

## 弯曲血管涡旋分离区的确定\*

吴望一 温功碧

(北京大学力学系, 1981年4月3日收到)

### 摘 要

弯曲血管中动脉粥样硬化和涡旋区的产生密切相关. 本文在牛顿粘性不可压缩流体作定常层流运动的前提下, 采用动量积分关系式方法和准常曲率的概念. 对曲率小, 曲率变化不太大的弯曲血管, 得到了确定分离点和再附点位置的方程. 据此可确定最早分离的地方及对应的临界雷诺数以及对不同方位角分离点和再附点依赖于雷诺数  $Re$  的曲线. 分析所得结果表明, 分离首先发生在曲率变化最剧烈的最外侧(或最内侧), 随着  $Re$  数的增加分离区向主流的上下游. 方位角和矢径方向延伸从而形成三维的分离泡, 分离泡在三个方向上的尺寸随着  $Re$  数的增加不断地扩大. 本文所得的结果还从理论上阐明了实验观察到的下述饶有趣味的事实: 对于对称的弯曲血管, 如果在上游外侧有一分离泡, 则在下游内侧与其对称的地方必有另一分离泡存在.

### 一、引 言

患有动脉粥样硬化症的病人的病理解剖表明在主动脉弓的弯曲部位常常发现有粥样斑块. 它的产生是和血液流过此处产生涡旋分离泡密切相关. 因此对于曲率变化的弯曲血管而言, 研究在什么条件下什么部位处会产生分离泡, 分离泡的大小如何, 对于判断动脉粥样硬化的易发部位无疑地是很有帮助的. 文献[1]对水流过有自由面的弯曲明渠时的流动状态进行了实验观察, 发现在一定雷诺数下产生了如图所示的两个相当对称的分离泡, 一个在上游外侧, 一个在与之对称的下游内侧, 并认为这种流动图案也会在圆管内呈现. 弯管内涡旋的产生是和变曲率引起的二次流强度的变化及逆压梯度紧密相关. 弯曲血管中涡旋分离区的理论确定, 由于问题的复杂性, 就我们所知还没有人研究过. 本文试图给出初步的理论分析.

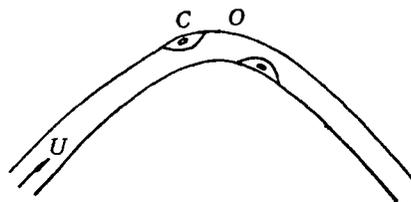


图 1

考虑血液在弯曲血管内的流动. 假设: 1) 血液是不可压缩的均质牛顿液体. 2) 运动是定常层流. 3) 弯曲血管每一个横截面都是半径不变的圆, 且圆心的联接曲线——中心线

\* 朱照宣推荐.

是平面曲线, 其曲率  $K$  依赖于弧长  $s$  的函数关系为  $K=K(s)$ . 4) 中心线的曲率半径  $R$  比圆管的半径大得多. 5) 曲率  $K$  沿  $s$  的变化不太大. 本文的中心任务是研究由于二次流的变化引起的涡旋分离. 在上述提法下要准确地求出分析解是非常困难的, 下面我们采用准常曲率近似和积分关系式方法相结合的近似方法, 其主要步骤可简述如下: 先采用积分关系式方法研究常曲率  $K=\text{const}$  的情形, 得到所需的结果, 然后将此结果用到变曲率血管中去, 认为在条件 5) 下即曲率变化不太大的情形下, 对每一横截面都可采用常曲率的结果. 采用这样的方法我们得到了形式十分简单的确定分离泡位置的方程. 积分关系式方法在边界层理论中是众所周知的. 首先把它应用到血流动力学中去的是 Forrester 和 Young, 他们在 [2] 中采用此法研究了收缩血管的分离区问题, 得到了定性上和实验趋势一致的结果. 本文在弯曲血管中全面地应用了积分关系式方法, 得到了简单明了的结果, 并首先从理论上阐明了分离首先出现在曲率变化最剧烈的地方以及对称血管中分离泡成对出现的奇妙现象.

