应用数学和力学，第2卷第4期（1981年8月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

三重介质弹性渗流方程组的精确解*

刘 慈 群

（中国科学院兰州渗流力学研究室，1980年8月收到）

摘　要

本文用分解的方法求得了有限封闭地层中三重介质弹性渗流的精确解．它不仅概括了已有的双重介质弹性渗流的主要结果，而且给出各重介质弹性渗流的基本特征．

一、前　言

三重介质弹性渗流模型比双重介质的，能更一般的描述弱压缩液体（石油）在碳酸盐岩地层中的流动规律．因此寻求其三元微分方程组的分析解将更有意义．

本文根据分解的方法[1]求得了有限封闭地层中三重介质弹性径向渗流方程组的精确解．它不仅概括了已有的双重介质的主要结果[2]，而且给出三重介质弹性渗流的基本特征：

1．在不考虑基质岩块系统中达西流的条件下，单重、双重、三重介质的弹性渗流特征值问题是相似的．主要差别仅在根据每一个特征根S_n求相应指数函数时间衰减常数ν_n：对三重介质，根据3次代数方程求三个不同大小的正根；对双重介质，根据2次代数方程求二个不同大小的正根；对单重介质（通常孔隙介质）只根据1次代数方程求一个正根．

2．根据最小时间衰减常数ν_m可以确定任一重介质达到拟定常状态的时间．当弹性渗流进入拟定常状态后，每重介质中的压力与时间成正比变化．因此，用各重介质中平均地层压力（与封闭边界形状无关）来研究弹性渗流拟定常状态，也是可行的．

二、线　源　解

不考虑基质岩块系统Ⅰ和Ⅱ中渗流，弱压缩液体在三重介质中不定常渗定遵循下述微分方程组[3,4]：

$$\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial}{\partial\bar{r}}\left(\bar{r}\frac{\partial P_f}{\partial\bar{r}}\right)+\lambda_1(P_1-P_f)+\lambda_2(P_2-P_f)=\omega_f\frac{\partial P_f}{\partial\tau} \tag{2.1}$$

$$\lambda_1(P_f-P_1)=\omega_1\frac{\partial P_1}{\partial\tau} \tag{2.2}$$

$$\lambda_2(P_f-P_2)=\omega_2\frac{\partial P_2}{\partial\tau} \tag{2.3}$$

* 钱伟长推荐．

式中：

$$P_i=\frac{2\pi k_f h}{\mu Q}(p_0-p_i);\quad \omega_i=\frac{\phi_i c_i}{\phi c};\quad \lambda_i=\frac{\alpha_i k_i}{k_f}r_w^2;\quad \tau=\frac{k_f t}{\mu\phi c r_w^2};\quad \bar{r}=\frac{r}{r_w};$$

$\phi c=\phi_f c_f+\phi_1 c_1+\phi_2 c_2$；$r_w$是井半径；$\mu$ 是液体粘度，Q 是 井 的恒定流量，h 是 地层厚度，p_0 是原始地层压力，p_i 是相应系统中的压力，ϕ_i、c_i 是对应系统的孔隙度和综合压缩系数，α_i 是岩块系与裂缝系统 f 间液体窜流系数，足 标$i=1$，2 指基质岩块系统 Ⅰ 和 Ⅱ，$i=f$ 指裂缝系统．

在有限封闭地层中，恒定强度的线源解可归结为在下述边值条件下：

$$P_i(\bar{r},\ 0)=0 \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial P_i(R,\ \tau)}{\partial\bar{r}}=0 \tag{2.5}$$

$$\lim_{\bar{r}\to 0}\left(\bar{r}\frac{\partial P_f}{\partial\bar{r}}\right)=-1 \tag{2.6}$$

解上述微分方程组(2.1)—(2.3)．

将所求解分解为下述结构[1,2]，即

$$P_i(\bar{r},\ \tau)=-f(\bar{r})+\theta\tau+U_i(\bar{r},\ \tau)\qquad(i=1,\ 2,\ f) \tag{2.7}$$

