^i$．

度量有限变形的特征张量是很多的，在不同的情况下用不同的特征张量来度量[1]~[6]．其中两个基本特征张量为

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(\hat{g}_{ij}-\mathring{g}_{ij}) \tag{1.1}$$

$$\theta^{ij}=\frac{1}{2}(\mathring{g}^{ij}-\hat{g}^{ij}) \tag{1.2}$$

本节讨论 θ^{ij} 的物理意义，作为 B. Д. Бондарь 一文[2]的补充．

从(1.2)式得到

$$2\theta^{ij}=|\mathring{\boldsymbol{\partial}}^i||\mathring{\boldsymbol{\partial}}^j|\cos\mathring{\varphi}_{ij}-|\hat{\boldsymbol{\partial}}^i||\hat{\boldsymbol{\partial}}^j|\cos\varphi_{ij} \tag{1.3}$$

其中$\mathring{\varphi}_{ij}$为$\mathring{\boldsymbol{\partial}}^i$、$\mathring{\boldsymbol{\partial}}^j$之间的夹角，而$\varphi_{ij}$为$\hat{\boldsymbol{\partial}}^i$、$\hat{\boldsymbol{\partial}}^j$之间的夹角．上式不对 i 和 j 进行求和．

---

* 钱伟长推荐．

$d\mathbf{r}_0$为初始状态时$M'(\xi^i+d\xi^i)$点相对于$M(\xi^i)$点的矢径，$d\mathbf{r}$为变形后M'点相对于M点的矢径，$d\mathbf{r}_0$与$d\mathbf{r}$的关系可看成为仿射变换的关系，而仿射变换的伸长系数l仅仅决定于线段的方向，不决定于线段的长度[1].

用l_i表示基底向量$\mathring{\mathfrak{g}}^i$方向的伸长系数，则

$$|\hat{\mathring{\mathfrak{g}}}^i|=|\mathring{\mathfrak{g}}^i|(1+l_i) \quad 或 \quad \hat{g}^{ii}=(1+l_i)^2\mathring{g}^{ii} \tag{1.4}$$

（上式及以下三式均不对i、j进行求和）．利用上式将（1.3）式改写成

$$\frac{2\theta^{ij}}{\sqrt{\mathring{g}^{ii}}\sqrt{\mathring{g}^{jj}}}=\cos\mathring{\varphi}_{ij}-(1+l_i)(1+l_j)\cos\varphi_{ij} \tag{1.5}$$

若$i=j$，那么$\mathring{\varphi}_{ij}=\varphi_{ij}=0$．由上式经过简单计算得到

$$l_i=\sqrt{1-\frac{2\theta^{ii}}{g^{ii}}}-1 \tag{1.6}$$

因为在$\theta^{ii}=0$（不对i求和）时，$l_i=0$，故上式根号前只取正号．

由此看出，分量θ^{ii}确定了$\mathring{\mathfrak{g}}$方向的伸长系数．

若$\mathring{\mathfrak{g}}^i$，$\mathring{\mathfrak{g}}^j$为单位正交向量，则$\mathring{\varphi}_{ij}=\frac{\pi}{2}(i\neq j)$，记$\varphi_{ij}=\frac{\pi}{2}-x_{ij}$，则（1.5）式变成

$$2\theta^{ij}=-(1+l_i)(1+l_j)\sin x_{ij} \tag{1.7}$$

θ^{ij}不等于另就意味着原来的直角发生了歪斜，这就是分量$\theta^{ij}(i\neq j)$的物理意义．

以上亦即证明了通过θ^{ij}能求得任意方向长度及角度的改变．

二、$\overset{(L)}{e}_{ij}$，$\overset{(A)}{e}_{ij}$，$\overset{(S)}{e}{}^{ij}$，$\overset{(G)}{e}{}^{ij}$与ε_{ij}，θ^{ij}的关系

本节对 W．Segawa一文[4]中列出的四个有限变形特征张量进行分析和补充讨论．这四个特征张量定义如下：

在固定于空间的直角笛卡尔坐标系$OX^1X^2X^3$中，介质质点的位置在未变形的初始状态为$x^i(i=1,2,3)$，变形后为$x^{*i}(i=1,2,3)$．设坐标$x^{*i}(i=1,2,3)$是$x^i(i=1,2,3)$的单值的、连续可微的函数．反之亦然．定义

$$\overset{(L)}{e}_{ij}=\frac{1}{2}(G_{ij}-\delta_{ij}) \tag{2.1}$$

$$\overset{(A)}{e}_{\lambda\mu}=\frac{1}{2}(\delta_{\lambda\mu}-G'_{\lambda\mu}) \tag{2.2}$$

$$\overset{(S)}{e}{}^{ij}=\frac{1}{2}(\delta_{ij}-G^{ij}) \tag{2.3}$$

$$\overset{(G)}{e}{}^{\lambda\mu}=\frac{1}{2}(G'^{\lambda\mu}-\delta_{\lambda\mu}) \tag{2.4}$$