## 二、积分关系式方法

首先考虑常曲率弯管即  $K=\text{常数}$  的情形. 采用图 2 所示的曲线坐标系  $r, \psi, \theta$ . 在此坐标系中取半径  $a'$ , 平均速度  $U$  和  $\rho U^2$  为长度, 速度和压力的特征量, 其中  $\rho$  为流体的密度. 在假设 1), 2) 下无量纲形式的基本方程组为:

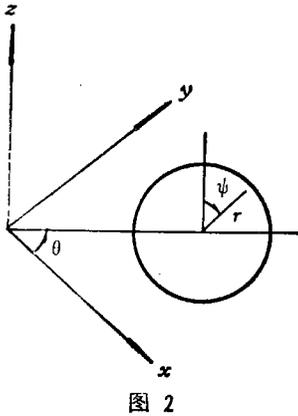


图 2

$$\begin{aligned} & \frac{Re}{2} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r v_\theta) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \frac{1}{r} v_\theta v_\psi \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{v_\theta^2}{R+r \sin \psi} \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{2v_r v_\theta}{R+r \sin \psi} \sin \psi + \frac{2v_\theta v_\psi}{R+r \sin \psi} \cos \psi \right] \\ & = -\frac{Re}{2} \frac{1}{R+r \sin \psi} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{2 \sin \psi}{(R+r \sin \psi)^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \\ & \quad + \frac{2 \cos \psi}{(R+r \sin \psi)^2} \frac{\partial v_\psi}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \\ & \quad + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \psi^2} + \frac{\sin \psi}{R+r \sin \psi} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{(R+r \sin \psi)^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} \\ & \quad + \frac{\cos \psi}{r(R+r \sin \psi)} \frac{\partial v_\theta}{\partial \psi} - \frac{v_\theta}{(R+r \sin \psi)^3} \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{Re}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (v_r v_\psi) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \frac{v_r^2}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{v_\theta v_\psi}{R+r \sin \psi} \right) + \frac{2v_r v_\psi}{r} \right. \\ & \quad \left. - \frac{v_\theta^2}{R+r \sin \psi} \cos \psi + \frac{v_r v_\psi \sin \psi}{R+r \sin \psi} + \frac{v_\psi^2 \cos \psi}{R+r \sin \psi} \right] \\ & = -\frac{Re}{2} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \psi} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \psi} - \frac{v_r \sin \psi \cos \psi}{(R+r \sin \psi)^2} + \frac{v_r \cos \psi}{r(R+r \sin \psi)} + \frac{\partial^2 v_\psi}{\partial r^2} \\ & \quad + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\psi}{\partial \psi^2} + \frac{\sin \psi}{R+r \sin \psi} \frac{\partial v_\psi}{\partial r} + \frac{1}{(R+r \sin \psi)^2} \frac{\partial^2 v_\psi}{\partial \theta^2} \end{aligned}$$

$$+ \frac{\cos \psi}{r(R+r \sin \psi)} \frac{\partial v_{\psi}}{\partial \psi} - \frac{v_{\psi}}{r^2} - \frac{v_{\psi} \cos^2 \psi}{(R+r \sin \psi)^2} - \frac{2 \cos \psi}{(R+r \sin \psi)^2} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{Re}{2} \left[ \frac{\partial v_r^2}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \frac{v_r v_{\psi}}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{v_r v_{\theta}}{R+r \sin \psi} \right) + \frac{v_r^2 - v_{\theta}^2}{r} \right. \\ & \left. - \frac{v_{\theta}^2 \sin \psi}{R+r \sin \psi} + \frac{v_r^2 \sin \psi}{R+r \sin \psi} + \frac{v_r v_{\psi} \cos \psi}{R+r \sin \psi} \right] \\ & = -\frac{Re}{2} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \psi^2} + \frac{\sin \psi}{R+r \sin \psi} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\cos \psi}{r(R+r \sin \psi)} \frac{\partial v_r}{\partial \psi} \\ & + \frac{1}{(R+r \sin \psi)^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{v_r}{r^2} - \frac{v_r \sin^2 \psi}{(R+r \sin \psi)^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_{\psi}}{\partial \psi} \\ & - \frac{v_{\psi} \sin \psi \cos \psi}{(R+r \sin \psi)^2} - \frac{v_{\psi} \cos \psi}{r(R+r \sin \psi)} - \frac{2 \sin \psi}{(R+r \sin \psi)^2} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} \quad (2.3) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_{\psi}}{\partial \psi} + \frac{1}{R+r \sin \psi} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{v_r \sin \psi}{R+r \sin \psi} + \frac{v_{\psi} \cos \psi}{R+r \sin \psi} + \frac{v_r}{r} = 0 \quad (2.4)$$

