应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

从给定的旋度函数和散度函数构造矢量场*

李春宝

（大连海运学院，1980年4月16日收到）

摘　要

一、与经典解法不同，本文从不同的思路给出新的求解方程组 $\nabla\times\vec{E}=\vec{\omega}$，$\nabla\cdot\vec{E}=P$的公式.

二、给出构造具有指定旋度函数和散度函数的矢量场的方法.

本文从两个方面进行探讨：其一是给定矢量场的旋度函数后，矢量场的空间分布如何；其二是用什么样的方法可以构造出具有指定旋度函数和散度函数的矢量场．关于前者实际上是求解 $\nabla\times\vec{E}=\vec{\omega}$，$\nabla\cdot\vec{E}=P$型方程组的问题．这种方程组在历史上的经典解法是利用亥姆霍兹的矢量场分解法和诺埃曼问题来求解[1][2][3]，在这种解法中，把解分为三部分：有旋无散场，有散无旋场和无旋无散场．在求解过程中，需要解四个波阿松方程和一个诺埃曼边值问题．本文从另一思路出发，利用本质完全不同的旋度函数和散度函数的转化，找出把给定旋度函数转换为另一散度函数的规律，用这样得到的散度函数修正原来给定的散度，从而建立一个新的有势场．利用这一新建的有势场可使求解简化，从而适于使用数字计算机进行离散的数值计算.在求解过程中，只需解一次泊松方程．

关于后者，在本文的推论中，给出了构造具有指定旋度函数的矢量场的方法，这对于通过人工综合产生指定强度的涡旋提供了可能性.

一、由旋度函数和散度函数确定的方程组及其解

1. 方程组：

$$\nabla\times\vec{E}=\vec{e}_1\omega_1+\vec{e}_2\omega_2+\vec{e}_3\omega_3=\vec{\omega} \tag{1.1}$$

$$\nabla\cdot\vec{E}=P \tag{1.2}$$

方程组的边值条件为

$$E_{sn}=f(M) \tag{1.3}$$

式中：$\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$、$\vec{e}_3$ 为直角坐标轴的单位矢量，

M为定义域边界面上的点，

* 钱伟长推荐.

E_{sn}为边界面上场的法向分量，
$\vec{\omega}$为旋度函数，
P为散度函数，
$f(M)$为已知函数，且适合条件：

$$\int_s f(M)\,ds=\int_V PdV \tag{1.4}$$

函数$\vec{\omega}$适合条件：

$$\nabla\cdot\vec{\omega}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\omega_i}{\partial x_i}=0 \tag{1.5}$$

2. 方程组的解：

方程组(1.1)及(1.2)、在(1.3)的边值条件下 有唯一的解，其解为：

$$\vec{E}=\nabla\phi'+\vec{e}_j\int\omega_k dx_i+\vec{e}_k\int-\omega_j dx_i+\nabla\phi \tag{1.6}$$

式中：

$$\left.\begin{aligned}&i=1\text{或}2\text{或}3,\ \text{在}1,2,3\text{中任取一值}\\&j=i+1\qquad j>3\text{时}\quad\text{模 3 取值}\\&k=j+1\qquad k>3\text{时}\quad\text{模 3 取值}\end{aligned}\right\} \tag{1.7}$$

ϕ'为下式泊松方程的解：

$$\nabla^2\phi'=P-\int\left(\frac{\partial\omega_k}{\partial x_j}-\frac{\partial\omega_j}{\partial x_k}\right)dx_i \tag{1.8}$$

ϕ为诺埃曼问题的解。

二、证 明

1. 求满足(1.1)及(1.2)的特解：

(1.1)及(1.2)式的展开为

$$\frac{\partial E_3}{\partial x_2}-\frac{\partial E_2}{\partial x_3}=\omega_1 \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial E_1}{\partial x_3}-\frac{\partial E_3}{\partial x_1}=\omega_2 \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial E_2}{\partial x_1}-\frac{\partial E_1}{\partial x_2}=\omega_3 \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial E_1}{\partial x_1}+\frac{\partial E_2}{\partial x_2}+\frac{\partial E_3}{\partial x_3}=P \tag{2.4}$$

