应用数学和力学，第2卷第5期（1981年10月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

关于边界层方法

江福汝

（上海复旦大学数学系，1981年3月25日收到）

摘　要

本文指出传统的边界层方法（包括匹配法和 Višik—Lyusternik 方法）的不足，不能作出边界层项的渐近展开式. 提出多重尺度构造边界层项的方法，得到符合实情的结果. 又与 Levinson所用的方法比较，本方法能更简单地导出后一方法给出的边界层项的渐近展开式. 又应用此方法研究现有的关于奇异摄动的某些成果，指出这些成果的局限性，并在一般情况下作出解的渐近展开式.

一、引　　言

先分析一个例子，以引出我们的论题.

考察下面常微分方程的边值问题：

$$\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2}+(2x+1)\frac{dy}{dx}+2y=0,\ (0<x<1) \tag{1.1}$$

$$y(0)=\alpha,\ y(1)=\beta \tag{1.2}$$

其中ε是正的小参数，α和β是常数.

通过适当的坐标变换，可求得边值问题的真实解为

$$y=\frac{\alpha F\left(\frac{3}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)-\beta F\left(\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)}{F\left(\frac{3}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)-e^{-\frac{2}{\varepsilon}}F\left(\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)}e^{-\frac{x^2+x}{\varepsilon}}$$

$$+\frac{\beta-\alpha e^{-\frac{2}{\varepsilon}}}{F\left(\frac{3}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)-e^{-\frac{2}{\varepsilon}}F\left(\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)}F\left(\frac{2x+1}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)$$

其中

$$F(z)=e^{-z^2}\int_0^z e^{t^2}\,dt$$

利用$F(z)$的渐近展开式[1]：

$$F(z)=\frac{1}{2z}\left[1+\frac{1}{2z^2}+\frac{1\cdot 3}{(2z^2)^2}+\cdots+\frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{(2z^2)^k}+\cdots\right],\quad |z|\to\infty$$

可以求得解 y 的渐近近似式（准确到 ε 量级）为

$$y=\left[\frac{3\beta}{1+2x}+\varepsilon\frac{8\beta(1-x)(2+x)}{3(1+2x)^3}\right]+\left[(\alpha-3\beta)-\varepsilon\frac{16}{3}\beta\right]e^{-\frac{x^2+x}{\varepsilon}}+O(\varepsilon^2) \tag{1.3}$$

(1.3)式右端第二项只在端点 $x=0$ 的近旁有意义，用来校正第一项（称为解的“外部展开式”或“外部解”）以满足该端点的边界条件，称它为“边界层校正”或“边界层项” 在(1.3)式中，每个括号中的后项系数与前项系数之比，当 $\varepsilon\to 0$ 时是有限值，是真实解 y 的渐近近似式．但是应用传统的边界层方法（包括匹配法和 Višik-Lyusternik 方法）只能求得下面形式的近似式[2]：

$$y=\left[\frac{3\beta}{1+2x}+\varepsilon\frac{8\beta(1-x)(2+x)}{3(1+2x)^3}\right]+\left[(\alpha-3\beta)-\varepsilon\left(\frac{16}{3}\beta+\frac{(\alpha-3\beta)x^2}{\varepsilon^2}\right)\right]e^{-\frac{x}{\varepsilon}}+O(\varepsilon^2) \tag{1.4}$$

在（1.4）式中，右端第二括号中后项系数与前项系数之比，当 $\varepsilon\to 0$ 时是无界，而不是边界层项的渐近近似式．正如 Mahony[3] 和 Fowkes[4] 所说的那样，对于变系数的微分方程的边值问题（或初值问题），它们的边界层项一般不具有形式$(\cdots)\ e^{-\frac{x}{\varepsilon}}$.

早在1950年，Levinson[5] 就研究过变系数的二阶椭圆型方程的 Dirichlet 问题：

$$L_\varepsilon u\equiv\varepsilon\Delta u+A(x,y)u_x+B(x,y)u_y+C(x,y)u=D(x,y)\qquad (x,y)\in R \tag{1.5}$$

$$u|_S=\varphi(x,y),\qquad (x,y)\in S \tag{1.6}$$

其中 S 表示有界区域 R 的边界．他指出它的边界层项应具有形式：

$$u=(h(x,y)+\varepsilon h_1(x,y)+\cdots+\varepsilon^i h_i(x,y)+\cdots)e^{-\frac{g(x,y)}{\varepsilon}} \tag{1.7}$$

其中 $g(x,y)$，Levinson称它为“边界层函数”，确定于下面的一阶非线性微分方程：

$$g_x^2+g_y^2-Ag_x-Bg_y=0 \tag{1.8}$$

而 $h(x,y)$确定于一阶线性微分方程：

$$(A-2g_x)h_x+(B-2g_y)h_y+(C-\Delta g)h=0 \tag{1.9}$$

等等．所以边界层项不仅依赖于“慢”变量 x 和 y，还依赖于“快”变量 $f=\dfrac{g(x,y)}{\varepsilon}$，是多重尺度的．

本文引进具有不同尺度的三变量，用以展开微分算子，建立新的构造边界层项的方法．该方法能更简单地求得 Levinson 在[5]中所导出的解的渐近近似式．此外，我们又应用此方法研究现有的关于高阶椭圆型方程奇异摄动的某些成果，指出这些成果的局限性，本文在一般情况下构造出解的渐近展开式．

应用本方法，可以简单地求得所给边值问题(1.1)—(1.2)的解的渐近近似式，与从真实解导出的渐近近似式(1.3)是一致的．为了节省篇幅，这里不再涉及其细节．

二、二阶椭圆型方程的Dirichlet问题

应用本方法研究 Levinson 在[5]中曾研究过的二阶椭圆型方程的 Dirichlet 问题(1.5)—(1.6). 保留[5]中原有的记号和假设, 不过在求解的高阶渐近近似式时, 应要求(1.5)中的系数、边界 S 和边界函数 $\varphi(x,y)$ 具有更高的光滑性.