其中  $v_r, v_{\theta}, v_{\psi}$  是  $r, \theta, \psi$  方向的速度分量,  $p$  是压力,  $R$  是曲率半径, 现在是常数,

$Re = \frac{2a'U}{\nu}$ , 其中  $\nu$  是粘性系数,  $a'$  是圆管半径. 除此之外, 还满足:

$$r=1 \quad v_r=v_{\psi}=v_{\theta}=0$$

的边界条件.

我们采用积分关系式方法. 首先推导主流  $\theta$  方向的动量方程. 由假设 4),  $\frac{1}{R}$  是小量, 记为  $o(\epsilon)$ , 于是我们有以下量阶估计:

$$\frac{1}{R} \sim o(\epsilon), \quad v_{\theta} \sim o(1), \quad v_r \sim o(\epsilon), \quad v_{\psi} \sim o(\epsilon), \quad \frac{\partial v_{\theta}}{R \partial \theta} \sim o(\epsilon)$$

对 (2.1) 式中各项进行量阶估计并且只保留一阶主要项得:

$$-\frac{Re}{2} \frac{1}{R+r \sin \psi} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} \right) = 0 \quad (2.5)$$

将压力函数写成主流压力  $p_0(\theta)$  和二次流压力  $p_1'(r, \theta, \psi)$  之和. 不难看出, 在假设 4) 下,  $p_1'$  中的  $\psi$  可以  $\sin \psi$  的形式分离出来, 于是:

$$p_1'(r, \theta, \psi) = p_1''(r, \theta) \sin \psi \quad (2.6)$$

现在更进一步假设,  $p_1''(r, \theta)$  可分离变量, 即  $p_1''(r, \theta) = p_1(\theta) f(r)$ , 于是我们有:

$$p = p_0(\theta) + p_1(\theta) f(r) \sin \psi \quad (2.7)$$

对方程 (2.5) 中各项进行积分运算  $\int_0^{2\pi} \int_0^1 \dots r dr d\psi$ , 得:

$$-\frac{Re}{2} \frac{\pi}{R} \frac{dp_0}{d\theta} + \int_0^{2\pi} \left. \frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} \right|_{r=1} d\psi = 0 \quad (2.8)$$

这就是  $\theta$  方向的动量方程.

仿照 Forrester-Young 的做法, 将速度剖面  $v_\theta$  选为四次多项式:

$$v_\theta/v_{\theta\max} = A\zeta + B\zeta^2 + C\zeta^3 + D\zeta^4 + E \quad (2.9)$$

其中  $v_{\theta\max}$  是  $v_\theta$  在截面上的最大速度,  $\zeta=1-r$ , 系数  $A, B, C, D, E$  由下列五个边界条件确定:

$$\zeta=0: v_\theta=0 \quad (2.10)$$

$$\zeta=0: \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} = \frac{Re}{2} \frac{1}{R} \frac{dp_0}{d\theta} + \frac{1}{2} \frac{dP_1}{Rd\theta} \sin\psi \quad (2.11)$$

$$\zeta=1: v_\theta=v_{\theta\max} \quad (2.12)$$

$$\zeta=1: \frac{\partial v_\theta}{\partial r} = 0 \quad (2.13)$$

$$\zeta=1: \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} = -2v_{\theta\max} \quad (2.14)$$

其中  $P_1 = Re f(1) p_1$ , (2.12)–(2.14) 式是根据  $v_\theta$  在轴线附近可以近似地用 Poiseuille 剖面  $v_{\theta\max}(1-r^2)$  代替得来的 (根据假设 4) 忽略的是小量. 根据 (2.10)–(2.14) 确定出  $A, B, C, D, E$ , 并将其代入 (2.9) 式得:

$$v_\theta/v_{\theta\max} = -\frac{1}{7}\zeta(1-\zeta)^3\lambda + \frac{\zeta}{7}(10+5\zeta-12\zeta^2+4\zeta^3) \quad (2.15)$$

