

竖直毛细管中有限长液柱的粘性流体运动

吴望一 钱民全 温功碧

(北京大学力学系) (中国科学院力学研究所) (北京大学力学系)

(钱伟长推荐, 1980年11月4日收到)

摘 要

本文考虑了竖直毛细管中具有两个自由面的有限长液柱的粘性流体运动. 假设流体是牛顿的. 对边界条件进行线性化后, 得到了小雷诺数情形下速度、压力和自由面形状的级数形式的分析表达式. 对水和血液在多种液柱长度下求出了数值结果. 分析表明在上下弯月面处有强回流. 最大回流速度可达主流平均速度57%左右. 此外, 本文还研究了惯性效应. 采用时间相关的有限差分法求出了 $Re=24.5$ 时非线性方程的数值解. 将此数值解和小雷诺数时的分析解进行比较表明, 当 $Re \leq 24.5$ 时惯性效应不大.

一、方程组和边界条件

血栓的形成机制是医学界十分关注的一个问题, 它的解决牵涉到许多复杂的生理现象. 此外, 由于血栓是在人体内血液流动状态下形成的, 所以它也必然和血液流动的一些流体力学特征发生直接的关系. 1958年chandler发明一种人工产生血栓的器械, 这种器械是由一定口径的塑料管首尾相接围成一圆圈构成. 在塑料管内盛半圈左右的血液, 然后以一定角速度在铅垂平面内旋转. 起动后不久就可以在下弯月面地方产生血栓, 它的构造和人体内形成的血栓基本一致. 最近, 钱民全制造了一种称之为旋转皮带环的器械. 一塑料环象皮带一样地套在两皮带轮上, 全血放在皮带的直线段上. 皮带轮以一定角速度旋转, 几分钟后发现在下弯月面处也形成了血栓. 本文研究竖直毛细管中有限液柱的粘性流体运动. 通过研究试图搞清下弯月面附近人工血栓形成处的流动特性, 为今后进一步研究血栓形成的机制做准备.

考虑在重力作用下有限长液柱在直毛细管中的运动. 观察表明, 竖直毛细管内具有两个自由面的有限长液柱在重力、表面张力和粘性力的综合作用下很快地趋于等速下降状态. 为

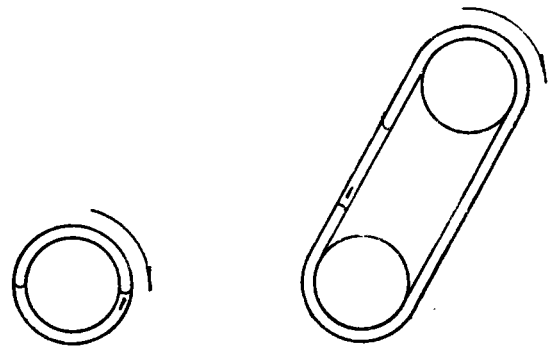


图 1

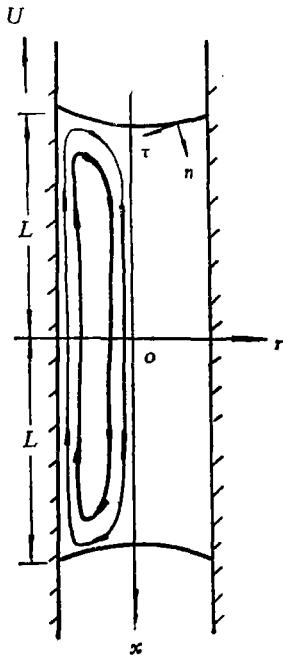


图 2

为了方便起见，将坐标系取在整体以 U 的速度向下运动的液柱上 (U 也是固定在管壁上的绝对坐标系中任一液柱剖面上的平均速度)，则管壁以 U 的速度向上运动，液柱内的流动是定常的。不难看出，管壁以 U 的速度向上抽动时将带动壁面附近的粘性流体向上运动。当流体到达上弯月面时，由于自由面的阻挡作用将沿自由面折回然后沿轴线流下形成如图 2 所示的回流。同样地可以分析出下弯月面处也有回流。

现在我们从流体力学基本方程组出发较细致地研究上下弯月面处回流的流体力学特性——流谱、速度场、压力场、切应力分布及自由面形状。为了简单起见假设：

- 1) 流体是牛顿，粘性不可压缩的。
- 2) 运动是定常的。
- 3) 假设液柱在运动时遗留在管壁上的液层是无限薄的。
- 4) 外力是重力，此外在毛细管的自由面上存在着毛细力。