假设解的外部展开式是

$$U^{(0)}\sim U(x,y)+\varepsilon U_1(x,y)+\cdots+\varepsilon^n U_n(x,y)+\cdots \tag{2.1}$$

用 (2.1) 式代换 (1.5) 中的 U, 再令 ε^n, ($n=0,1,\cdots$)的系数等于零, 得到关于 U 和 U_n, ($n=1,2,\cdots$)的递推方程:

$$A(x,y)\frac{\partial U}{\partial x}+B(x,y)\frac{\partial U}{\partial y}+C(x,y)U=D(x,y) \tag{2.2}$$

$$A(x,y)\frac{\partial U_n}{\partial x}+B(x,y)\frac{\partial U_n}{\partial y}+C(x,y)U_n=-\Delta U_{n-1} \tag{2.3}$$

$$(n=1,2,\cdots)$$

在 S_1 上给出边界条件:

$$U|_{S_1}=\varphi(x,y),\qquad (x,y)\in S_1 \tag{2.4}$$

$$U_n|_{S_1}=0,\qquad (n=1,2,\cdots) \tag{2.5}$$

其中 S_1 表示 S 上被退化方程 (在(1.5)中令 $\varepsilon=0$ 所得的方程) 的特征, 即常微分方程组:

$$\frac{dx}{dt}=A(x,y),\qquad \frac{dy}{dt}=B(x,y)$$

的积分曲线, 按 t 增加的方向穿出区域的部分. 从(2.2)—(2.5)式可以逐次地确定 U 和 U_n, ($n=1,2,\cdots$) 求得解的外部展开式 $U^{(0)}$.

为了校正外部解 $U^{(0)}$; 使之在 S_2 (S 上被特征穿入区域的部分) 上也满足边界条件, 须在 S_2 的邻域构造边界层项.

在 S_2 的邻域引进具有不同尺度的三变量:

$$f=\frac{g(x,y)}{\varepsilon},\qquad \xi=x,\qquad \eta=y \tag{2.6}$$

将关于 x 和 y 的偏导数, 替换成关于 f, ξ, 和 η 的偏导数:

$$\frac{\partial}{\partial x}=\varepsilon^{-1}(\delta_x^{(0)}+\varepsilon\delta_x^{(1)}) \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}=\varepsilon^{-2}(\delta_{x^2}^{(0)}+\varepsilon\delta_{x^2}^{(1)}+\varepsilon^2\delta_{x^2}^{(2)}) \tag{2.8}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
&\delta_x^{(0)}=g_x\frac{\partial}{\partial f}, &&\delta_x^{(1)}=\frac{\partial}{\partial \xi}\\
&\delta_{x^2}^{(0)}=g_x^2\frac{\partial^2}{\partial f^2}, &&\delta_{x^2}^{(1)}=2g_x\frac{\partial^2}{\partial f\partial \xi}+g_{xx}\frac{\partial}{\partial f}\\
&\delta_{x^2}^{(2)}=\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}
\end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

在上式中，将 x 和 ξ 分别换成 y 和 η，又得到 $\frac{\partial}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$．利用这些具有不同尺度的三变量，可以将微分方程(1.5)所对应的微分算子 L_ε 关于 ε 展开

$$\tilde{L}_\varepsilon \equiv \varepsilon^{-1}(K_0+\varepsilon K_1+\varepsilon^2 K_2) \tag{2.10}$$

其中

$$K_0 \equiv \left(g_x^2+g_y^2 \right)\frac{\partial^2}{\partial f^2}+\left(Ag_x+Bg_y \right)\frac{\partial}{\partial f}$$

$$K_1 \equiv 2g_x \frac{\partial^2}{\partial f\partial \xi}+2g_y \frac{\partial^2}{\partial f\partial \eta}+\left(g_{xx}+g_{yy} \right)\frac{\partial}{\partial f}+A\frac{\partial}{\partial \xi}$$

$$+B\frac{\partial}{\partial \eta}+C$$

$$K_2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$$

假设边界层项在三变量 f，ξ，η 下的展开式是

$$Z^{(b)} \sim z(f,\xi,\eta)+\varepsilon z_1(f,\xi,\eta)+\cdots+\varepsilon^n z_n(f,\xi,\eta)+\cdots \tag{2.11}$$

用(2.11)式代换(1.5)所对应的齐次方程中的 u，再令 ε^n，$(n=-1,\ 0,\ \cdots)$ 的系数为零，可以得到关于 z，z_n，$(n=1,\ 2,\ \cdots)$ 的递推方程：

$$K_0 z \equiv \left(g_x^2+g_y^2 \right)\frac{\partial^2 z}{\partial f^2}+\left(Ag_x+Bg_y \right)\frac{\partial z}{\partial f}=0 \tag{2.12}$$

$$K_0 z_n = -(K_1 z_{n-1}+K_2 z_{n-2}),\ (z_0 \equiv z) \tag{2.13}$$

今后将具有负下标的记号取作零．

从(2.12)式我们看到若取 $g(x,y)$ 是下面非线性一阶微分方程：

$$g_x^2+g_y^2=Ag_x+Bg_y \tag{2.14}$$

满足条件：

$$g|_{S_2}=0,\qquad g>0 \text{ 在} S_2 \text{的邻域,} \tag{2.15}$$

的解，则(2.12)化成

$$\frac{\partial^2 z}{\partial f^2}+\frac{dz}{\partial f}=0 \tag{2.16}$$

可以求得 (2.16) 在 S_2 的邻域按指数规律衰减的解为

$$z=h(\xi,\eta)e^{-f}=h(x,y)e^{\frac{-g(x,y)}{\varepsilon}} \tag{2.17}$$

其中 $h(\xi,\eta)$ 是任意函数，以后再确定．我们称形如 (2.17) 的在边界的邻域按指数规律衰减的函数为“边界层型函数”．

用 (2.17) 式代换 (2.13) 式（取 $n=1$）中的 z，再令其右端为零，得到确定 $h(\xi,\eta)$ 的线性一阶微分方程：

$$\left(A-2g_x \right)\frac{\partial h}{\partial \xi}+\left(B-2g_y \right)\frac{\partial h}{\partial \eta}+\left(C-\Delta g \right)h=0 \tag{2.18}$$