其中

$$\lambda = \frac{Re}{2} \frac{1}{v_{\theta\max}} \frac{1}{R} \frac{dp_0}{d\theta} + \frac{1}{2} \frac{1}{v_{\theta\max}} \frac{1}{R} \frac{dP_1}{d\theta} \sin\psi \quad (2.16)$$

将 (2.15) 式沿横截面积分得:

$$Q = \pi = -\frac{\pi Re}{210} \frac{dp_0}{Rd\theta} + \frac{97}{210} \pi v_{\theta\max}$$

由此推出:

$$v_{\theta\max} = \frac{210}{97\pi} \left[ \pi + \frac{\pi Re}{210} \frac{dp_0}{Rd\theta} \right] \quad (2.17)$$

现利用  $\theta$  方向的动量方程 (2.8) 确定,  $\frac{dp_0}{Rd\theta}$ , 利用 (2.15) 式易得:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \Big|_{r=1} d\psi = \frac{\pi Re}{7} \frac{dp_0}{dx} - \frac{20\pi}{7} v_{\theta\max} \quad (2.18)$$

将 (2.18) 式代入 (2.8) 式并考虑到 (2.17) 式有:

$$-\frac{dp_0}{Rd\theta} = \frac{16}{Re} \quad (2.19)$$

于是 (2.17) 式变为:

$$v_{\theta\max} = 2 \quad (2.20)$$

考虑到 (2.19), (2.20) 式, (2.15) 式化为:

$$v_\theta = 2\zeta(2-\zeta) - \frac{1}{14}\zeta(1-\zeta)^3 \frac{dP_1}{ds} \sin\psi \quad (2.21)$$

其中  $s=R\theta$ .

要使 (2.21) 式完全确定下来, 还必须求出参数  $\frac{dP_1}{ds}$  和  $s$  的关系, 它由 (2.2) 和 (2.3) 式联合给出的  $v_r + v_\psi$  的动量方程确定.

在 (2.2) 式和 (2.3) 式中忽略高阶项只保留  $o(\epsilon)$  的项得:

$$\begin{aligned} \frac{Re}{2} \frac{\partial}{\partial s} (rv_\theta v_\psi) &= -\frac{Re}{2} \frac{\partial p}{\partial \psi} + \left[ \frac{\partial^2(rv_\psi)}{\partial s^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_\psi}{\partial r} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v_\psi}{\partial \psi^2} - \frac{v_\psi}{r} + \frac{2}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \psi} \right] + \frac{Re}{2} \frac{rv_\theta^2}{R} \cos\psi \\ \frac{Re}{2} \frac{\partial}{\partial s} (rv_\theta v_r) &= -\frac{Re}{2} r \frac{\partial p}{\partial r} + \left[ \frac{\partial^2(rv_r)}{\partial s^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v_\psi}{\partial \psi^2} - \frac{v_r}{r} - \frac{2}{r} \frac{\partial v_\psi}{\partial \psi} \right] + \frac{Re}{2} \frac{rv_\theta^2}{R} \sin\psi \end{aligned}$$

令  $v_\psi = v_{\psi_1} \cos\psi$ ,  $v_r = v_{r_1} \sin\psi$ , 并考虑到 (2.7) 式有:

$$\begin{aligned} \frac{Re}{2} \frac{\partial}{\partial s} (rv_\theta v_{\psi_1}) &= -\frac{Re}{2} p_1 f(r) + \left[ \frac{\partial^2(rv_{\psi_1})}{\partial s^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_{\psi_1}}{\partial r} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2v_{\psi_1}}{r} + \frac{2v_{r_1}}{r} \right] + \frac{Re}{2} \frac{rv_\theta^2}{R} \\ \frac{Re}{2} \frac{\partial}{\partial s} (rv_\theta v_{r_1}) &= -\frac{Re}{2} r p_1 f'(r) + \left[ \frac{\partial^2(rv_{r_1})}{\partial s^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_{r_1}}{\partial r} \right) - \frac{2v_{r_1}}{r} + \frac{2v_{\psi_1}}{r} \right] + \frac{Re}{2} \frac{rv_\theta^2}{R} \end{aligned} \quad (2.22)$$