设液柱的长度为 $2L$ (以两弯月面和管壁的交点为液柱的起止点)。取柱坐标系 (x, r, θ) 。原点放置在管轴上液柱的中心处。取 U , a , $\frac{\mu U}{a}$, μU 为特征速度，特征长度，特征压力和特征表面张力，并令：

$$\left. \begin{aligned} x &= x'a, \quad r = r'a, \quad L = \lambda a, \\ u &= u'U, \quad v = v'U, \quad p = p' \frac{\mu U}{a}, \\ T &= T' \mu U, \quad G = \frac{ga^2}{\nu U}, \quad Re = \frac{Ua}{\nu} \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

其中带“'”的量都是无量纲量。不带“'”的是对应的有量纲量。 u, v 是 x, r 方向的速度分量， p 是压力， T 是表面张力， a 是圆管半径， μ, ν 分别是动力学粘性系数和运动学粘性系数， g 是重力加速度， p_0 是自由面上空气的压力，则竖直毛细管中有限长液柱的粘性流体定常运动满足下列无量纲化的方程和边界条件：

$$\left. \begin{aligned} Re \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} \right) &= G - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \\ Re \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

$$\text{在 } r=1 \text{ 处: } u=-1, \quad v=0, \quad (1.3)$$

$$\text{在 } r=0 \text{ 处: } v=0, \quad (1.4)$$

在自由面 $x = \mp \lambda + F_{\mp}(r)$ 处：

$$u n_x + v n_r = 0 \quad (1.5)$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r}\right)(n_r^2 - n_x^2) + 2\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial r}\right)n_x n_r = 0 \tag{1.6}$$

$$p = p_0 - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + 2\left[\frac{\partial u}{\partial x} n_x^2 + \frac{\partial v}{\partial r} n_r^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r}\right)n_x n_r\right] \tag{1.7}$$

其中 $F_{\mp}(r)$ 代表上下自由面形状所满足的方程, n_x, n_r, R_1, R_2 分别是自由面法向单位向量在 x, r 轴上的投影和自由面的两个主曲率半径. 它们和 $F_{\mp}(r)$ 的关系由下式确定:

$$n_{x\mp} = \pm \frac{1}{\sqrt{1+F_{\mp}'^2}}, \quad n_{r\mp} = \mp \frac{F_{\mp}'}{\sqrt{1+F_{\mp}'^2}}, \quad \left(\frac{n_r}{n_x}\right)_{\mp} = -F_{\mp}' \tag{1.8}$$

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = |F_{\mp}''(1+F_{\mp}'^2)^{-3/2}| + |F_{\mp}'(1+F_{\mp}'^2)^{-1/2}r^{-1}| \tag{1.9}$$

如果自由面是球面, 则:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 2|F_{\mp}''(1+F_{\mp}'^2)^{-3/2}| \tag{1.10}$$

下面我们假设自由面是球形的, 因此(1.10)式成立. 应该指出, 由于我们假设壁面上遗留的流体层是无限薄的, 所以在自由面上 $r=1$ 是奇点, 在该点上, 速度由 $-U$ 连续地变到自由面上的值.

方程(1.2)–(1.7)是一组具有非线性边界条件的非线性方程, 要求它的分析解或数值解是比较困难的. 为了简化问题我们设法将自由面上的边界条件线性化. 为此我们假设自由面与直线相差不大, 即 F_{\mp} 和 F_{\mp}' 是一阶微量, 但认为 F_{\mp}'' 是零阶量, 从而保留了对毛细管液流而言具有基本重要性的毛管力. 将自由面上满足的边界条件(1.5), (1.6), (1.7)转移到 $x = \mp \lambda$ 上满足并忽略高阶小量后得:

$$r=1 \text{ 处: } u = -1, \quad v = 0 \tag{1.11}$$

$$r=0 \text{ 处: } v = 0 \tag{1.12}$$

$$x = \mp \lambda \text{ 处: } u = 0 \tag{1.13}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \tag{1.14}$$

$$p = p_0 - 2T|F_{\mp}''| + 2\frac{\partial u}{\partial x} \tag{1.15}$$

自由面上边界条件线性化后问题有了很大的简化. 现在速度、压力和自由面形状可以分开求了. 先在条件(1.11)–(1.14)下求出方程(1.2)的解 u, v, p , 然后再利用 u 及 p 根据(1.15)式求出 F_{\mp} .