和关于 z_1 的微分方程：

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial f^2}+\frac{\partial z_1}{\partial f}=0 \tag{2.19}$$

从（2.19）求得

$$z_1=h_1(\xi,\eta)e^{-f}=h_1(x,y)e^{\frac{-g(x,y)}{\varepsilon}} \tag{2.20}$$

将z和z_1代入（2.13）（取$n=2$），再令其右端为零，又得到确定 $h_1(\xi,\eta)$ 的线性一阶微分方程：

$$\left(A-2g_x\right)\frac{\partial h_1}{\partial \xi}+\left(B-2g_y\right)\frac{\partial h_1}{\partial \eta}+\left(C-\Delta g\right)h_1=-\Delta h \tag{2.21}$$

和关于z_2的微分方程．这样继续下去，可以求得

$$z_n=h_n(\xi,\eta)e^{-f}=h_n(x,y)e^{\frac{-g(x,y)}{\varepsilon}} \tag{2.22}$$

其中 $h_n(\xi,\eta)$ 确定于线性一阶微分方程：

$$\left(A-2g_x\right)\frac{\partial h_n}{\partial \xi}+\left(B-2g_y\right)\frac{\partial h_n}{\partial \eta}+\left(C-\Delta g\right)h_n=-\Delta h_{n-1}$$

$$(n=2,3,\cdots) \tag{2.23}$$

根据$Z^{(b)}$应在S_2上校正 $U^{(0)}$满足边界条件（1.6）的要求，得到关于h和 h_n，（$n=1$，2，…）在S_2上的边界条件：

$$h|_{S_2}=(\varphi(\xi,\eta)-U(\xi,\eta))|_{S_2} \tag{2.24}$$

$$h_n|_{S_2}=-U_n(\xi,\eta)|_{S_2} \qquad (n=1,2,\cdots) \tag{2.25}$$

从这些边界条件和关于h和h_n，（$n=1,2,\cdots$）的线性一阶微分方程．可以逐步地解出h和h_n，（$n=1$，2，…），求得边界层项$Z^{(b)}$的渐近展开式．

关于边界层函数$g(x,y)$的存在性，Levinson 已在文[5]中予以证明，这里不再赘述．

通过与 Levinson 的结果比较可以看出，本方法比较有规律而且简单，能够比较容易地作出和[5]中形式一样的解的渐近近似式．

三、带有混合边界条件的四阶椭圆型方程

再应用上述方法，研究 Comstock[6]和作者[7]曾藉不同方法研究过的四阶椭圆型方程的混合边值问题．设问题是

$$L_\varepsilon\Phi\equiv-\varepsilon^2\nabla^4\Phi+a(x,y)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+b(x,y)\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+c(x,y)\frac{\partial\Phi}{\partial x}$$

$$=0,\qquad (x,y)\in D \tag{3.1}$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}+k\Phi\right)\Big|_\Gamma=e(x,y)\Big|_\Gamma \qquad (k<0) \tag{3.2}$$

$$\left.\frac{\partial^2\Phi}{\partial n^2}\right|_\Gamma=h(x,y)\Big|_\Gamma \tag{3.3}$$

其中D是矩形区域$D=\{(x,y)|\alpha\leqslant x\leqslant\beta,\ \gamma\leqslant y\leqslant\delta\}$，$\Gamma$表示$D$的边界，$n$表示$\Gamma$的内法线．

假设（3.1）中的系数、边界函数$e(x,y)$和$h(x,y)$是足够光滑，能够保证下面运算是合理的．又假设$a(x,y)\geqslant a_0>0$，$b(x,y)\geqslant b_0>0$，a_0和b_0是常数．

假设解的外部展开式是

$$\Phi^{(0)}\sim\varphi_0(x,y)+\varepsilon\varphi_1(x,y)+\cdots+\varepsilon^i\varphi_i(x,y)+\cdots \tag{3.4}$$

用（3.4）式代换（3.1）中的Φ，再令等式两端ε的同次幂的系数相等，则得到关于φ_i，（$i=0,1,\cdots$）的递推方程：

$$a(x,y)\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x^2}+b(x,y)\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial y^2}+c(x,y)\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}=\nabla^4\varphi_{i-2} \tag{3.5}$$

$$(i=0,1,\cdots)$$

因为每个方程都是二阶的椭圆型方程，它的解一般不能同时满足边界条件（3.2）和(3.3)，所以在$\Phi^{(0)}$和边值问题（3.1）—（3.3）的真实解之间沿边界Γ有裂隙．下面我们再应用前节所给的方法来构造边界层项，以校正$\Phi^{(0)}$近似地满足边界条件（3.2）和（3.3）．

在边界$x=\alpha$的邻域引进三变量：

$$f_\alpha=\frac{g_\alpha(x,y)}{\varepsilon},\qquad \xi_\alpha=x,\qquad \eta_\alpha=y \tag{3.6}$$

