

# 求解位移方程的能量原理

傅宝连

(黑龙江东北重型机械学院, 1980年3月24日收到)

## 摘 要

本文在 Castigliano 原理的基础上推广了单位虚载荷法。据此, 用力法直接导出了梁、板和壳一类结构的挠曲面的一般方程。

我们导出了具有非齐次位移边界条件的矩形薄板和考虑横向切变形影响的矩形厚板的挠曲面方程。同时给出了相应直梁的挠曲轴方程。

推广了互等定理的应用。

计算了三个简例。

## 一、引 言

Castigliano 原理是变形体力学的一个经典性原理。它给出了具有齐次位移边界条件的变形体表面某一点挠度的一般公式。

在本文, 我们把力的作用点视为一流动变量, 同时考虑到位移边界条件的非齐次性, 从而导出了具有非齐次位移边界条件的挠曲面方程的一般公式和平板、直梁挠曲方程的一般公式。

同样地, 我们应用把力的作用点视为一流动变量的这一基本观点于互等定理, 从而推广了互等定理的应用。被推广了的互等定理的应用可用以求解梁、板和壳一类结构的挠曲面方程。

## 二、求解挠曲面方程的基本原理

假设我们所讨论的物体是小变形的。  $u$ ,  $v$  和  $w$  表示位移分量, 它们应满足表面  $\Omega_1$  部分的位移边界条件; 而  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yz}$  和  $\tau_{zx}$  表示应力分量, 它们应满足微分平衡方程和静力边界条件。于是我们得到 Castigliano 变分方程

$$\delta\Gamma_1 = \iint_{\Omega_1} (\bar{u}\delta X + \bar{v}\delta Y + \bar{w}\delta Z) d\Omega \quad (2.1)$$

这里  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$  和  $\bar{w}$  是在表面  $\Omega_1$  部分上给定的位移分量, 而变形体的余能  $\Gamma_1$  是被余能密度函数  $\Gamma_0$  的体积分所确定的, 于是

$$\Gamma_1 = \iiint_V \Gamma_0 dV$$

因而方程(2.1)可以被表示为

$$\delta\Gamma = 0 \quad (2.2)$$

这里

$$\Gamma = \Gamma_1 - \iint_{\Omega_1} (\bar{u}X + \bar{v}Y + \bar{w}Z) d\Omega$$

它通常被称为总余能.

如果在  $\Omega_1$  上的位移边界条件是齐次的, 于是我们有  $\Gamma = \Gamma_1$ , 并且式(2.2)成为

$$\delta\Gamma_1 = 0 \quad (2.3)$$

可以证明, 在所有满足微分平衡方程、静力边界条件的应力状态中, 以使  $\Gamma$  或  $\Gamma_1$  的绝对值为最小的应力状态代表着真实应力状态.

下面我们将在式(2.2)和式(2.3)的基础上来建立梁、板和壳一类结构挠曲面的一般方程. 现在我们假设, 如果虚载荷  $P$  是被作用于变形体表面上的一流动坐标点  $(\xi, \eta, \zeta)$ , 那么根据式(2.1)我们有

$$\delta\Gamma_1 = \iint_{\Omega_1} (\bar{u}\delta X + \bar{v}\delta Y + \bar{w}\delta Z) d\Omega + \Delta(\xi, \eta, \zeta)\delta P \quad (2.4)$$

这里

$$\Gamma_1 = \iiint_V \Gamma_0(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) dV$$

我们把上式(2.4)对  $P$  取偏导数并使  $P=0$ , 于是方程式(2.4)的变分确定为

$$\Delta(\xi, \eta, \zeta) = \iiint_V \frac{\partial}{\partial P} \Gamma_0(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) dV - \iint_{\Omega_1} (\bar{u}X_1 + \bar{v}Y_1 + \bar{w}Z_1) d\Omega \quad (2.5)$$

这里  $\Delta(\xi, \eta, \zeta)$  是在虚载荷方向上的真实位移方程, 而  $X_1, Y_1$  和  $Z_1$  分别表示着  $\frac{\partial X}{\partial P}$ ,

$\frac{\partial Y}{\partial P}$  和  $\frac{\partial Z}{\partial P}$ . 这就是在非齐次位移边界条件下梁、板和壳类结构挠曲面的一般位移方程.

对于齐次位移边界条件, 方程式(2.5)成为

$$\Delta(\xi, \eta, \zeta) = \iiint_V \frac{\partial}{\partial P} \Gamma_0(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) dV \quad (2.6)$$

从方程式(2.2), (2.3)和(2.5), (2.6)可以看出, 前者为以应力形式表示的协调方程, 而后者为以应力形式表示的挠曲面方程.