现在考察一下问题中雷诺数的大小. 下面援引两组数据:

1. 取水为工作液体, 毛细管是玻璃制的. 于是 $\mu = 0.01$ 克/厘米·秒, $\rho = 1$ 克/厘米³, $g = 980$ 厘米/秒², $T' = 72.5$ 达因/厘米, $\alpha = 10^\circ$, $P'_0 = 1.013 \times 10^6$ 达因/厘米². 根据实测资料, 对管径 $a = 0.021$ 厘米而言, 水柱下降速度

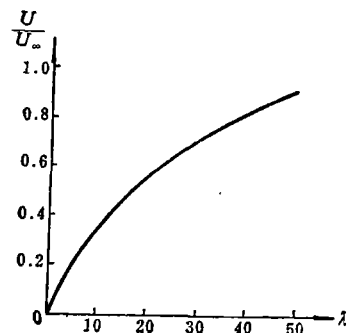


图 3

U/U_∞ 和无量纲液柱长 $\lambda = L/a$ 之间的关系如表 1 所示. 考虑到 $\lambda = \infty$ 时, 管内全部都是泊

肃叶剖面、重力和粘性力平衡，因此 $G = 8 = \frac{ga^2}{\nu U_\infty}$ ，由此推出 $\lambda = \infty$ 时 $U_\infty = 5.402$ 。图 3 画出了 U/U_∞ 和 λ 之间的曲线关系。

表 1

λ	5	10	20	30	∞
U (厘米/秒)	1	1.75	3	4	5.40
G	43.22	24.70	14.40	10.80	8
T	7250	4143	2417	1813	1342
Re	2.1	3.7	6.3	8.4	11.3

2. 取血液及玻璃毛细管。于是 $\mu = 0.04$ 克/厘米·秒， $g = 980$ 厘米/秒²， $\rho = 1.055$ 克/厘米。表面张力 = 54 达因/厘米， $\alpha = 48^\circ$ 。根据实测结果我们有 $\lambda = 18$ 时 $U = 0.53$ 。对应的 $Re = 0.7$ ， $G = 115.6$ ， $T = 2641.50$ 。

由此可见，本问题中的 Re 数不太大，在几十的范围内。下面我们首先将惯性项忽略研究小雷诺数问题，然后再研究惯性效应，即雷诺数的影响问题。

二、小雷诺数情形的分析解

在小雷诺数时，惯性项可忽略，方程(1.2)变成：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} &= 0 \\ \nabla p &= G\bar{e}_x + \nabla^2 \bar{v} \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

其中 \bar{e}_x 是 x 方向的单位向量， \bar{v} 是速度向量。首先，我们从压力中抽出静压 $G(x + \lambda)$ 和静止时的毛管力 $p_0 - 2T \cos \alpha$ ，其中 α 是静止时流体和管壁的接触角。其次从速度中抽出泊肃叶流动的速度剖面 $u_0 = -1 + 2(1 - r^2)$ 。对应地必须在压力中减去 $-8(x + \lambda)$ 。考虑到这些，我们令：

$$\left. \begin{aligned} u &= -1 + 2(1 - r^2) + u' \\ v &= v' \\ p &= (G - 8)(x + \lambda) + p_0 - 2T \cos \alpha + p' \\ \psi &= -\frac{r^2}{2}(1 - r^2) + \psi' \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

其中 u' ， v' ， p' ， ψ' 分别是回流的速度分量，压力和流函数。将(2.2)代入(2.1)及(1.11)–(1.15)中得：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rv')}{\partial r} &= 0 \\ \nabla p' &= \nabla^2 \bar{v}' \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

$$r = 1 \text{ 处: } \quad u' = 0 \quad (2.4)$$

$$v' = 0 \quad (2.5)$$

$$r = 0 \text{ 处: } \quad v' = 0 \quad (2.6)$$

$$x = \mp \lambda \text{ 处: } \quad u' = -(1 - 2r^2) \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial x} = 0 \quad (2.8)$$

$$p' = -(G - 8)(x + \lambda) + 2T \cos \alpha - 2T |F_{\frac{a}{\lambda}}| + 2 \frac{\partial u'_0}{\partial x} \quad (2.9)$$

引进 f' 使

$$u' = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f'}{\partial r} \right) \quad v' = \frac{\partial^2 f'}{\partial r \partial x}$$

于是连续性方程自动满足, 将 \vec{v}' 写成下列形式:

$$\begin{aligned} \vec{v}' &= -\vec{e}_x \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f'}{\partial r} \right) + \vec{e}_r \frac{\partial^2 f'}{\partial r \partial x} \\ &= \nabla \frac{\partial f'}{\partial x} - \vec{e}_x \nabla^2 f' \end{aligned}$$

其中 \vec{e}_x , \vec{e}_r 分别是 x 轴和 r 轴上的单位向量. 将其代入 (2.3) 中的第二式中得:

$$\nabla p' = \nabla \nabla^2 \frac{\partial f'}{\partial x} - \vec{e}_x \nabla^4 f' \quad (2.10)$$

令:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^4 f' &= 0 \\ p' &= \nabla \frac{\partial f'}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