将关于x和y的偏导数，替换成关于f，ξ，和η（为简单起见，略去它们的下标"α"）的偏导数：

$$\frac{\partial}{\partial x}=\varepsilon^{-1}\left(\delta_x^{(0)}+\varepsilon\delta_x^{(1)}\right),\quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}=\varepsilon^{-2}\left(\delta_{x^2}^{(0)}+\varepsilon\delta_{x^2}^{(1)}+\varepsilon^2\delta_{x^2}^{(2)}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}=\varepsilon^{-4}\left(\delta_{x^2y^2}^{(0)}+\varepsilon\delta_{x^2y^2}^{(1)}+\cdots+\varepsilon^4\delta_{x^2y^2}^{(4)}\right) \tag{3.7}$$

其中$\delta_x^{(0)}$，$\delta_x^{(1)}$，$\cdots$，$\delta_{x^2}^{(2)}$由（2.9）式定义，和

$$\delta_{x^2y^2}^{(0)}=g_x^2g_y^2\frac{\partial^4}{\partial f^4}$$

$$\delta_{x^2y^2}^{(1)}=2g_xg_y^2\frac{\partial^4}{\partial f^3\partial\xi}+2g_x^2g_y\frac{\partial^4}{\partial f^3\partial\eta}+\Big(g_{xx}g_y^2+4g_xg_yg_{xy}$$

$$+g_x^2g_{yy}\Big)\frac{\partial^3}{\partial f^3}$$

$$\delta_{x^2y^2}^{(2)}=g_x^2\frac{\partial^4}{\partial f^2\partial\eta^2}+g_y^2\frac{\partial^4}{\partial f^2\partial\xi^2}+4g_xg_y\frac{\partial^4}{\partial f^2\partial\xi\partial\eta}$$

$$+(2g_xg_{yy}+4g_yg_{xy})\frac{\partial^3}{\partial f^2\partial\xi}+(2g_yg_{xx}+4g_xg_{xy})\frac{\partial^3}{\partial f^2\partial\eta}$$

$$+(2g_xg_{xyy}+2g_yg_{xxy}+g_{xx}g_{yy}+g_{xy}^2)\frac{\partial^2}{\partial f^2}$$

$$\delta^{(3)}_{x^2y} = 2g_x\frac{\partial^4}{\partial f\partial\xi\partial\eta^2} + 2g_y\frac{\partial^4}{\partial f\partial\xi^2\partial\eta} + g_{xx}\frac{\partial^3}{\partial f\partial\eta^2} + g_{yy}\frac{\partial^3}{\partial f\partial\xi^2}$$

$$+ 4g_{xy}\frac{\partial^3}{\partial f\partial\xi\partial\eta} + 2g_{xyy}\frac{\partial^2}{\partial f\partial\xi} + 2g_{xxy}\frac{\partial^2}{\partial f\partial\eta} + g_{xxyy}\frac{\partial}{\partial f}$$

$$\delta^{(4)}_{x^2y^2} = \frac{\partial^4}{\partial\xi^2\partial\eta^2}$$

其中$g_x \equiv \dfrac{\partial g}{\partial x}$等等；将 x 和 ξ 分别替换成 y 和 η，又得到$\dfrac{\partial}{\partial y}$ $\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$，…，$\dfrac{\partial^4}{\partial y^4}$；将 y 和 η 分别替换成 x 和 ξ，又得到$\dfrac{\partial^4}{\partial x^4}$．在三变量 f，ξ，η下，微分算子在 L_ε 在 $x=\alpha$ 邻域的展开式是

$$\tilde{L}^{(\alpha)}_{\varepsilon} = \varepsilon^{-2}\left(K^{(\alpha)}_0 + \varepsilon K^{(\alpha)}_1 + \cdots + \varepsilon^4 K^{(\alpha)}_4\right) \tag{3.8}$$

其中

$$K^{(\alpha)}_0 \equiv -\left(\delta^{(0)}_{x^4} + \delta^{(0)}_{y^4} + 2\delta^{(0)}_{x^2y^2}\right) + a\delta^{(0)}_{x^2} + b\delta^{(0)}_{y^2}$$

$$K^{(\alpha)}_1 \equiv -\left(\delta^{(1)}_{x^4} + \delta^{(1)}_{y^4} + 2\delta^{(1)}_{x^2y^2}\right) + a\delta^{(1)}_{x^2} + b\delta^{(1)}_{y^2} + c\delta^{(0)}_{x}$$

$$K^{(\alpha)}_2 \equiv -\left(\delta^{(2)}_{x^4} + \delta^{(2)}_{y^4} + 2\delta^{(2)}_{x^2y^2}\right) + a\delta^{(2)}_{x^2} + b\delta^{(2)}_{y^2} + c\delta^{(1)}_{x}$$

$$K^{(\alpha)}_3 \equiv -\left(\delta^{(3)}_{x^4} + \delta^{(3)}_{y^4} + 2\delta^{(3)}_{x^2y^2}\right)$$

$$K^{(\alpha)}_4 \equiv -\left(\delta^{(4)}_{x^4} + \delta^{(4)}_{y^4} + 2\delta^{(4)}_{x^2y^2}\right)$$

假设边界层项在三变量下的展开式是

$$\Psi^{(\alpha)} \sim \varepsilon^2\left(v^{(\alpha)}_0 + \varepsilon v^{(\alpha)}_1 + \cdots + \varepsilon^i v^{(\alpha)}_i + \cdots\right) \tag{3.9}$$