其中

$$G_{ij}=\frac{\partial x^{*k}}{\partial x^i}\frac{\partial x^{*k}}{\partial x^j} \tag{2.5}$$

$$G'_{\lambda\mu}=\frac{\partial x^k}{\partial x^{*\lambda}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{*\mu}} \tag{2.6}$$

$$G^{ij}=\frac{\partial x^i}{\partial x^{*\nu}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{*\nu}} \tag{2.7}$$

$$G'^{\lambda\mu}=\frac{\partial x^{*\lambda}}{\partial x^k}\frac{\partial x^{*\mu}}{\partial x^k} \tag{2.8}$$

而 δ_{ij} 为 Kronecker δ. 则$\overset{(L)}{e}_{ij}$ 就是Love特征张量，而$\overset{(A)}{e}_{\lambda\mu}$是 Almansi 特征张量，$\overset{(S)}{e}{}^{ij}$是Segawa特征张量，$\overset{(G)}{e}{}^{\lambda\mu}$是Green 特征张量.

若我们把介质初始状态的位置座标 x^i 取成嵌入介质内部的 Lagrange 座标 ξ^i，即设

$$x^i=\xi^i \qquad (i=1,2,3) \tag{2.9}$$

这样，初始状态的 Lagrange 座标系则为直角笛卡尔座标系，随着介质的变形，每条座标线 x^i 即 ξ^i 都变弯曲了，变形后的线段元长度 ds 应为[7]

$$ds^2=dx^{*k}dx^{*k}=\frac{\partial x^{*k}}{\partial \xi^i}\frac{\partial x^{*k}}{\partial \xi^j}d\xi^i d\xi^j$$

故

$$\hat{g}_{ij}=\frac{\partial x^{*k}}{\partial \xi^i}\frac{\partial x^{*k}}{\partial \xi^j}=\frac{\partial x^{*k}}{\partial x^i}\frac{\partial x^{*k}}{\partial x^j}$$

显见，在这种情况下

$$\mathring{g}_{ij}=G_{ij},\quad \mathring{g}^{ij}=G^{ij} \tag{2.10}$$

由式(1.1)、(1.2)及(2.1)、(2.3)、(2.10)知道，在 Lagrange 坐标系的这种选取下

$$e_{ij}=\frac{1}{2}(\hat{g}_{ij}-\mathring{g}_{ij})=\frac{1}{2}(G_{ij}-\delta_{ij})=\overset{(L)}{e}_{ij} \tag{2.11}$$

$$\theta^{ij}=\frac{1}{2}(\mathring{g}^{ij}-\hat{g}^{ij})=\frac{1}{2}(\delta_{ij}-G^{ij})=\overset{(S)}{e}{}^{ij} \tag{2.12}$$

由此证明了有限变形的 Love 特征张量 $\overset{(L)}{e}_{ij}$ 及 Segawa 特征张量 $\overset{(S)}{e}{}^{ij}$ 就是这种情况下的 e_{ij} 及 θ^{ij}.

如果我们把介质变形状态的位置座标 x^{*i} 取成嵌入介质内部的 Lagrange 坐标 ξ^i，即设

$$x^{*i}=\xi^i \quad (i=1,2,3) \tag{2.13}$$

这样，变形状态的 Lagrange 坐标系被取成直角笛卡尔坐标系，而变形以前初始状态的 Lagrange 坐标系则由介质的位移唯一确定.变形前初始状态的线段元长度 ds_0 应为[7]

$$ds_0^2=dx^k dx^k=\frac{\partial x^k}{\partial \xi^\lambda}\frac{\partial x^k}{\partial \xi^\mu}d\xi^\lambda d\xi^\mu$$

显见，在这种情况下

$$\mathring{g}_{\lambda\mu}=G'_{\lambda\mu},\quad \mathring{g}^{\lambda\mu}=G'^{\lambda\mu} \tag{2.14}$$

因此，在 Lagrange 座标系的这种特殊选取下

$$e_{\lambda\mu}=\frac{1}{2}(\hat{g}_{\lambda\mu}-\mathring{g}_{\lambda\mu})=\frac{1}{2}(\delta_{\lambda\mu}-G'_{\lambda\mu})=\overset{(A)}{e}_{\lambda\mu} \tag{2.15}$$

$$\theta^{\lambda\mu}=\frac{1}{2}(\hat{g}^{\lambda\mu}-\hat{g}^{\lambda\mu})=\frac{1}{2}(G'^{\lambda\mu}-\delta_{\lambda\mu})=\overset{(G)}{e}{}^{\lambda\mu} \tag{2.16}$$

于是证明了，有限变形的 Almansi 特征张量 $\overset{(A)}{e}_{\lambda\mu}$ 及 Green 特征张量 $\overset{(G)}{e}{}^{\lambda\mu}$ 就是这种特殊情况下的 $\varepsilon_{\lambda\mu}$ 及 $\theta^{\lambda\mu}$.