如果材料是均匀的, 各向同性而且是服从胡克定律的, 在三维状态下的变形余能成为

$$\Gamma_1 = \frac{1}{2E} \iiint_V [(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - 2\nu(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) + 2(1+\nu) \cdot (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)] dx dy dz$$

在非齐次位移边界条件下, 在单位虚载荷方向上的挠曲面方程成为

$$\Delta(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{E} \iiint_V \{ (\sigma_x \sigma_{x_1} + \sigma_y \sigma_{y_1} + \sigma_z \sigma_{z_1}) - \nu [ (\sigma_x \sigma_{y_1} + \sigma_y \sigma_{x_1}) + (\sigma_y \sigma_{z_1} + \sigma_z \sigma_{y_1}) + (\sigma_z \sigma_{x_1} + \sigma_x \sigma_{z_1}) ] + 2(1+\nu) (\tau_{xy} \tau_{xy_1} + \tau_{yz} \tau_{yz_1} + \tau_{zx} \tau_{zx_1}) \}_{(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)} dx dy dz - \iint_{Q_1} (\bar{u} X_1 + \bar{v} Y_1 + \bar{w} Z_1)_{(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)} dx dy \quad (2.7)$$

在方程式 (2.7) 中,  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz},$  和  $\tau_{zx}$  表示着真实应力, 而具有脚注“1”的诸应力表示着被单位虚载所引起的虚应力, 脚注  $(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$  表示着相应的被积函数项是独立变量  $(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$  的函数.

对于齐次位移边界条件的情况, 在方程式 (2.7) 中的边界积分为零.

### 三、板的挠曲面方程

#### 一) 矩形弹性薄板的挠曲面方程

根据弯曲弹性薄板的经典理论, 相应的应力成分可以写成

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{M_x z}{h^3}, & \sigma_y &= \frac{M_y z}{h^3}, & \sigma_z &= 0; \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} &= \frac{M_{xy} z}{h^3}, & \tau_{xz} &= \frac{Q_x}{2} \frac{1}{h^3} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right), & \tau_{yz} &= \frac{Q_y}{2} \frac{1}{h^3} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right) \end{aligned} \quad (3.1)$$

距中性面为  $z$  的元素上任一点在  $x$  方向和  $y$  方向的位移分别为

$$u = -\frac{\partial w}{\partial x} z, \quad v = -\frac{\partial w}{\partial y} z \quad (3.2)$$

忽略横向切变形对薄板弯曲的影响, 同时将前述方程式 (3.1) 的诸应力值代入方程式 (2.7) 中的体积分中去, 我们求得

$$\begin{aligned} \frac{1}{E} \iiint_V [ (\sigma_x \sigma_{x_1} + \sigma_y \sigma_{y_1}) - \nu (\sigma_x \sigma_{y_1} + \sigma_y \sigma_{x_1}) + 2(1+\nu) \tau_{xy} \tau_{xy_1} ]_{(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)} dx dy dz &= \frac{1}{D(1-\nu^2)} \iint_{Q_1} [ M_x M_{x_1} + M_y M_{y_1} \\ - \nu (M_x M_{y_1} + M_y M_{x_1}) + 2(1+\nu) M_{xy} M_{xy_1} ]_{(x, y; \xi, \eta)} dx dy \end{aligned} \quad (3.3)$$

这里的  $M_x, M_y, M_{xy}$  是真实的弯矩和扭矩, 而  $M_{x_1}, M_{y_1}, M_{xy_1}$  是由作用在流动坐标点  $(\xi, \eta)$  的单位虚载荷所引起的相应的虚弯矩和虚扭矩.

代入式 (3.2) 到方程式 (2.7) 中的面积分同时并注意到

$$\begin{aligned} X &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n \\ Y &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n \\ Z &= \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n \end{aligned}$$

我们得到沿着示于图 1  $AB$  边的积分

$$\begin{aligned} & - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^b \left[ \left( -\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} z \right) (\sigma_{x_1} l) + \left( -\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} z \right) (\tau_{yx_1} l) + \bar{w} (\tau_{zx_1} l) \right] d\Omega \\ & = - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^b \left[ \left( -\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} z \right) \frac{z}{\frac{h^3}{12}} M_{x_1} + \left( -\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} z \right) \frac{z}{\frac{h^3}{12}} (-M_{xy_1}) \right. \\ & \quad \left. + \bar{w} \frac{\frac{1}{2} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right)}{\frac{h^3}{12}} (Q_{x_1}) \right] dy dz = \int_0^b \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} M_{x_1} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} M_{xy_1} - \bar{w} Q_{x_1} \right) dy \\ & = \int_0^b \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) M_{x_1} dy - \int_0^b \bar{w} \left( Q_{x_1} - \frac{\partial M_{xy_1}}{\partial y} \right) dy - \left[ \bar{w} M_{xy_1} \right]_0^b \end{aligned}$$