寻求一个标量函数$\phi'(X_1,X_2,X_3)$使

$$E_i=\frac{\partial\phi'}{\partial x_i} \tag{2.5}$$

则
$$\frac{\partial E_i}{\partial x_i}=\frac{\partial^2\phi'}{\partial x_i^2} \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial E_i}{\partial x_j}=\frac{\partial^2\phi'}{\partial x_j\partial x_i} \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial E_i}{\partial x_k}=\frac{\partial^2\phi'}{\partial x_k\partial x_i} \tag{2.8}$$

式中 i、j、k按(1.7)取值

当下标i在1、2、3中取定一值后，j及k的值也相继确定，在(2.1)，(2.2)，(2.3)中，下标用文字代替可写成如下形式：

$$\frac{\partial E_k}{\partial x_j}-\frac{\partial E_j}{\partial x_k}=\omega_i \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial E_i}{\partial x_k}-\frac{\partial E_k}{\partial x_i}=\omega_j \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial E_j}{\partial x_i}-\frac{\partial E_i}{\partial x_j}=\omega_k \tag{2.11}$$

由(2.11)式

$$\frac{\partial E_j}{\partial x_i}=\omega_k+\frac{\partial E_i}{\partial x_j}$$

∴
$$E_j=\int\omega_k dx_i+\int\frac{\partial E_i}{\partial x_j}dx_i$$

将(2.5)式代入，得

$$E_j=\int\omega_k dx_i+\int\frac{\partial^2\phi'}{\partial x_j\partial x_i}dx_i$$

$$E_j=\int\omega_k dx_i+\frac{\partial\phi'}{\partial x_j} \tag{2.12}$$

求特解，积分常数取零

由(2.10)式

$$\frac{\partial E_k}{\partial x_i}=-\omega_j+\frac{\partial E_i}{\partial x_k}$$

$$E_k=\int-\omega_j dx_i+\int\frac{\partial E_i}{\partial x_k}dx_i$$

$$E_k=\int-\omega_j dx_i+\frac{\partial\phi'}{\partial x_k} \tag{2.13}$$

积分常数取零

由(2.12)式，得

$$\frac{\partial E_j}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}\int\omega_k dx_i+\frac{\partial^2\phi'}{\partial x_j^2}$$

$$\frac{\partial E_j}{\partial x_j}=\int\frac{\partial\omega_k}{\partial x_j}dx_i+\frac{\partial^2\phi'}{\partial x_j^2}\tag{2.14}$$

$$\frac{\partial E_j}{\partial x_k}=\frac{\partial}{\partial x_k}\int\omega_k dx_i+\frac{\partial^2\phi'}{\partial x_k\partial x_j}$$

$$\frac{\partial E_j}{\partial x_k}=\int\frac{\partial\omega_k}{\partial x_k}dx_i+\frac{\partial^2\phi'}{\partial x_k\partial x_j}\tag{2.15}$$

由(2.13)式

$$\frac{\partial E_k}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}\int-\omega_j dx_i+\frac{\partial^2\phi'}{\partial x_j\partial x_k}$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial x_j}=-\int\frac{\partial\omega_j}{\partial x_j}dx_i+\frac{\partial^2\phi'}{\partial x_j\partial x_k}\tag{2.16}$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial x_k}=\frac{\partial}{\partial x_k}\int-\omega_j dx_i+\frac{\partial^2\phi'}{\partial x_k^2}$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial x_k}=-\int\frac{\partial\omega_j}{\partial x_k}dx_i+\frac{\partial^2\phi'}{\partial x_k^2}\tag{2.17}$$