两式相加得:

$$\begin{aligned} \frac{Re}{2} \frac{\partial}{\partial s} [rv_\theta(v_{r_1} + v_{\psi_1})] &= -\frac{Re}{2} p_1 [f(r) + r f'(r)] \\ &\quad + \frac{\partial^2[r(v_{r_1} + v_{\psi_1})]}{\partial s^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \frac{\partial(v_{r_1} + v_{\psi_1})}{\partial r} \right] + Re \frac{rv_\theta^2}{R} \end{aligned} \quad (2.23)$$

对 (2.23) 式每一项进行积分运算  $\int_0^1 \dots dr$  得:

$$\begin{aligned} \frac{Re}{2} \frac{d}{ds} \int_0^1 rv_\theta(v_{r_1} + v_{\psi_1}) dr &= \frac{d^2}{ds^2} \int_0^1 r(v_{r_1} + v_{\psi_1}) dr \\ &\quad + \frac{\partial(v_{r_1} + v_{\psi_1})}{\partial r} \Big|_{r=1} - \frac{Re}{2} f(r) p_1 + \frac{Re}{R} \int_0^1 rv_\theta^2 dr \end{aligned} \quad (2.24)$$

这就是  $v_{r_1} + v_{\psi_1}$  满足的动量方程, 用来确定  $\frac{dP_1}{ds}$ .

在速度剖面  $v_{r_1} + v_{\psi_1}$  选三次多项式:

$$v_{r_1} + v_{\psi_1} = A'\zeta + B'\zeta^2 + C'\zeta^3 + D' \quad (2.25)$$

$A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $D'$  由下列四个条件确定:

$$\zeta=0: v_{r_1}+v_{\psi_1}=0 \quad (2.26)$$

$$\zeta=0: \frac{\partial^2}{\partial r^2}(v_{r_1}+v_{\psi_1})+\frac{\partial}{\partial r}(v_{r_1}+v_{\psi_1})=\frac{1}{2\gamma}P_1 \quad (2.27)$$

$$\zeta=1: v_{r_1}+v_{\psi_1}=0 \quad (2.28)$$

$$\zeta=1: \frac{\partial}{\partial r}(v_{r_1}+v_{\psi_1})=0 \quad (2.29)$$

其中  $\gamma = \frac{f(1)+f'(1)}{f(1)}$ . 由 (2.26)–(2.29) 式确定出  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $D'$ , 并将其代入 (2.25)

式得:

$$v_{r_1}+v_{\psi_1} = -\frac{1}{10\gamma}P_1\xi(1-\xi)^2 \quad (2.30)$$

为了计算 (2.24) 式中的各项, 我们用泊萧叶剖面  $2(1-r^2)$  近似地代替  $v_\theta$  (根据假设 4) 忽略的是小量), 并利用 (2.30) 式, 于是得:

$$\frac{d}{ds} \int_0^1 r v_\theta (v_{r_1}+v_{\psi_1}) dr = \frac{11}{2100} \frac{1}{\gamma} \frac{dP_1}{ds}$$

$$\frac{d^2}{ds^2} \int_0^1 r (v_{r_1}+v_{\psi_1}) dr = \frac{1}{200\gamma} \frac{d^2P_1}{ds^2}$$

$$\left. \frac{\partial(v_{r_1}+v_{\psi_1})}{\partial r} \right|_{r=1} = \frac{P_1}{10\gamma}$$

$$\int_0^1 r v_\theta^2 dr = 2/3$$

将之代入 (2.24) 式整理后得:

$$\frac{d^2P_1}{ds^2} - \frac{11}{21} Re \frac{dP_1}{ds} + (100\gamma - 20)P_1 = \frac{400}{3} \gamma \frac{Re}{R} \quad (2.31)$$

显然此方程有一特解:

$$P_1 = \frac{4\gamma}{3\gamma - 0.6} ReK \quad (2.32)$$

现在根据连续式方程 (2.4) 确定常数  $\gamma$ . 在方程 (2.4) 中忽略  $o(\varepsilon^2)$  以上项 得:

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial s} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\psi}{\partial \psi} + \frac{v_r}{r} = 0$$