对于沿  $OC$  边的积分, 用同法我们有

$$- \left[ \int_0^b \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) M_{x_1} dy - \int_0^b \bar{w} \left( Q_{x_1} - \frac{\partial M_{xy_1}}{\partial y} \right) dy - \left[ \bar{w} M_{xy_1} \right]_0^b \right]$$

注意到

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$$

并且求  $AB$  和  $OC$  边界积分的和式, 我们有

$$\begin{aligned} & \left[ \int_0^b \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) M_{x_1} dy \right]_0^a - \left[ \int_0^b \bar{w} \left( \frac{\partial M_{x_1}}{\partial x} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - 2 \frac{\partial M_{xy_1}}{\partial y} \right) dy \right]_0^a - \left[ \left( \bar{w} M_{xy_1} \right) \right]_0^a \end{aligned} \quad (3.4)$$

对于  $CB, OA$  两边, 相应的表达式为

$$\left[ \int_0^a \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right) M_{y_1} dx \right]_0^b - \left[ \int_0^a \bar{w} \left( \frac{\partial M_{y_1}}{\partial y} - 2 \frac{\partial M_{xy_1}}{\partial x} \right) dx \right]_0^b - \left[ \left( \bar{w} M_{xy_1} \right) \right]_0^b \quad (3.5)$$

将式(3.3), (3.4), (3.5)代入方程(2.7), 最后我们得到

$$\begin{aligned} \Delta(\xi, \eta) & = \frac{1}{D(1-\nu^2)} \int_0^a \int_0^b [M_x M_{x_1} + M_y M_{y_1} - \nu(M_x M_{y_1} + M_y M_{x_1}) \\ & \quad + 2(1+\nu)M_{xy} M_{xy_1}]_{(x, y, \xi, \eta)} dx dy + \left[ \int_0^b \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) M_{x_1} dy \right]_0^a \\ & \quad + \left[ \int_0^a \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right) M_{y_1} dx \right]_0^b - \left[ \int_0^b \bar{w} \left( \frac{\partial M_{x_1}}{\partial x} - 2 \frac{\partial M_{xy_1}}{\partial y} \right) dy \right]_0^a \\ & \quad - \left[ \int_0^a \bar{w} \left( \frac{\partial M_{y_1}}{\partial y} - 2 \frac{\partial M_{xy_1}}{\partial x} \right) dx \right]_0^b - \left[ \left( 2\bar{w} \right) \left( M_{xy_1} \right) \right]_0^a \end{aligned} \quad (3.6)$$

这就是具有非齐次位移边界条件以弯矩、扭矩表示的矩形弹性薄板的挠曲面方程。

对于齐次位移边界条件的情况, 相应的挠曲面方程为

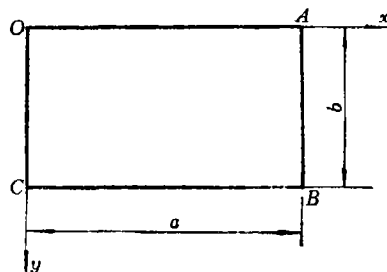


图 1

$$\Delta(\xi, \eta) = \frac{1}{D(1-\nu^2)} \int_0^a \int_0^b [M_x M_{x_1} + M_y M_{y_1} - \nu(M_x M_{y_1} + M_y M_{x_1}) + 2(1+\nu)M_{xy} M_{xy_1}]_{(x,y;\xi,\eta)} dx dy \quad (3.7)$$

易于证明, 对于直梁, 具有非齐次位移边界条件的挠曲轴方程为

$$\Delta(\xi) = \frac{1}{EJ} \int_l (M_x M_{x_1})_{(x,\xi)} dx + \left[ \frac{d\bar{w}}{dx} M_{x_1} - \bar{w} Q_{x_1} \right]_0^l \quad (3.8)$$

对于齐次位移边界条件, 挠曲轴方程成为

$$\Delta(\xi) = \frac{1}{EJ} \int_l (M_x M_{x_1})_{(x,\xi)} dx \quad (3.9)$$

对于弹性薄板, 在挠度和弯矩、扭矩之间具有基本关系

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= -\frac{1}{D(1-\nu^2)} (M_x - \nu M_y) \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= -\frac{1}{D(1-\nu^2)} (M_y - \nu M_x) \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{D(1-\nu)} M_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

下面我们将证明, 式 (3.10) 中的真实挠度  $w$  等于式 (3.6) 或式 (3.7) 中的挠曲方程  $\Delta(\xi, \eta)$ .