式中θ是待定常数．

将式(2.7)分别代入方程组(2.1)—(2.3)得函数$f(\bar{r})$和$U_i(\bar{r},\tau)$ 应满足的微分方程和条件：

$$\frac{1}{\bar{r}}\frac{d}{d\bar{r}}\left(\bar{r}\frac{df}{d\bar{r}}\right)=-\theta \tag{2.8}$$

$$\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial}{\partial\bar{r}}\left(\bar{r}\frac{\partial U_f}{\partial\bar{r}}\right)=\omega_f\frac{\partial U_f}{\partial\tau}+\omega_1\frac{\partial U_1}{\partial\tau}+\omega_2\frac{\partial U_2}{\partial\tau} \tag{2.9}$$

$$\lambda_1(U_f-U_1)=\omega_1\theta+\omega_1\frac{\partial U_1}{\partial\tau} \tag{2.10}$$

$$\lambda_2(U_f-U_2)=\omega_2\theta+\omega_2\frac{\partial U_2}{\partial\tau} \tag{2.11}$$

$$\lim_{\bar{r}\to 0}\left(\bar{r}\frac{df}{d\bar{r}}\right)=1 \tag{2.12}$$

$$\lim_{\bar{r}\to 0}\left(\bar{r}\frac{\partial U_i}{\partial\bar{r}}\right)=0\qquad(i=1,\ 2,\ f) \tag{2.13}$$

$$\frac{df(R)}{d\bar{r}}=0 \tag{2.14}$$

$$\frac{\partial U_i(R,\ \tau)}{\partial\bar{r}}=0 \tag{2.15}$$

$$U_i(\bar{r},\ 0)=f(\bar{r}) \tag{2.16}$$

解方程(2.8)，(2.12)，(2.14) 可得 $\theta=\frac{2}{R^2}$ 以及

$$f(\bar{r})=\ln\bar{r}-\frac{\bar{r}^2}{R^2}+c \tag{2.17}$$

式中c待定常数，根据下列条件

$$\int_0^R f(\bar{r})\bar{r}\,d\bar{r}=0 \tag{2.18}$$

得 $c=\frac{3}{4}-\ln R$，R是圆形地层无因次半径.

用分离变量法解式(2.9)—(2.11)．(2.13)(2.15)(2.16)．

设特解

$$U_i(\bar{r},\ \tau)=\Psi_i(\bar{r})e^{-\nu\tau}\qquad (i=1,\ 2,\ f)$$

将之分别代入式(2.9)—(2.11)得：

$$\frac{1}{\bar{r}}\frac{d}{d\bar{r}}\left(\bar{r}\frac{d\Psi_f}{d\bar{r}}\right)=-\nu(\omega_f\Psi_f+\omega_1\Psi_1+\omega_2\Psi_2) \tag{2.19}$$

$$\lambda_1(\Psi_f-\Psi_1)=-\omega_1\nu\Psi_1 \tag{2.20}$$

$$\lambda_2(\Psi_f-\Psi_2)=-\omega_2\nu\Psi_2 \tag{2.21}$$

将式(2.20)(2.21)中Ψ_1，Ψ_2解出代入式(2.19)得

$$\frac{1}{\bar{r}}\frac{d}{d\bar{r}}\left(\bar{r}\frac{d\Psi_f}{d\bar{r}}\right)=-S^2\Psi_f \tag{2.22a}$$

$$S^2=\nu\left(\omega_f+\frac{\lambda_1\omega_1}{\lambda_1-\omega_1\nu}+\frac{\lambda_2\omega_2}{\lambda_2-\omega_2\nu}\right) \tag{2.22b}$$

式(2.22)、(2.13)，(2.15)组成特征值问题，其解是

$$\Psi_f(\bar{r})=J_0(S\bar{r}) \tag{2.23}$$

$$J_1(SR)=0 \tag{2.24}$$

式中：$J_0(x)$．$J_1(x)$分别是零阶和一阶第一类贝塞尔函数.

$J_1(x)=0$ 的根是：$x_0=0$，$x_1=3.8317$，$x_2=7.0156$，$x_3=10.1735$，$x_4=13.3237$，$x_5=16.4706$，$\cdots x_n\approx\left(n+\frac{1}{4}\right)\pi,\cdots$．从式(2.24)可求得特征根$S_n$.再从式(2.22b)解$\nu_n$，而式(2.22b)是一个3次代数方程，即

$$a\nu^3-b\nu^2+c\nu-d=0 \tag{2.25}$$

式中：

$a=\omega_f\omega_1\omega_2>0$，$b=(\lambda_1+\lambda_2+S^2)\omega_1\omega_2+\lambda_1\omega_2\omega_f+\lambda_2\omega_1\omega_f>0$，$c=\lambda_1\lambda_2+(\lambda_1\omega_2+\lambda_2\omega_1)S^2>0$，$d=\lambda_1\lambda_2S^2>0$.