$v_\theta$  取泊萧叶剖面 (根据假设 4) 忽略的是小量), 并考虑到  $v_\psi = v_{\psi_1} \cos \psi$ ,  $v_r = v_{r_1} \sin \psi$  有:

$$\frac{\partial v_{r_1}}{\partial r} + \frac{v_{r_1} - v_{\psi_1}}{r} = 0$$

对此式各项进行积分运算  $\int_0^1 dr$  得:

$$\int_0^1 \frac{v_{r_1} - v_{\psi_1}}{r} dr = 0 \quad (2.33)$$

和确定  $v_{r_1}+v_{\psi_1}$  的过程完全一样, 我们可以定出  $v_{r_1}-v_{\psi_1}$ , 它是:

$$v_{r_1} - v_{\psi_1} = \frac{P_1}{5} \left( 1 - \frac{1}{2\gamma} \right) \xi(1-\xi)^2$$

代入方程 (2.33), 得:

$$P_1 \left( 1 - \frac{1}{2\gamma} \right) = 0$$

因  $P_1$  一般来说不恒等于零, 由此推出:

$$\gamma = \frac{1}{2} \tag{2.34}$$

### 三、准常曲率近似

对于变曲率的弯曲血管, 我们采用准常曲率近似, 即在曲率变化不太大的情况下, 对于每一小段血管都用常曲率的结果, (2.21), (2.22) 和 (2.32), 于是我们有:

$$P_1 = \frac{4\gamma}{3\gamma - 0.6} ReK(s) \tag{3.1}$$

主流的速度剖面  $v_\theta$  为:

$$v_\theta = 2\xi(2-\xi) - 0.1587\xi(1-\xi)^3 ReK'(s) \sin\psi \tag{3.2}$$

由  $\frac{\partial v_\theta}{\partial r} \Big|_{r=r_1} = 0$  得到确定分离点和再附点的方程为:

$$4 - 0.1587 ReK'(s) \sin\psi = 0 \tag{3.3}$$

### 四、结果和分析讨论

在对 (3.3) 式进行一般性的分析, 以图 1 所示的对称弯管为例, 设  $s=0$  是对称面, 则  $K(s)$   $K'(s)$  的示意图在图 3, 图 4 中表出. 显见,  $K(s)$ ,  $K'(s)$  对纵轴是对称的和反对称的. 我们看到:

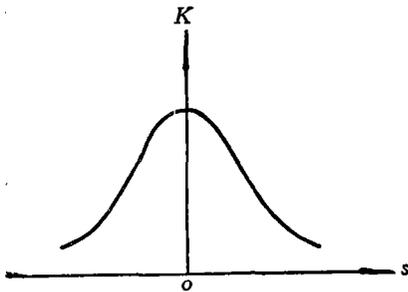


图 3

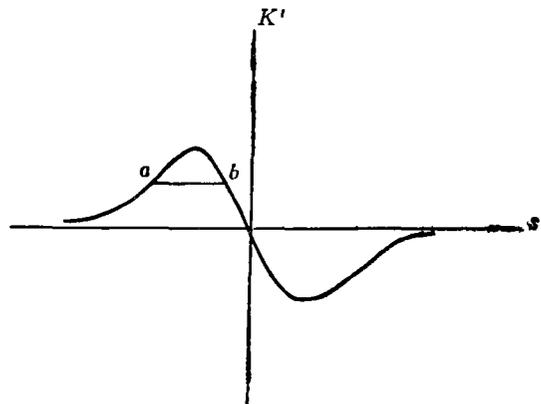


图 4

1) 分离与否以及分离点的位置依赖于  $K'(s)$ , 而不是  $K(s)$ , 即依赖于二次流的变化而不是依赖二次流本身. 对于常曲率的弯管  $K'(s)=0$ , 流动不会分离. 如果曲率变化不大, 那么在层流范围内弯管的流动也可能不发生分离. 由此可以推出,  $Re$  数不大的中小型血管