于是 (2.10) 式满足, 这样问题就化为求双调和方程

$$\nabla^4 f' = 0 \quad (2.12)$$

的解 f' , f' 求得后, u' , v' , p' 及流函数 ψ' 分别按下式计算:

$$\left. \begin{aligned} u' &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f'}{\partial r} \right) & v' &= \frac{\partial^2 f'}{\partial r \partial x} \\ p' &= \nabla^2 \frac{\partial f'}{\partial x} & \psi' &= r \frac{\partial f'}{\partial r} \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

显然, 我们的问题对 r 轴对称. 参照文献 [1] 中的做法. 取满足条件 (2.4) 和 (2.8) 的下列形式的解:

$$\begin{aligned} f'(x, r) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[\left\{ -[2 + k_n \lambda \tanh k_n \lambda] \frac{\cosh k_n x}{\cosh k_n \lambda} + k_n x \frac{\sinh k_n x}{\cosh k_n \lambda} \right\} \frac{J_0(k_n r)}{k_n^2 J_1(k_n)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=1}^{\infty} B_{nm} \cos p_m x \left\{ \frac{I_0(p_m r)}{p_m^2 I_0(p_m)} - \frac{r I_1(p_m r)}{p_m [2I_0(p_m) + p_m I_1(p_m)]} \right\} \right] \quad (2.14) \end{aligned}$$

其中 A_n , B_{nm} 是任意常数, J_i , I_i 是 i 阶实变量贝塞函数和虚变量贝塞函数. k_n 是方程

$$J_0(x) = 0 \text{ 的第 } n \text{ 个根. } \quad p_m = \frac{(m + 1/2)\pi}{\lambda}$$

将 (2.14) 式代入 (2.13) 式, 容易得到 u' 和 v' 的表达式, 它们是:

$$u' = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[\left\{ - [2 + k_n \lambda \tanh k_n \lambda] \frac{\cosh k_n x}{\cosh k_n \lambda} + k_n x \frac{\sinh k_n x}{\cosh k_n \lambda} \right\} \frac{J_0(k_n r)}{J_1(k_n)} \right. \\ \left. - \sum_{m=1}^{\infty} B_{nm} \cos p_m x \left\{ \frac{I_0(p_m r)}{I_0(p_m)} - \frac{2I_0(p_m r) + p_m r I_1(p_m r)}{2I_0(p_m) + p_m I_1(p_m)} \right\} \right] \quad (2.15)$$

$$v' = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[\left\{ [1 + k_n \lambda \tanh k_n \lambda] \frac{\sinh k_n x}{\cosh k_n \lambda} - k_n x \frac{\cosh k_n x}{\cosh k_n \lambda} \right\} \frac{J_1(k_n r)}{J_1(k_n)} \right. \\ \left. - \sum_{m=1}^{\infty} B_{nm} \sin p_m x \left\{ \frac{I_1(p_m r)}{I_0(p_m)} - \frac{p_m r I_0(p_m r)}{2I_0(p_m) + p_m I_1(p_m)} \right\} \right] \quad (2.16)$$

令条件(2.5)式满足可确定系数 B_{nm} . 利用正弦函数 $\sin p_m x$ 的正交性我们得到:

$$B_{nm} = \frac{4k_n^3}{\lambda(k_n^2 + p_m^2)^2} \frac{\sin\left(m + \frac{1}{2}\right)\pi}{\frac{I_1(p_m)}{I_0(p_m)} - \frac{p_m I_0(p_m)}{2I_0(p_m) + p_m I_1(p_m)}} \quad (2.17)$$

现在我们根据条件(2.7)确定系数 A_n . 利用贝塞函数的正交性, 经过运算后得:

$$A_n = -\frac{1}{k_n} + \frac{8}{k_n^3} \quad (2.18)$$

容易验证条件(2.6)是自动满足的, 于是我们得到了满足所有边界条件的双调和方程的解(2.14), 式中的 A_n , B_{nm} 分别由(2.17)和(2.18)确定.

根据(2.13)式, 经过简单的运算可求得压力 p' 和流函数 ψ' 的表达式:

$$p' = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[2k_n \frac{\sinh k_n x}{\cosh k_n \lambda} \frac{J_0(k_n r)}{J_1(k_n)} + \sum_{m=1}^{\infty} B_{nm} p_m \sin p_m x \frac{2I_0(p_m r)}{2I_0(p_m) + p_m I_1(p_m)} \right] \quad (2.19)$$

$$\psi' = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[\left\{ - [2 + k_n \lambda \tanh k_n \lambda] \frac{\cosh k_n x}{\cosh k_n \lambda} + k_n x \frac{\sinh k_n x}{\cosh k_n \lambda} \right\} \frac{-r J_1(k_n r)}{k_n J_1(k_n)} \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^{\infty} B_{nm} \cos p_m x \left\{ \frac{r I_1(p_m r)}{p_m I_0(p_m)} - \frac{r^2 I_0(p_m r)}{2I_0(p_m) + p_m I_1(p_m)} \right\} \right] \quad (2.20)$$

有了 u' , v' , p' , ψ' , u , v , p , ψ 可根据(2.2)式求出.