据(2.15)式和(2.16)式

$$\frac{\partial E_k}{\partial x_j}-\frac{\partial E_j}{\partial x_k}=-\int\left(\frac{\partial\omega_j}{\partial x_j}+\frac{\partial\omega_k}{\partial x_k}\right)dx_i$$

将(1.5)式中的下标用字母代替，可得

$$\frac{\partial\omega_i}{\partial x_i}+\frac{\partial\omega_j}{\partial x_j}+\frac{\partial\omega_k}{\partial x_k}=0$$

即

$$\frac{\partial\omega_i}{\partial x_i}=-\left(\frac{\partial\omega_j}{\partial x_j}+\frac{\partial\omega_k}{\partial x_k}\right)$$

∴

$$\frac{\partial E_k}{\partial x_j}-\frac{\partial E_j}{\partial x_k}=\int\frac{\partial\omega_i}{\partial x_i}dx_i=\omega_i\tag{2.18}$$

这一等式也就是旋度方程中的(2.9)式，可见由(2.5)式，(2.12)式和(2.13)式确定的E_i、E_j、E_k满足旋度方程的展开式(2.9)，(2.10)和(2.11)。

将(2.6)，(2.14)，(2.17)三式边边相加，得

$$\frac{\partial E_i}{\partial x_i}+\frac{\partial E_j}{\partial x_j}+\frac{\partial E_k}{\partial x_k}=\frac{\partial^2\phi'}{\partial x_i^2}+\frac{\partial^2\phi'}{\partial x_j^2}+\frac{\partial^2\phi'}{\partial x_k^2}+\int\frac{\partial\omega_k}{\partial x_j}dx_i-\int\frac{\partial\omega_j}{\partial x_k}dx_i$$

即

$$\frac{\partial E_i}{\partial x_i}+\frac{\partial E_j}{\partial x_j}+\frac{\partial E_k}{\partial x_k}=\nabla^2\phi'+\int\left(\frac{\partial\omega_k}{\partial x_j}-\frac{\partial\omega_j}{\partial x_k}\right)dx_i\tag{2.19}$$

为使E_i、E_j、E_k满足散度方程(1.2)，需

$$\frac{\partial E_i}{\partial x_i}+\frac{\partial E_j}{\partial x_j}+\frac{\partial E_k}{\partial x_k}=P$$

将(2.19)式代入上式　得

$$\nabla^2\phi'+\int\left(\frac{\partial\omega_k}{\partial x_j}-\frac{\partial\omega_j}{\partial x_k}\right)dx_i=P$$

即 $\nabla^2\phi'=P-\int\left(\frac{\partial\omega_k}{\partial x_j}-\frac{\partial\omega_j}{\partial x_k}\right)dx_i$ (2.20)

由上式可知．在(2.5)式中欲寻求的函数ϕ'乃是波阿松方程(2.20)的解．

这样，由(2.20)式解出ϕ'，代入于(2.5)，(2.12)，(2.13)三式，即可求出E_i，E_j，E_k，这三个分量满足(1.1)及(1.2)方程组．

令

$$\vec{E}'=\vec{e}_iE_i+\vec{e}_jE_j+\vec{e}_kE_k$$

则

$$\vec{E}=\vec{e}_i\frac{\partial\phi'}{\partial x_i}+\vec{e}_j\left(\frac{\partial\phi'}{\partial x_j}+\int\omega_kdx_i\right)+\vec{e}_k\left(\frac{\partial\phi'}{\partial x_k}-\int\omega_jdx_i\right)$$

$$\vec{E}=\nabla\phi'+\vec{e}_j\int\omega_kdx_i-\vec{e}_k\int\omega_jdx_i \quad (2.21)$$

(2.21)式即为满足给定方程组(1.1)及(1.2)的特解，称为滤过旋度散度场．

2．求满足给定边值条件的全解：

(2.21)式给出的矢量场$\vec{E}'$只是全解$\vec{E}$中的一部分，从$\vec{E}$中滤除掉$\vec{E}'$以后，将既无旋度，也无散度，以$\vec{E}''$表示之，

$$\vec{E}''=\vec{E}-\vec{E}'$$

由于$\vec{E}''$场的无旋无散性，必有

$$\vec{E}''=\nabla\phi \quad (2.22)$$

又因 $\nabla\cdot\vec{E}''=0$

∴ $\nabla^2\phi=0$ (2.23)