中的流动只要曲率变化不太剧烈一般说来不会发生分离。最可能发生分离的是  $Re$  很大，曲率变化又很显著的大血管，例如主动脉弓。

2) 主流首先在  $K'(s)$  取极大值即曲率变化最剧烈的地方  $C$  分离，而不是在  $K(s)$  取极大值的地方 ( $O$  处)。在对称面左边分离发生在外侧 ( $\sin\psi > 0, K'(s) > 0, K'(s)\sin\psi > 0$ ) 而决不会在内侧，而且首先发生在最外侧 ( $\psi = \pi/2$ )。而在对称面右边则分离一定发生在内侧 ( $\sin\psi < 0, K'(s) < 0, K'(s)\sin\psi > 0$ )，而决不会在外侧，而且首先发生在最内侧 ( $\psi = -\pi/2$ )。

3) 由图 4 可见，主流在  $a$  处分离后，在到达对称轴之前一定在  $b$  处再附，也就是说分离泡在对称轴一侧完成分离和再附的全过程。

4) 随着  $Re$  数和  $K'$  的增长，分离泡在  $s$  方向和  $\psi$  方向的尺度不断扩大。在  $\psi$  方向，分离泡的位置最多不会超过  $\psi = 0$  和  $\psi = \pi$ ，即分离泡局限在半圆  $0 \leq \psi \leq \pi$  或半圆  $\pi \leq \psi \leq 2\pi$  内。

5) 由于  $K'(s)$  和  $\sin\psi$  的反对称性，如果在对称面左边上游外侧处存在一分离泡，则在对称面右边下游内侧与其对称的地方必有另一分离泡存在 (参看图 1)。公式 (3.3) 所揭示的这一理论结果和实验观察到的事实完全符合，从而从理论上阐明了对称弯曲血管中这一奇妙的分离泡成对出现的现象。

为了具体地确定不同  $K'(s)$  下开始发生分离的临界雷诺数，以及分离泡随  $Re$  数的发展情形，我们考察圆心连线是椭圆形的弯曲血管。设椭圆的方程为  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，其中  $a$ ， $b$  为长短半轴，则  $K'(s) = 3a^6b^6(a^2 - b^2)xy(a^4y^2 + b^4x^2)^{-3}$ 。图 6 画出了四个椭圆 1, 2, 3, 4，分别对应  $a=10, b=7, 6, 5, 4$  四种情形 (圆管半径取为 1)。表 1 列出了四条椭圆形弯曲血管的临界雷诺数。  $Re_{kp}$  与  $b/a$  的关系画在图 5 上。图 7, 8, 9 分别画出了  $s$  方向、 $\psi$  方向