现在我们利用条件(2.9)确定上下弯月面的形状. 显然,

$$|F''_-| = \cos \alpha + \frac{1}{2T} \left[-p'_- + 2 \frac{\partial u'}{\partial x_-} \right] \quad (2.21)$$

$$|F''_+| = \cos \alpha + \frac{1}{2T} \left[-2\lambda(G-8) - p'_+ + 2 \frac{\partial u'}{\partial x_+} \right] \quad (2.22)$$

考虑到 $|F''_-| = -F''_-$, $|F''_+| = F''_+$ 及边界条件 $F(1) = 0$, $F'(0) = 0$. 积分(2.21)和(2.22)后得到:

$$F_-(r) = -\frac{\cos \alpha}{2} (r^2 - 1) - \frac{1}{2T} [D(r) - D(1)] = -\frac{\cos \alpha}{2} (r^2 - 1) + F_c(r) \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned}
 F_+(r) &= \frac{\cos \alpha}{2}(r^2-1) - \frac{\lambda}{2T}(G-8)(r^2-1) - \frac{1}{2T}[D(r)-D(1)] \\
 &= \left[\frac{\cos \alpha}{2} - \frac{\lambda}{2T}(G-8) \right] (r^2-1) + F_c(r)
 \end{aligned} \quad (2.24)$$

其中 $F_c(r) = -\frac{1}{2T}[D(r)-D(1)]$ 是由于回流产生的弯月面形状的变化。这里:

$$\begin{aligned}
 D(r) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[\{2 \tanh k_n \lambda (2 + k_n \lambda \tanh k_n \lambda) - 2k_n \lambda\} \frac{A(k_n r)}{k_n J_1(k_n)} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{m=1}^{\infty} B_{nm} \sin \left(m + \frac{1}{2} \right) \pi \left\{ \frac{6B(p_m r) + 2C(p_m r)}{p_m [2I_0(p_m) + p_m I_1(p_m)]} - \frac{2B(p_m r)}{p_m I_0(p_m)} \right\} \right] \quad (2.25)
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}
 A(v) &= \iint_0^v [J_0(v) dv] dv \\
 B(v) &= \iint_0^v [I_0(v) dv] dv \\
 C(v) &= \iint_0^v [v I_1(v) dv] dv
 \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

在推导中我们利用了 $p'_- = p'_+$, $\frac{\partial u'}{\partial x_-} = -\frac{\partial u'}{\partial x_+}$ 的性质。

从解中不难看出, 无量纲速度剖面 \bar{u} 和压力 \bar{p} 只和 λ 有关而和液体的性质及管子的几何参数无关, 但自由面形状则严重地依赖于这些因素。下面我们首先计算对所有流体和管径普遍适用的速度剖面 \bar{u} 和压力 \bar{p} , 然后再分别水和血液两种情形研究自由面的形状。

我们对 $\lambda=2, 5, 10, 20, 30$ 分别计算了速度、压力和剪切应力。在计算中我们取 $n=30, m=60$ 。由于 u', ψ' 的对称性和 v', p' 的反对称性, 只须对液柱的一半进行计算。

计算表明, 不论那个 λ , 回流主要发生在离自由面一倍管径的区域内, 在此以外, 回流消失, 变成几乎充分发展的泊肃叶流动, 例如, 离自由面一倍管径的地方, 速度剖面已经是泊肃叶剖面的99%。由此可见, 弯月面的影响只波及到离弯月面一倍管径的地方。为了突出回流, 我们只画出离自由面一倍管径区域内的流线图, 速度剖面, 压力剖面和剪切力剖面(结果取自 $\lambda=5$, 但其他 λ 的结果和 $\lambda=5$ 几乎完全一样)。图4画出了上弯月面 $-5 \leq \lambda \leq -4$

区域中固定在固壁坐标系中的11个无量纲速度剖面图。考察 $\frac{u}{U}$, $-\frac{v}{U}$ 的图形发现, 速度剖面的基本形态和文献[1]中团流(Bolus flow)情形基本相似。所不同的是, 由于团流中 $x=\lambda$ 处是固壁, 流体的速度在那里必须滞止为零, 而本问题中是自由面, $u=0$ 但容许 v 取不等于零的值, 因此 $\frac{v}{U}$ 在 $x=\lambda$ 处的强度比团流大。具体地表现为 v 的最大值可达 $\frac{v}{U}=0.54$, 而在团流中只有0.3左右, 其次在自由面上回流最大而在团流的固壁附近必须从最大逐渐滞止为零。由此不难理解在本情形中发展成泊肃叶剖面的长度要比团流短。例如 $x=-\lambda+1$ 处, $\frac{u}{U}=1.98$, 而在团流中只有1.7左右。