用 $\Psi^{(\alpha)}$ 代换(3.1)所对应的齐次方程中的 Φ，再令 ε 的同次幂的系数相等，得到关于 $v^{(\alpha)}_i$ $(i=0,1,\cdots)$的递推方程：

$$K^{(\alpha)}_0\ v^{(\alpha)}_0 \equiv -\left(g_x^2 + g_y^2\right)^2\frac{\partial^4 v^{(\alpha)}_0}{\partial f^4} + \left(ag_x^2 + bg_y^2\right)\frac{\partial^2 v^{(\alpha)}_0}{\partial f^2} = 0 \tag{3.10}$$

$$K^{(\alpha)}_0\ v^{(\alpha)}_i = -\left(K^{(\alpha)}_1\ v^{(\alpha)}_{i-1} + K^{(\alpha)}_2\ v^{(\alpha)}_{i-2} + \cdots + K^{(\alpha)}_4\ v^{(\alpha)}_{i-4}\right) \tag{3.11}$$

$$(i = 1, 2, \cdots)$$

从（3.10）式可以看出，若取$g(x,y)$为非线性一阶微分方程：

$$g_x^2 + g_y^2 = \sqrt{ag_x^2 + bg_y^2} \tag{3.12}$$

满足条件：

$$g|_{x=\alpha} = 0, \qquad g>0 \qquad \text{在 } x=\alpha \text{ 的邻域} \tag{3.13}$$

的解（$g(x,y)$的存在性已于本文的附录中证明），则方程（3.10）化为

$$\frac{\partial^4 v_0^{(\alpha)}}{\partial f^4}-\frac{\partial^2 v_0^{(\alpha)}}{\partial f^2}=0 \tag{3.14}$$

方程（3.14）的边界层型的解为

$$v_0^{(\alpha)}=C_0^{(\alpha)}(\xi,\eta)e^{-f}=C_0^{(\alpha)}(x,y)\,e^{-\frac{g(x,y)}{\varepsilon}} \tag{3.15}$$

其中 $C_0^{(\alpha)}$是任意函数.

将 $v_0^{(\alpha)}$代入(3.11)(取 $i=1$)，再令其右端为零，得到确定$C_0^{(\alpha)}$的线性一阶微分方程：

$$\begin{aligned}&2g_x(2g_x^2+2g_y^2-a)\frac{\partial C_0^{(\alpha)}}{\partial\xi}+2g_y(2g_x^2+2g_y^2-b)\frac{\partial C_0^{(\alpha)}}{\partial\eta}\\&+[g_{xx}(6g_x^2+2g_y^2-a)+g_{yy}(6g_y^2+2g_x^2-b)+8g_xg_yg_{xy}\\&-cg_x]\,C_0^{(\alpha)}=0\end{aligned} \tag{3.16}$$

和关于 $v_1^{(\alpha)}$的微分方程：

$$\frac{\partial^4 v_1^{(\alpha)}}{\partial f^4}-\frac{\partial^2 v_1^{(\alpha)}}{\partial f^2}=0 \tag{3.17}$$

从（3.17）可以求得边界层型的解为

$$v_1^{(\alpha)}=C_1^{(\alpha)}(\xi,\eta)e^{-f}=C_1^{(\alpha)}(x,y)\,e^{\frac{-g(x,y)}{\varepsilon}} \tag{3.18}$$

其中 $C_1^{(\alpha)}$是任意函数.

将 $v_0^{(\alpha)}$ 和 $v_1^{(\alpha)}$代入(3.11)（取 $i=2$），再令其右端为零，又得到确定 $C_1^{(\alpha)}$ 的线性一阶微分方程：

$$\begin{aligned}&2g_x(2g_x^2+2g_y^2-a)\frac{\partial C_1^{(\alpha)}}{\partial\xi}+2g_y(2g_x^2+2g_y^2-b)\frac{\partial C_1^{(\alpha)}}{\partial\eta}\\&+(\cdots)\,C_1^{(\alpha)}=e^fK_2v_0^{(\alpha)}\end{aligned} \tag{3.19}$$

上式的右端是 $C_0^{(\alpha)}$的已知函数.

这样继续下去，可以求得

$$v_i^{(\alpha)}=C_i^{(\alpha)}(\xi,\eta)e^{-f}=C_i^{(\alpha)}(x,y)\,e^{-\frac{g(x,y)}{\varepsilon}} \tag{3.20}$$

$$(i=2,3\cdots)$$

其中 $C_i^{(\alpha)}$,($i=2,3\cdots$)确定于线性一阶微分方程：

$$2g_x\left(2g_x^2+2g_y^2-a\right)\frac{\partial C_i^{(\alpha)}}{\partial\xi}+2g_y\left(2g_x^2+2g_y^2-b\right)\frac{\partial C_i^{(\alpha)}}{\partial\eta}$$

$$+(\cdots)C_i^{(\alpha)}=e^j(K_2^{(\alpha)}v_{i-1}^{(\alpha)}+\cdots+K_4^{(\alpha)}v_{i-3}^{(\alpha)}) \tag{3.21}$$

其右端是 $C_{i-3}^{(\alpha)}$、$C_{i-2}^{(\alpha)}$和 $C_{i-1}^{(\alpha)}$的已知函数.