分析式(2.25)可知，对应每一个S_n它有三个不同的正根：$\nu_{n,1}>\nu_{n,2}>\nu_{n,3}>0$．从可得微分方程(2.9)—(2.11)的解：

$$U_f(\bar{r},\ \tau)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_{n,1}e^{-\nu_{n,1}\tau}+A_{n,2}e^{-\nu_{n,2}\tau}+A_{n,3}e^{-\nu_{n,3}\tau}\right)J_0(S_n\bar{r}) \tag{2.26}$$

$$U_1(\bar{r},\tau)=\lambda_1\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{A_{n,1}}{\lambda_1-\omega_1\nu_{n,1}}e^{-\nu_{n,1}\tau}+\frac{A_{n,2}}{\lambda_1-\omega_1\nu_{n,2}}e^{-\nu_{n,2}\tau}+\frac{A_{n,3}}{\lambda_1-\omega_1\nu_{n,3}}e^{-\nu_{n,3}\tau}\right)J_0(S_n\bar{r})-\frac{\omega_1}{\lambda_1}\theta \quad (2.27)$$

$$U_2(\bar{r},\tau)=\lambda_2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{A_{n,1}}{\lambda_2-\omega_2\nu_{n,1}}e^{-\nu_{n,1}\tau}+\frac{A_{n,2}}{\lambda_2-\omega_2\nu_{n,2}}e^{-\nu_{n,3}\tau}+\frac{A_{n,3}}{\lambda_2-\omega_2\nu_{n,3}}e^{-\nu_{n,3}\tau}\right)J_0(S_n\bar{r})-\frac{\omega_2}{\lambda_2}\theta \quad (2.28)$$

式中：$A_{n,1}$、$A_{n,2}$、$A_{n,3}$决定于下述代数方程组

$$A_{n,1}+A_{n,2}+A_{n,3}=F_1(S_n,\ R) \quad (2.29)$$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\omega_1\nu_{n,1}}A_{n,1}+\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\omega_1\nu_{n,2}}A_{n,2}+\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\omega_1\nu_{n,3}}A_{n,3}=F_2(S_nR) \quad (2.30)$$

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_2-\omega_2\nu_{n,1}}A_{n,1}+\frac{\lambda_2}{\lambda_2-\omega_2\nu_{n,2}}A_{n,2}+\frac{\lambda_2}{\lambda_2-\omega_2\nu_{n,3}}A_{n,3}=F_3(S_n,\ R) \quad (2.31)$$

式中：

$$F\ (S_n,\ R)=\frac{2\int_0^R f_i(\bar{r})J_0(S_n\bar{r})\bar{r}\,d\bar{r}}{R^2[J_0(S_nR)]^2};\quad f_i(\bar{r})\doteq f\ (\bar{r})+\frac{\omega_{i-1}}{\lambda_{i-1}}\theta;\quad \omega_0=0$$

式(2.29)—(2.31)是根据初始条件(2.16)得到的.

将式(2.17)和式(2.26)—(2.28)代入式(2.7)，即得三重介质线源精确解.

当$\lambda_2=0$时，式(2.25)简化为双重介质的已有的求衰减常数的公式[2].它是一个二次代数方程

$$\omega_1\omega_f\nu^2-(\lambda_1+\omega_1S^2)\nu+\lambda_1S^2=0 \qquad (\omega_1+\omega_f=1) \quad (2.25)'$$

当$\lambda_1=\lambda_2=0$时，式(2.25)简化为单重介质已有结果[1].

$$\omega_f\nu-S^2=0 \qquad (\omega_f=1) \quad (2.25)''$$

从上可知，表征三重介质弹性渗流最本质特征的是三次代数方程式(2.25)及其三个根.

当$\nu_m\tau\geqslant 5$时，$e^{-\nu_m\tau}<0.007$，式(2.7)简化为

$$P_i(\bar{r},\tau)\approx -f(\bar{r})+\theta\tau \quad (2.7)$$

这就是说，当$\nu_m\tau\geqslant 5$时，三重介质中任一点的压力变化都将进入拟定常状态.因而也可用平均地层压力来研究分析三重介质的拟定常状态[4].ν_m是最小时间衰减常数.