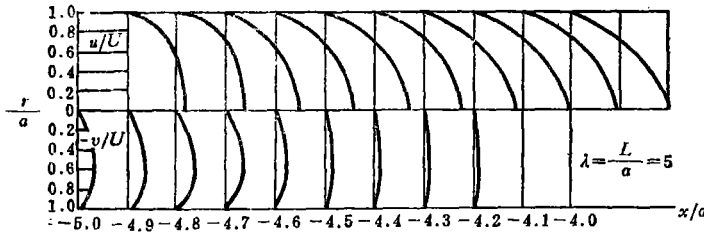


图 4

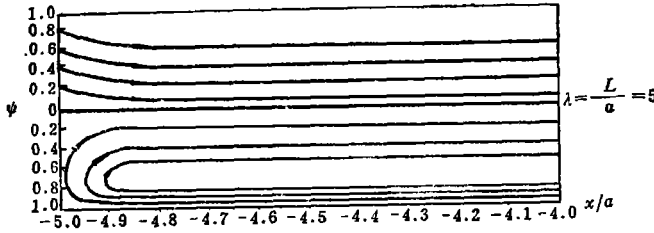


图 5

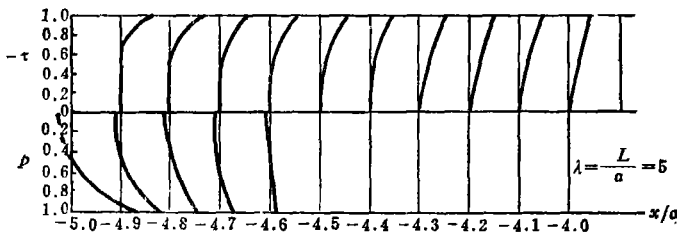


图 6

图 5 画出了固定在管壁的坐标系中和固定在液柱的坐标系中的左边部分流线图. 在与液柱固连的运动坐标系中可以看到很明显的回流. 与之对应在与管壁固连的静止坐标系中, 流线向管轴方向漂移, 而漂移现象主要发生在离自由面一倍管径的地方.

图 6 画出了剪切应力和压力分布图. 在弯月面附近, 壁面的剪切力较泊肃叶剖面的剪应力为大, 而轴线附近则较泊肃叶的剪切力为小. 至于压力分布则它和回流速度 v 相适应, 当 r 向轴线方向推移时, 压力逐渐减少, v 就是在这样的压力梯度作用下产生的. 压力梯度和 v 一样在弯月面上达到最大值.

最后, 我们讨论上下弯月面的形状, 它是和流体性质

及管径有关的. 下面分水和血液两种情形讨论:

1) 水, 取第一节中表 1 的数据, 经过计算 $F_c(r)$ 的值列在下表:

r	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$F_c(r)$	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0	0	0	0

值得注意的是, 在写出来的精度范围内, $F_c(r)$ 与 λ 有关, 即无论对于 $\lambda=2, 5, 10, 20, 30$, $F_c(r)$ 的结果都是一样的. 根据(2.23), (2.24)式, $F_c(r)$ 使上弯月面变弯些, 而使下弯月面变平些. 但改变量 0.001 比起 $\frac{\cos \alpha}{2} = 0.492$ 来小得多, 完全可以忽略不计, 于是我们

得到确定上下弯月面形状相当精确的近似公式:

$$F_-(r) = -\frac{\cos \alpha}{2}(r^2 - 1) \tag{2.27}$$

$$F_+(r) = \left[\frac{\cos \alpha}{2} - \frac{\lambda}{2T}(G - 8) \right] (r^2 - 1) \tag{2.28}$$

根据这个公式, 我们得到下列计算结果:

λ	5	10	20	30
α_-	10°	10°	10°	10°
α^+	16.15°	19.18°	21.29°	20.20°

2) 血液, 取第一节中引出的血液数据, 将之代入(2.27) (2.28) 式得:

$$\alpha_- = 48^\circ, \alpha_+ = 85.26^\circ$$

这就是说, 上弯月面基本上和静止时一样. 下弯月面则必须根据重力及泊肃叶压力进行修正.