根据$\Psi^{(\alpha)}$应校正$\Phi^{(0)}$满足边界条件（3.2）和（3.3）的要求 可以得到关于 φ_i和$v_i^{(\alpha)}$，（$i=0$，$1\cdots$）的边界条件. 事实上因要求

$$\left(\frac{\partial}{\partial n}+k\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\varphi_i+\varepsilon^2\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i v_i^{(\alpha)}\right)\Big|_{x=\alpha}=e(x,y)\Big|_{x=\alpha} \tag{3.22}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial n^2}\left(\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\varphi_i+\varepsilon^2\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i v_i^{(\alpha)}\right)\Big|_{x=\alpha}=h(x,y)\Big|_{x=\alpha} \tag{3.23}$$

由于在 $x=\alpha$ 的邻域有

$$\frac{\partial}{\partial n}\equiv\frac{\partial}{\partial x}=\varepsilon^{-1}(\delta_x^{(0)}+\varepsilon\delta_x^{(1)})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial n^2}\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}=\varepsilon^{-2}(\delta_{x^2}^{(0)}+\varepsilon\delta_{x^2}^{(1)}+\varepsilon^2\delta_{x^2}^{(2)})$$

所以若在（3.22）和（3.23）中 令ε的同次幂的系数相等则得

$$\left(\frac{\partial}{\partial n}+k\right)\varphi_0\Big|_{x=\alpha}=e(x,y)\Big|_{x=\alpha} \tag{3.24}$$

$$g_x^2\frac{\partial^2 v_0^{(\alpha)}}{\partial f^2}\Big|_{x=\alpha}=\left(h(x,y)-\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial n^2}\right)\Big|_{x=\alpha} \tag{3.25}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial n}+k\right)\varphi_i\Big|_{x=\alpha}=-\left(g_x\frac{\partial v_{i-1}^{(\alpha)}}{\partial f}+\frac{\partial v_{i-2}^{(\alpha)}}{\partial\xi}\right)\Big|_{x=\alpha} \tag{3.26}$$

$$g_x^2\frac{\partial^2 v_i^{(\alpha)}}{\partial f^2}\Big|_{x=\alpha}=-\left(\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial n^2}+2g_x\frac{\partial^2 v_{i-1}^{(\alpha)}}{\partial f\partial\xi}+g_{xx}\frac{\partial v_{i-1}^{(\alpha)}}{\partial f}\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2 v_{i-2}^{(\alpha)}}{\partial\xi^2}\right)\Big|_{x=\alpha}\quad(i=1,2,\cdots) \tag{3.27}$$

逐次地得出φ_i和$v_i^{(\alpha)}$，（$i=0$，1，$\cdots$）的边界条件.

从关于$v_i^{(\alpha)}$，（$i=0$ 1，$\cdots$）的边界条件, 可以求得关于$C_i^{(\alpha)}$的边界条件：

$$C_0^{(\alpha)}\Big|_{x=\alpha}=\frac{1}{g_x^2}\left(h-\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial n^2}\right)\Big|_{x=\alpha} \tag{3.28}$$

$$C_i^{(\alpha)}\Big|_{x=\alpha}=\frac{-1}{g_x^2}\left(\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial n^2}-2g_x\frac{\partial C_{i-1}^{(\alpha)}}{\partial\xi}-g_{xx}C_{i-1}^{(\alpha)}+\frac{\partial^2 C_{i-2}^{(\alpha)}}{\partial\xi^2}\right)\Big|_{x=\alpha}$$
$$(i=1,2,\cdots) \tag{3.29}$$

从关于φ_i和$C_i^{(\alpha)}$的边界条件和递推方程, 可以逐步地解出φ_i 和 $C_i^{(\alpha)}$，（$i=0,1,\cdots$），求得$\Phi^{(0)}$和 $\Psi^{(\alpha)}$的渐近展开式.

类似地, 我们可以求得边界 $x=\beta$, $y=\gamma$和$y=\delta$ 邻域的边界层项的渐近展开式, 从而得到解的渐近展开式：

$$\Phi\sim\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\varphi_i,\ \text{在}R\text{的内部区域},\\ \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\varphi_i+\varepsilon^2\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\Big[C_i^{(\alpha)}(x,y)e^{\frac{-g_\alpha(x,y)}{\varepsilon}}+C_i^{(\beta)}(x,y)e^{\frac{-g_\beta(x,y)}{\varepsilon}}\\ \qquad +C_i^{(\gamma)}(x,y)e^{\frac{-g_\gamma(x,y)}{\varepsilon}}+C_i^{(\delta)}(x,y)e^{\frac{-g_\delta(x,y)}{\varepsilon}}\Big]\\ \text{在}\Gamma\text{的除去四个角点的邻域};\end{cases}$$

其中g_α、g_β、g_γ和g_δ是非线性一阶微分方程（3.12）的解，分别满足以下诸条件：

$$\begin{array}{lll} g_\alpha|_{x=\alpha}=0, & g_\alpha>0 & \text{在}x=\alpha\text{的邻域},\\ g_\beta|_{x=\beta}=0, & g_\beta>0 & \text{在}x=\beta\text{的邻域},\\ g_\gamma|_{y=\gamma}=0, & g_\gamma>0 & \text{在}y=\gamma\text{的邻域},\\ g_\delta|_{y=\delta}=0, & g_\delta>0 & \text{在}y=\delta\text{的邻域}, \end{array}$$

而$C_i^{(\beta)}$、$C_i^{(\gamma)}$和$C_i^{(\delta)}$确定于类似$C_i^{(\alpha)}$所满足的柯西问题。

四、几种特例情形

从第三节我们看到

1．若椭圆型方程（3.1）中的系数a只是x的函数，b只是y的函数，我们可以取下面函数：

$$\left.\begin{array}{ll} g_\alpha=\displaystyle\int_\alpha^x\sqrt{a(x)}\,dx, & g_\beta=\displaystyle\int_x^\beta\sqrt{a(x)}\,dx\\ g_\gamma=\displaystyle\int_\gamma^y\sqrt{b(y)}\,dy, & g_\delta=\displaystyle\int_y^\delta\sqrt{b(y)}\,dy \end{array}\right\}\tag{4.1}$$