由于已给定边界面上场的法向分量，由此可定出$\frac{\partial\phi}{\partial n}$ 所以求解$\vec{E}''$的问题就是熟知的求解诺埃曼问题．这里，这个问题是恒有解的，因为有解的充要条件：

$$\int_s\vec{E}''_{sn}ds=\int_s\vec{E}_{sn}ds-\int_s\vec{E}'_{sn}ds=0$$

是满足的．式中

$\vec{E}_{sn}$为全解$\vec{E}$在边界面上的法向分量，

$\vec{E}'_{sn}$为滤过旋度散度场在边界面上的法向分量，

$\vec{E}''_{sn}$为无旋无散场在边界面上的法向分量，

于是(2.22)式恒可通过解诺埃曼问题得到解答$\vec{E}''$，

$$\vec{E}=\vec{E}'+\vec{E}''$$

$$\vec{E}=\nabla\phi'+\vec{e}_j\int\omega_kdx_i+\vec{e}_k\int-\omega_jdx_i+\nabla\phi \quad (1.6)$$

命题得证．

三、推　　论

分析(2.21)式，可以看出$\vec{E}'$包含两部分：一部分是有势场$\nabla\phi'$，另一部分是与jk平面平

行的旋度散度场,

$$\vec{e}_j\int\omega_k dx_i-\vec{e}_k\int\omega_j dx_i$$

推论 1：

给定旋度$\vec{\omega}$和散度P的矢量场，可由一个有势场$\nabla\phi'$和另一个只具二维分量且与jk平面平行的旋度散度场$\left[\vec{e}_j\int\omega_k dx_i-\vec{e}_k\int\omega_j dx_i\right]$综合而成，前者的散度较给定散度$P$有所减少，其减少量为$\int\left(\dfrac{\partial\omega_k}{\partial x_j}-\dfrac{\partial\omega_j}{\partial x_k}\right)dx_i$. 所减少的散度值移于后一部分的旋度散度场中，作为该部分场的散度，而该部分场的旋度等于给定的旋度$\vec{\omega}$.

推论 2：

给定旋度$\vec{\omega}$的涡旋场可由一个有势场$\nabla\phi'$和另一个只具二维分量且与jk平面平行的旋度散度场

$$\left[\vec{e}_j\int\omega_k dx_i-\vec{e}_k\int\omega_j dx_i\right]\text{综合而成.}$$

前者即有势场的散度为$-\int\left(\dfrac{\partial\omega_k}{\partial x_j}-\dfrac{\partial\omega_j}{\partial x_k}\right)dx_i$

而后者的散度为$+\int\left(\dfrac{\partial\omega_k}{\partial x_j}-\dfrac{\partial\omega_j}{\partial x_k}\right)dx_i$, 旋度为$\vec{\omega}$.

参 考 文 献

1. Coffin, J. G., *Vector Analysis*, New York, U. S. A. (1911).
2. Кочин, Н. Е., *Векторное Исчисление и Начала Тензорного Исчисления*, (1951) (Издательство Академии Наук СССР)
3. 复旦大学数学系编，《流体力学》，上海科学技术出版社，(1960).

To Construct a Vector Field with Given Curl Function and Divergence Function

Li Chun-bao

(Dalian Marine Transport Institute, Liaoning)

Abstract

In the first part of this paper, a formal solution of the equations $\nabla\times\vec{E}=\vec{W}$, $\nabla\cdot\vec{E}=P$ has been derived with different point of view from commonly known classical method developed by Helmholtz[1][2][3].

In the second part of this paper, a method to construct a vector field with given curl function and divergence function has been given in terms of the above solution.