表 1

曲线	1	2	3	4
$Re_{kp}$	1200	560	242	92

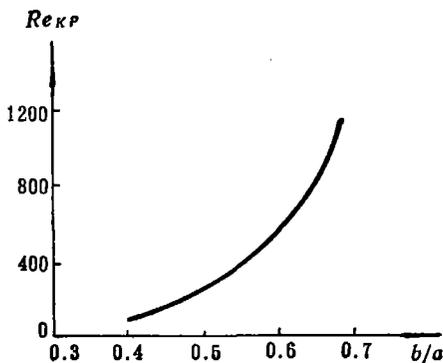


图 5

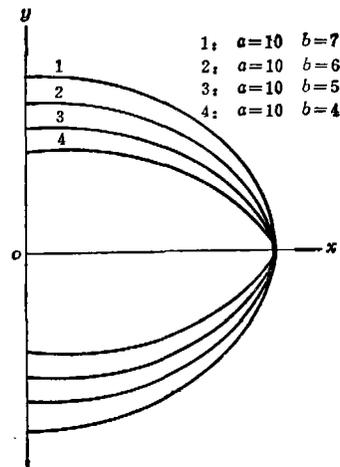


图 6

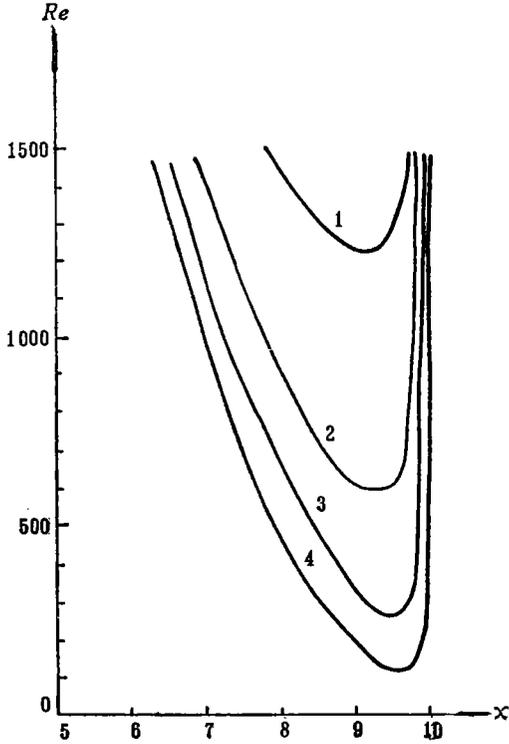


图 7

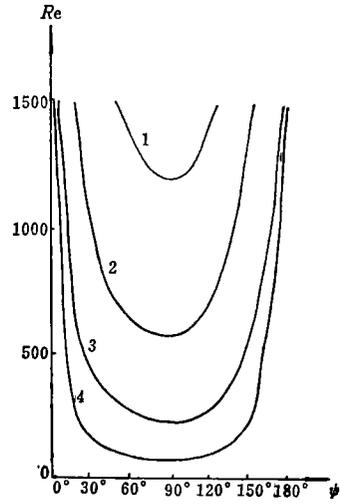


图 8

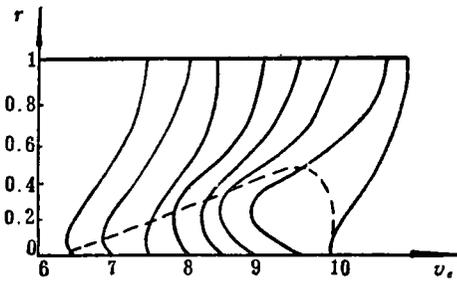


图 9

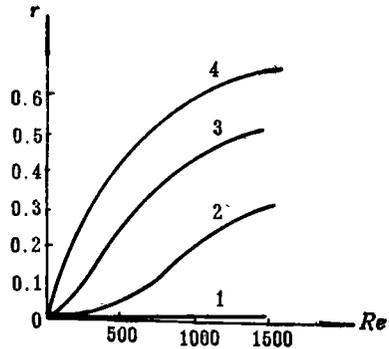


图 10

和  $r$  方向分离泡的最大的边界位置. 通过这三个图可具体地了解到分离泡在  $s$ ,  $\psi$ ,  $r$  三个方向上的尺度. 不难看到, 随着  $K'(s)$  最大值的增加, 随着  $Re$  数的增加, 分离泡在三个方向上的尺度都在不断地扩大. 图 10 画出了  $a=10$ ,  $b=5$ ,  $Re=1500$ ,  $\psi=\pi/2$  时, 分离泡所在处  $v_\theta$  的速度分布图及零速度联线.

本文承林同骥教授审阅并提出宝贵意见, 作者向他表示衷心的感谢.

### 参 考 文 献

1. Fox, J. A. and Hugh, A. E., *Brit. Heart. J.* 28 (1966), 388—399.
2. Forrester, J. H. and Young, D. F., *J. Biomechanics* 3, (1970), 307.

## Determination of Separated Region in a Curved Tube

Wu Wang-yi

Wen Gong-bi

*(Department of Mechanics, Beijing University, Beijing)*

### Abstract

The formation of atherosclerosis in a curved aorta is closely related to the existence of the separated vortex region. This paper deals with the steady laminar motion of an incompressible Newtonian fluid through a curved tube with circular cross-section whose curvature is small and whose curvature gradient is not too large. Using the momentum integral method as well as the approximation of quasi-constant curvature and equation, which determine the location of separation and the reattachment, were derived from that which is concerned. From this equation the earliest separated point and corresponding critical Reynolds number are obtained, and the relation between the position of separation and reattachment as well as Reynolds number  $Re$  for the different azimuthal angle is revealed. It is concluded that the separation at first emerges at the position whose curvature gradient has the maximum absolute value. With increasing  $Re$ , the separated region is extended in the direction of the mainstream, the azimuthal angle and the radius vector, and a three-dimensional separated vortex, which gradually enlarges in all three directions with increase of Reynolds number, is thus formed. The theoretical results also very clearly demonstrate the following striking experimental fact, If the symmetrical curved tube exhibits a separated vortex at the outside of the upstream, then it must have another symmetrical one at the inside of the downstream.