分别作为边界，$x=\alpha$、$x=\beta$，$y=\gamma$，$y=\delta$上的边界层函数。此时确定$C_i^{(\alpha)}$，$C_i^{(\beta)}$，…的柯西问题将取极简单的形式，例如对于$C_i^{(\alpha)}$是

$$2a\frac{\partial C_i^{(\alpha)}}{\partial x}+\left(\frac{5}{2}a_x-c\right)C_i^{(\alpha)}=a^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_\alpha^x\sqrt{a(x)}\,dx}\Big(K_2^{(\alpha)}v_{i-1}^{(\alpha)}+\cdots+K_4^{(\alpha)}v_{i-3}^{(\alpha)}\Big)\tag{4.2}$$

$$C_i^{(\alpha)}\Big|_{x=\alpha}=\Big[\delta_{0,i}h-\Big(\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x^2}-2a^{\frac{1}{2}}\frac{\partial C_{i-1}^{(\alpha)}}{\partial x}-\frac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}}a_xC_{i-1}^{(\alpha)}+\frac{\partial^2C_{i-2}^{(\alpha)}}{\partial x^2}\Big)\Big]\Big|_{x=\alpha}\tag{4.3}$$

$$(i=0,1,\cdots)$$

（其中$\delta_{0,i}=1$当$i=0$，$\delta_{0,i}=0$当$i\neq0$）都只以用解常微分方程的方法解出。

2．若我们只期望求出准确到ε量级的渐近近似式，计算也可很大地简化。在此情形之下，我们仍可取函数(4.1)分别作为边界$x=\alpha$，…，$y=\delta$上的边界层函数，因为在它们的ε邻域有

$$\frac{\partial g_a}{\partial y}=\int_a^x\left(\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{a(x,y)}\right)dx=O(\varepsilon)$$

$$\frac{\partial^2 g_a}{\partial y^2}=O(\varepsilon)$$

…等．函数g_α，…，g_δ将准确到ε量级地满足非线性微分方程(3.12)．此时，例如在$x=\alpha$的邻域，微分算子可以只展开到ε^2项

$$\widetilde{L}_\varepsilon^{(\alpha)}=\varepsilon^{-1}(K_0^{(\alpha)}+\varepsilon K_1^{(\alpha)}+\varepsilon^2 K_2^{(\alpha)}+\cdots) \tag{4.4}$$

其中算子$K_0^{(\alpha)}$、$K_1^{(\alpha)}$和$K_2^{(\alpha)}$可以取很简单的形式：

$$K_0^{(\alpha)}=-a^2\left(\frac{\partial^4}{\partial f^4}-\frac{\partial^2}{\partial f^2}\right) \tag{4.5}$$

$$K_1^{(\alpha)}=-a^{\frac{3}{2}}\left(4\frac{\partial^4}{\partial f^3\partial\xi}-2\frac{\partial^2}{\partial f\partial\xi}\right)-a^{\frac{1}{2}}\left(3a_x\frac{\partial^3}{\partial f^3}-a_x\frac{\partial}{\partial f}-c\frac{\partial}{\partial f}\right) \tag{4.6}$$

$$K_2^{(\alpha)}=-a\left(6\frac{\partial^4}{\partial f^2\partial\xi^2}+2\frac{\partial^4}{\partial f^2\partial\eta^2}-\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\right)-a_x\left[6\frac{\partial^3}{\partial f^2\partial\xi}+\left(2+\frac{3}{4}a_x\right)\frac{\partial^2}{\partial f^2}\right]+b\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}+c\frac{\partial}{\partial\xi} \tag{4.7}$$

（对于$K_0^{(\alpha)}$和$K_1^{(\alpha)}$舍去了$O(\varepsilon)$的项，对于$K_2^{(\alpha)}$舍去了$O(1)$的项）于是将求得

$$v_0^{(\alpha)}=C_0^{(\alpha)}(x,y)\,e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\alpha^x\sqrt{a(x,y)}\,dx}$$

$$v_1^{(\alpha)}=C_1^{(\alpha)}(x,y)\,e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\alpha^x\sqrt{a(x,y)}\,dx}$$

其中$C_0^{(\alpha)}$和$C_1^{(\alpha)}$分别确定于柯西问题：

$$\left.\begin{aligned}&2a\frac{\partial C_0^{(\alpha)}}{\partial x}+\left(\frac{5}{2}a_x-c\right)C_0^{(\alpha)}=0\\&C_0^{(\alpha)}\Big|_{x=\alpha}=h(x,y)\Big|_{x=\alpha}\end{aligned}\right\} \tag{4.8}$$

和

$$\left.\begin{aligned}&2a\frac{\partial C_1^{(\alpha)}}{\partial x}+\left(\frac{5}{2}a_x-c\right)C_1^{(\alpha)}=a^{-\frac{1}{2}}\Big[5a\frac{\partial^2 C_0^{(\alpha)}}{\partial x^2}+(2a-b)\frac{\partial^2 C_0^{(\alpha)}}{\partial y^2}\\&\qquad+(6a_x-c)\frac{\partial C_0^{(\alpha)}}{\partial x}-\left(\frac{1}{4}a^{-1}a_x^2-2a_{xx}\right)C_0^{(\alpha)}\Big]\\&C_1^{(\alpha)}\Big|_{x=\alpha}=-\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}-2a^{\frac{1}{2}}\frac{\partial C_0^{(\alpha)}}{\partial x}-\frac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}}a_x\,C_0^{(\alpha)}\right)\Big|_{x=\alpha}\end{aligned}\right\} \tag{4.9}$$

可以用解常微分方程的方法解出.