对应$S_0=0$，从式(2.25)得

$$\nu_{0,1}=\frac{1}{2}\ (b'+\sqrt{b'^2-4c'}) \quad (2.32a)$$

$$\nu_{0,2}=\frac{1}{2}\ (b'\sqrt{b'^2-4c'}) \quad (2.32b)$$

$$\nu_{0,3}=0 \quad (2.32c)$$

式中：

$$b'=\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\omega_f}+\frac{\lambda_1}{\omega_1}+\frac{\lambda_2}{\omega_2} \qquad c'=\frac{\lambda_1\lambda_2}{\omega_f\cdot\omega_1\omega_2}$$

上式与研究平均地层压力的文献[4]中相应公式是一致的．即从一般解中将平均地层压力分解出来．

三、面　源　解

这时，条件(2.6)，(2.12)相应改为

$$\frac{\partial P_f(1,\ \tau)}{\partial\bar{r}}=-1 \tag{3.1}$$

$$\frac{df(1)}{d\bar{r}}=1 \tag{3.2}$$

类似前节运算，特征函数和特征根方程应为：

$$\Psi_f(\bar{r})=B_0(S\bar{r})=J_1(S)Y_0(S\bar{r})-Y_1(S)J_0(S\bar{r}) \tag{3.3a}$$

$$B_0(1)=1 \tag{3.3b}$$

$$B_0'(SR)=J_1(S)Y_1(SR)-Y_1(S)J_1(SR)=0 \tag{3.4a}$$

$$B_0'(0)=0 \tag{3.4b}$$

式中：$Y_0(x)$，$Y_1(x)$分别是零阶和一阶第二类贝塞尔函数．

这时，微分方程组(2.9)—(2.11)的解与线源解(2.26)—(2.28)是相似的，只需将$J_0(S\bar{r})$换成$B_0(S\bar{r})$；以及将确定系数A_n的代数方程组(2.29)—(2.31)中$F(S_n,\ R)$相应换成：

$$F(S_n,\ R)=\frac{\int_1^R f_i(\bar{r})B_0(S_n\bar{r})\bar{r}\,d\bar{r}}{\int_1^R B_0^2(S_n\bar{r})\bar{r}\,d\bar{r}} \tag{3.5}$$

式中：

$$f_i(\bar{r})=f(\bar{r})+\frac{\omega_{i-1}}{\lambda_{i-1}}\cdot\frac{2}{R^2-1} \tag{3.6}$$

$$f(\bar{r})=\frac{R^2}{R^2-1}\left(\ln\bar{r}-\frac{1}{2}\frac{\bar{r}^2}{R^2}\right)-\left(\ln R-\frac{3}{4}\right) \tag{3.7}$$

$$\int_1^R B_0^2(S_n\bar{r})\bar{r}\,d\bar{r}=\frac{2}{\pi^2S_n^2}\left[\frac{J_1^2(S_n)-J_1^2(S_nR)}{J_1^2(S_nR)}\right] \tag{3.8}$$

$$(S_n\neq 0)$$

从上得到三重介质面源精确解．

四、推　论　和　小　结

1．对于$2L_x\cdot 2L_y$矩形封闭边界，特征函数$\Psi(x,y)=\cos\left(\frac{n\pi x}{L_x}\right)\cos\left(\frac{m\pi y}{L_y}\right)$且

$S^2=\frac{n^2\pi^2}{L_x^2}+\frac{m^2\pi}{L_y^2}$.仍可根据式(2.25)求时间衰减常数，再根据$\nu_m$确定到达拟定常状态的时间.

2. 对于任意形状封闭边界地层，根据平均压力研究拟定常状态下压力变化规律.根据式(2.25)估算到达拟定常状态的时间.

3. 在有限封闭边界以及不考虑基质岩块系统中渗流的条件下，单重、双重、三重介质的弹性渗流特征值问题是相似的.主要差别仅在根据每一个特征根S_n，求相应指数函数衰减常数ν_n：对三重介质，需根据3次方程(2.25)求三个不同大小的正根；对双重介质，需根据2次方程(2.25)′求二个大小不同的正根；对单重介质，仅根据1次方程(2.25)″求一个正根.因此式(2.25)是表征三重介质弹性渗流的特性方程.

参 考 文 献

1. Gavalas, G. R. et al, *Soc. Pet. Eng. J.* 13,6,(1973), 335—342.
2. 陈钟祥等，中国科学，2,(1980)，152—165.
3. Closmann, P. J., *Soc. Pet. Eng. J.* 15,5,(1975), 385—398.
4. 刘慈群，力学学报，1981年特刊，1.

Exact Solution for the Compressible Flow Equations Through a Medium with Triple-Porosity

Liu Ci-qun

(Lanzhou Research Division of Seepage Dynamics, Academia Sinica, Lanzhou)

Abstract

This paper obtains the exact solutions for the unsteady radial flow equations of the slightly compressible liquid through a medium with triple-porosity by using the method of decomposition. This solution not only reveals the essential characteristic of the unsteady flow of liquid through a medium with multiple-porosity, but also comprises the existing primal results.