三、惯性效应

现在考虑非线性惯性效应. 即如果保留(1.2)式中左边的惯性项, 则它会对解带来多大的影响. 在边界条件(1.11)–(1.15)下求方程组(1.2)的分析解是很困难的. 下面我们采用行之有效的有限差分法数值地解此问题. 采用涡量 ζ 和流函数 ψ 为未知函数, 于是对应的不定常问题的方程组和边界条件为:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial(u\zeta)}{\partial x} + \frac{\partial(v\zeta)}{\partial r} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial r} - \frac{\zeta}{r^2} \right) \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = -r\zeta \quad (3.2)$$

$$r=1 \text{ 处: } \psi = 0 \quad (3.3)$$

$$r=0 \text{ 处: } \psi = 0, \zeta = 0 \quad (3.4)$$

$$x = \mp \lambda \text{ 处: } \psi = 0, \zeta = 0 \quad (3.5)$$

$$\text{其中} \quad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial r}, \quad u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad -v = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3.6)$$

应力根据下式求出:

$$\tau_{rr} = 2 \frac{\partial v}{\partial r}, \quad \tau_{xx} = 2 \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \tau_{\theta\theta} = 2 \frac{v}{r}, \quad \tau_{xr} = \tau_{rx} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r} \quad (3.7)$$

(3.1)式中的对流项采用第二迎风格式^[2]. 这样(3.1)式的差分格式为:

$$\begin{aligned} \zeta_{i,j}^{k+1} = & \zeta_{i,j}^k - \Delta t (ADQR + ADQX) + \frac{\Delta t}{Re} \left(\frac{\zeta_{i+1,j} + \zeta_{i-1,j} - 2\zeta_{i,j}}{\Delta x^2} \right. \\ & \left. + \frac{\zeta_{i,j+1} + \zeta_{i,j-1} - 2\zeta_{i,j}}{\Delta r^2} + \frac{\zeta_{i,j+1} - \zeta_{i,j-1}}{2r_i \Delta r_i} - \frac{\zeta_{i,j}}{r_i^2} \right) \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\text{其中} \quad ADQR = \frac{v_R \zeta_R - v_L \zeta_L}{\Delta r}, \quad v_R = \frac{v_{j+1} + v_j}{2}, \quad v_L = \frac{v_j + v_{j-1}}{2}$$

$$\zeta_R = \begin{cases} \zeta_i & v_R > 0 \\ \zeta_{i+1} & v_R < 0 \end{cases}, \quad \zeta_L = \begin{cases} \zeta_{j-1} & v_L > 0 \\ \zeta_j & v_L < 0 \end{cases}$$

$$ADQX = \frac{u_R \zeta_R - u_L \zeta_L}{\Delta x}, \quad u_R = \frac{u_{i+1} + u_i}{2}, \quad u_L = \frac{u_i + u_{i-1}}{2}$$

$$\xi_R = \begin{cases} \xi, & u_R > 0 \\ \xi_{i+1}, & u_R < 0 \end{cases} \quad \xi_L = \begin{cases} \xi_{i-1}, & u_L > 0 \\ \xi, & u_L < 0 \end{cases}$$

$\xi_{i,j}^k, \xi_{i,j}^{k+1}$ 分别代表 k 时段和 $k+1$ 时段 (i, j) 点上的 ξ 值。我们采用超松弛迭代法解 ψ 的方程 (3.2)。它的差分公式为:

$$\psi_{i,j}^{k+1} = (1-\omega)\psi_{i,j}^k + \omega \left\{ \frac{1}{2(1+\beta_{i,j}^2)} (\psi_{i+1,j}^k + \psi_{i-1,j}^{k+1} + \beta_{i,j}^2 \psi_{i,j+1}^k + \beta_{i,j}^2 \psi_{i,j-1}^{k+1}) - \frac{\Delta x_i \beta_{i,j+1}}{2r_i} \psi_{i,j+1}^k + \frac{\Delta x_i \beta_{i,j-1}}{2r_i} \psi_{i,j-1}^{k+1} + r_j \Delta x_i^2 \xi_{i,j} \right\} \quad (3.9)$$

其中 $\beta_{i,j} = -\frac{\Delta x_i}{\Delta r_j}$, ω 是松弛因子。

用时间相关法数值地求定常问题的解, 其步骤如下:

1) 将 x, r 方向分成 i 等分和 j 等分。为了保证格式是稳定的, 时间步长 Δt 应选成小于:

$$\Delta t_{\text{临界}} = \frac{1}{\frac{2}{Re} \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta r^2} \right) + \frac{|u|_{\max}}{\Delta x} + \frac{|v|_{\max}}{\Delta r}}$$

2) 取小雷诺数时的解为 $t=0$ 的初始分布, 利用 (3.8) 式求出 $t=\Delta t$ 时段区域内各点 (不包括边界) 的 ξ 值。然后再应用 (3.9) 式反复迭代求出 Δt 时段区域内各点的 ψ 值, 直到相邻两次迭代值的最大差值不超过 10^{-6} 为止。根据边界条件, 边界上的 ψ 是已知的, 它们都等于零。