3. 若要得到解的准确到 ε^M 量级($M\geqslant 2$)的渐近近似式, 又若要成立有关条件: 在 $x=\alpha$ 和 $x=\beta$ 的 ε 邻域满足

$$\left.\begin{array}{lll} a_y=O(\varepsilon^{M-1}), & a_{yy}=O(\varepsilon^{M-1}), & a_{xy}=O(\varepsilon^{M-2}) \\ a_{xyy}=O(\varepsilon^{M-2}), & a_{yyy}=O(\varepsilon^{M-3}), & a_{yyyy}=O(\varepsilon^{M-2}) \end{array}\right\} \tag{4.10}$$

在$y=\gamma$和$y=\delta$的ε邻域满足

$$\left.\begin{array}{lll} b_x=O(\varepsilon^{M-1}), & b_{xx}=O(\varepsilon^{M-1}), & b_{xy}=O(\varepsilon^{M-2}) \\ b_{yxx}=O(\varepsilon^{M-2}), & b_{xxx}=O(\varepsilon^{M-3}), & b_{xxxx}=O(\varepsilon^{M-2}) \end{array}\right\} \tag{4.11}$$

则仍可以采用第 1 段和第 2 段中提出的简化方法求解的渐近近似式, 即仍可取函数 (4.1) 作为边界层函数. 在此情形, 例如在 $x=\alpha$ 的邻域, 展开式 (3.8) 中的算子仍取简单的形式: 形如(4.5)—(4.7)和

$$\begin{aligned} K_3^{(\alpha)} = & -4a^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\partial^4}{\partial f\partial\xi^3}+\frac{\partial^4}{\partial f\partial\xi\partial\eta^2}\right)-a^{-\frac{1}{2}}a_x\left(3\frac{\partial^3}{\partial f\partial\xi^2}+\frac{\partial^3}{\partial f\partial\eta^2}\right) \\ & -a^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{3}{8}a^{-2}a_x^3-\frac{3}{4}a^{-1}a_x\, a_{xx}+\frac{1}{2}a_{xxx}\right)\frac{\partial}{\partial f} \\ & -a^{-\frac{1}{2}}(-a^{-1}a_x^2+2a_{xx})\frac{\partial^2}{\partial f\partial\xi} \end{aligned}$$

因为此时在 $\widetilde{L}^{(\alpha)}\Psi^{(\alpha)}$中, 只影响 ε^{M+1} 量级的项. 这里附带指出, 文[6]和文[7]中所用的方法, 只在条件(4.10)和(4.11)下才正确.

附 录

关于非线性一阶偏微分方程:

$$g_x^2+g_y^2=\sqrt{ag_x^2+bg_y^2} \tag{1}$$

满足条件:

$$g|_{x=\alpha}=0, \qquad g>0 \qquad \text{在}x=\alpha\text{的邻域}, \tag{2}$$

的解的存在性.

方程(1)的特征方程是

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{dx}{dt}=2p-\dfrac{ap}{\sqrt{ap^2+bq^2}}, & \dfrac{dy}{dt}=2q-\dfrac{bq}{\sqrt{ap^2+bq^2}} \\ \dfrac{dp}{dt}=\dfrac{a_xp^2+b_xq^2}{2\sqrt{ap^2+bq^2}} & \dfrac{dq}{dt}=\dfrac{a_yp^2+b_yq^2}{2\sqrt{ap^2+bq^2}} \\ \dfrac{dg}{dt}=p^2+q^2 & \end{array}\right\} \tag{3}$$

其中$p=g_x$, $q=g_y$. 因为$g|_{x=\alpha}=0$, 所以$q(\alpha,y)=0$.代入(1), 解得$p(\alpha,y)=\sqrt{a(\alpha,y)}$ (舍去负根和零根). 所以在边界$x=\alpha$上

$$\frac{dx}{dt}=\sqrt{a(\alpha,y)}\geqslant\sqrt{a_0}>0, \qquad \frac{dy}{dt}=0$$

即边界$x=\alpha$不与(1)的特征相切. 此外, 若$dt>0$则在$x=\alpha$的邻域$dx>0$. 从(3)的最后一方程知在$x=\alpha$的邻域$g>0$. 所以方程(1)的满足条件(2)的解在$x=\alpha$的邻域是存在的.

参 考 文 献

1. 列别捷夫, H H., 《特殊函数及其应用》, (中译本), 高等教育出版社, (1975).
2. Nayfeh A H., *Perturbation Methods*, John Wiley & Sons, New York (1973).
3. Mahony J J, An expansion method for singular perturbation problems *J. Australian Math. Soc.* 2, (1962), 440—463.
4. Fowkes, N. D., A singular perturbation method, Part I and Part II, *Quart. Appl. Math.*, 26, (1968), 57—69, 71—85.
5. Levinson, N., The first boundary value problem for $\varepsilon\Delta u+A(x,y)u_x+B(x,y)u_y+C(x,y)u=D(x,y)$, *Annals of Math.*, 51, 2, (1950), 428—445.
6. Comstock, C., Singular perturbations of elliptic equations, *SIAM J. Appl. Math.*, 20, (1971), 491—502.
7. 江福汝, 关于椭圆型方程的奇摄动, 复旦学报 (自然科学版), 第2期, (1978), 29—37.

On the Boundary Layer Methods

Jiang Fu-ru

(Department of Mathematics, Fudan University, Shanghai)

Abstract

In this paper the defect of the traditionary boundary layer methods (including the method of matched asymptotic expansions and the method of Višik—Lyusternik) is noted, from those methods we cannot construct the asymptotic expansion of boundary layer term really. So the method of multiple scales is proposed for constructing the asymptotic expansion of boundary layer term, the reasonable result is obtained. Furthermore, we compare this method with the method used by Levinson, and find out that both of these methods give the same asymptotic expansion of the boundary layer term, but our method is more simple.

Again, we apply this method to study some known works on singular perturbations. The limitations of those works have been noted, and the asymptotic expansion of their solution is constructed in a general condition.