三、Седов给出的变形[9]不能通过简单加载来实现

对于连续介质均匀（仿射）变形 $\varepsilon_{\alpha\beta}=\mathrm{const}$ 以及某些特殊形式的有限变形[8]，它们是可以通过简单加载过程来实现的.可是对于一般的有限变形，Л. И. Седов[9]指出，通过简单加载过程实现的可能性并不总是存在的，这要取决于所给出的有限变形是否满足相容性方程. Седов 举一例，他说此例仅在 $k=1$ 时满足相容性方程，而在 $k\neq 1$ 时都不满足相容性方程，因此不能通过简单加载过程来实现.

在此，我们要指出的是：Л. И. Седов 所举之例在 $k=1$ 时也不满足相容性方程，这就是说，此例所给出的变形不管 k 等于什么值都不能通过简单加载来实现. Л. И. Седов 的这个例子是不恰当的.

例子是这样的[9]：设初始状态的 Lagrange 座标系为直角笛卡尔座标系. 变形由下列公式给出

$$\left.\begin{aligned}&\Omega_1=\xi^3\\&\Omega_2=h(\xi^3)\xi^1\\&\Omega_3=0\end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Omega_\alpha}{\partial\xi^\beta}+\frac{\partial\Omega_\beta}{\partial\xi^\alpha}\right)$$

于是

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_{11}=\varepsilon_{22}=\varepsilon_{33}=0\\&\varepsilon_{12}=\frac{1}{2}h(\xi^3)\\&\varepsilon_{13}=\frac{1}{2}\\&\varepsilon_{23}=\frac{1}{2}h'(\xi^3)\xi^1\end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

其中 $h(\xi^3)$ 为不等于常数的任意函数.

在 $k=1$ 时变形的相容性方程为

$$\hat{g}^{\alpha\omega}(G_{\omega\mu j}G_{\alpha\nu i}-G_{\omega\mu i}G_{\alpha\nu j})=0 \tag{3.3}$$

其中

$$G_{\nu\mu i}=\frac{\partial^2\Omega_\nu}{\partial\xi^\mu\partial\xi^i} \tag{3.4}$$

将（3.1）式通过（3.4）式代入（3.3）式，则方程（3.3）简化为

$$\hat{g}^{22}[h'(\xi^3)]^2=0$$

即

$$(\hat{\mathfrak{Э}}^2, \hat{\mathfrak{Э}}^2)[h'(\xi^3)]^2=0$$

此外，由（3.2）式还可推出其他一些谬误．可见例子是错的．

参考文献

1. Седов, Л И., Введение в механику сплошной среды, Физматгиз, Москва, (1962).
2. Бондаръ, В. Д., О тензорных характеристиках конечных деформаций сплошной среды, *Прикл. Матем. и Механ.*, т ⅩⅩⅤ, вып. 3 (1961).
3. Эглит, М. З., О тензорных характеристиках конечных деформаций, *Прикл. Матем. и Механ.*, т. ⅩⅩⅣ, вып. 5, (1960).
4. Segawa, W., Measures of finite strain and stress-strain relations, *J. Phys Soc. Japan*. 15, 3 (1960).
5. Reiner, M., Phenomenological macrorheology. Rheology. vol. Ⅰ. ed. by F. R. Eirch, Academic Press, New York, (1956), Chap 2.
6. Adkins, J. E., Large elastic deformations, *Progress in solid mechanics*, Ⅱ. (1961), 1-58. [Перев. и обзоров период. и иностр. литер., *Механика* №1. (1963). 65,]
7. Кочин, Н. Е., Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, изд. 8-е, Изд. АН СССР. Москва, 1961. (史福培等译，向量计算及张量计算初步，高等教育出版社).
8. Бондарь В. Д., Некоторые точные решения уравнений совместности для компонент тензора деформаций при простом нагрухении, *Докл. АН СССР*, т.130, №6, (1960).
9. Седов, Л. И., О понятиях простого нагружения и о возможных путях деформации, *Прикл. Матем. и Механ.*, т. ⅩⅩⅢ, вып. 2, (1959).

Some Discussions on Finite Deformation of Continuous Media

Cheng Yuan-sheng

(*Mechanical Engineering Department, Shanghai University of Technology, Shanghai*)

Abstract

Three problems are discussed in this paper:

1. The physical significance of the characteristic tensor θ^{ij} of finite deformation is discussed as a complement to the literature[2].

2. The four characteristic tensors of finite deformation, introduced in the literature[4], are analyzed and discussed more thoroughly.

3. The representation of the general finite deformation through simple loading

process is not always possible, the condition for its realization being that the given finite deformation satisfies the equations of compatibility. It is pointed out in this paper that for the finite deformation set forth by L. I. Sedov in an example given in[9], the equations of compatibility cannot be satisfied even for $k=1$, henceforth for whatever value of k, the finite deformation which was set forth by Sedov cannot be represented through the simple loading process.