3) 按公式

$$\xi_{i,j} = \frac{1}{\Delta r_j} - \frac{\psi_{j-2}}{2\Delta r_j^2 r_{j-1}}$$

求出固壁上的涡量 (其他边界上的涡量都是给定的), 然后再由 (3.6) 式求出 u, v 。至此, $t=\Delta t$ 时段的物理量全部求出。

4) 重复上述过程就可以求出 $2\Delta t, 3\Delta t, \dots$ 的解, 一直到相邻两时段总涡量的相对差不超过 3×10^{-8} 为止, 这时我们认为已经达到定常状态。

利用上述方法我们进行了数值计算。取 $\lambda=2, Re=24.5$, 将 x 方向等分为 201 点, r 方向等分为 41 点, Δt 取 0.01 秒, 并选小雷诺数时的解为初值, 松弛因子取 1.75。计算实践表明,

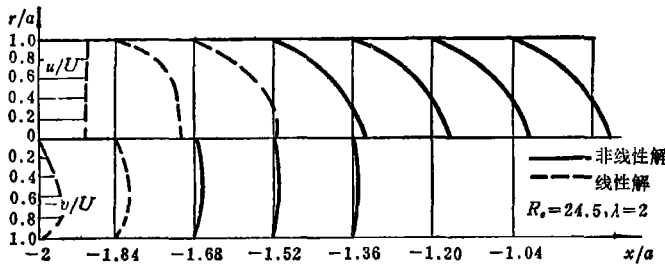


图 7

同时画出了线性解以资比较。

此图清楚地说明, 当 $Re=24.5$ 时, 非线性解和线性解相差很小, 最大偏差发生在自由面

解很快趋于定常状态。经过四个时段后, 相邻两时段最大涡量的相对误差已小于 0.003, 此时相邻两时段的所有物理量已有三位小数是重合的。这时我们认为所得的就是定常解。

图 7 中我们画出了 $Re=24.5, \lambda=2$ 时非线性解的速度剖面,

上, 其他地方几乎完全重合. 由此可见, 在所研究问题的 Re 范围内, 惯性效应可忽略不计.

表2我们列出了 $Re=24.5, \lambda=2$ 时计算出来的 u, v, ψ 值(主要是弯月面附近一倍管径处的数据). 非线性问题解对 r 轴是不对称的, 但不对称性很弱, 所以只引出上弯月面处的数据.

四、结 论

1. 上下弯月面附近是一个强回流区. 最大回流速度可达平均速度的57%左右.

2. 回流区即自由面的影响区主要集中在离自由面一倍管径的地方, 出了这个区域基本上是泊肃叶流动.

3. 弯月面的形状几乎不受回流的影响. 上弯月面和静止时几乎一样, 下弯月面形状应根据重力及泊肃叶压力进行修正.

4. 非线性惯性效应不大, $Re \leq 24.5$ 时可忽略不计.

本文在完成过程中得到了谈镐生教授亲切的关怀和热情的鼓励, 作者向他致以深切的谢意. 此外, 作者还和徐建军, 贾复, 彭荣苏等同志进行过多次有益的讨论. 本文的实验是在翁维良、钱穆英等大夫的大力协助下在中医研究院西苑医院进行的. 在此, 作者向他们一并致谢.

参 考 文 献

1. Lew, H. S. and Fung, Y. C., *Biorheology* 6, (1969), 109—119.
2. Roache, P. J., *Computational Fluid Dynamics* (1972).

The Motion of Viscous Liquid Cylinder with Finite Length in a Vertical Capillary Tube

Wu Wang-yi

Qian Min-quan

(Department of Mechanics, Beijing University, Beijing)

(Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing)

Wen Gong-bi

(Department of Mechanics, Beijing University, Beijing)

Abstract

This paper deals with the motion of viscous liquid column with finite length and two free surfaces in a vertical straight capillary tube. It is assumed that the fluid is Newtonian. Linearizing the boundary conditions, analytic expressions in the form of infinite series have been obtained for velocity, pressure and free surface at low Reynolds number. The numerical calculation is carried out for a set of the cylinder's length of water and blood. It has been revealed that there are considerable circulating currents at the upper and lower meniscuses. Its maximum velocity is about 57% of the average velocity of the mainstream. Inertial effect is also studied in this paper. Using the time-dependent method in finite-difference techniques, numerical solutions of the corresponding nonlinear equation at $Re=24.5$ are computed. Comparing it with the analytic exact solution at low Reynolds number shows that inertia! effect is negligible providing $Re \leq 24.5$.