将式 (3.10) 代入式 (3.6) 中的面积分, 我们得到

$$\begin{aligned} & \frac{1}{D(1-\nu^2)} \int_0^a \int_0^b [M_x M_{x_1} + M_y M_{y_1} - \nu(M_x M_{y_1} + M_y M_{x_1}) \\ & + 2(1+\nu)M_{xy} M_{xy_1}]_{(x,y;\xi,\eta)} dx dy = \int_0^a \int_0^b \left[ -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} M_{x_1} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} M_{y_1} \right. \\ & + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} M_{xy_1} \left. \right]_{(x,y;\xi,\eta)} dx dy = - \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial^2 M_{x_1}}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 M_{xy_1}}{\partial x \partial y} \right. \\ & + \left. \frac{\partial^2 M_{y_1}}{\partial y^2} \right) (w)_{(x,y;\xi,\eta)} dx dy - \left[ \int_0^b \frac{\partial w}{\partial x} M_{x_1} dy \right]_0^a - \left[ \int_0^a \frac{\partial w}{\partial y} M_{y_1} dx \right]_0^b \\ & + \left[ \int_0^b \left( \frac{\partial M_{x_1}}{\partial x} - 2\frac{\partial M_{xy_1}}{\partial y} \right) (w) dy \right]_0^a + \left[ \int_0^a \left( \frac{\partial M_{y_1}}{\partial y} - 2\frac{\partial M_{xy_1}}{\partial x} \right) (w) dx \right]_0^b \\ & + \left[ \left( 2w M_{xy_1} \right)_0^b \right]_0^a \end{aligned} \quad (3.11)$$

将式 (3.11) 回代到式 (3.6) 中的面积分中去, 由于  $w$  是板的真实位移, 因此沿板边界的全部积分为零, 最后我们得到

$$\Delta(\xi, \eta) = - \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial^2 M_{x_1}}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 M_{xy_1}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{y_1}}{\partial y^2} \right) (w)_{(x,y;\xi,\eta)} dx dy \quad (3.12)$$

注意到  $M_{x_1}$ ,  $M_{y_1}$ ,  $M_{xy_1}$  表示着作用于流动坐标  $(\xi, \eta)$  处的单位虚载荷所产生的弯矩和扭矩, 并且应用积分中值定理, 我们得到

$$\Delta(\xi, \eta) = w(\xi, \eta) \quad (3.13)$$

对于直梁, 同样可证明

$$\Delta(\xi) = w(\xi) \quad (3.14)$$

## 二) 矩形厚板的挠曲面方程

对于厚板, 必须考虑横向切变形对板的弯曲的影响. 采用了具有三个广义位移的板的弯曲理论.

对于板的弯曲变形曾假设, 变形前垂直于中面的直线段在变形后仍保持为直线段. 这个假设导致三个位移分量被三个广义位移来表示, 即

$$u(x, y, z) = -z\psi_x(x, y)$$

$$v(x, y, z) = -z\psi_y(x, y)$$

$$w(x, y, z) = w(x, y)$$

诸应力分量与相应的弯矩、扭矩和切力之间的关系与式 (3.1) 相同.

对于均匀、各向同性且等厚度的厚板, 内矩、切力和三个广义位移之间的关系为

$$M_x = -D \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right)$$

$$M_y = -D \left( \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right)$$

$$M_{xy} = -\frac{1}{2} (1-\nu) D \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right)$$

$$Q_x = C \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \psi_x \right)$$

$$Q_y = C \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \psi_y \right)$$

下面我们将不加证明而直接给出具有非齐次位移边界条件矩形厚板的挠曲面方程和转角方程. 挠曲面方程为

$$\begin{aligned} w(\xi, \eta) = & \frac{1}{D(1-\nu^2)} \int_0^a \int_0^b [M_x M_{x_1} + M_y M_{y_1} - \nu(M_x M_{y_1} + M_y M_{x_1}) \\ & + 2(1+\nu)M_{xy} M_{xy_1}]_{(x, y; \xi, \eta)} dx dy + \frac{1}{C} \int_0^a \int_0^b (Q_x Q_{x_1} + Q_y Q_{y_1})_{(x, y; \xi, \eta)} dx dy \\ & + \left[ \int_0^b \bar{\psi}_x M_{x_1} dy \right]_0^a + \left[ \int_0^a \bar{\psi}_y M_{y_1} dx \right]_0^b + \left[ \int_0^b \bar{\psi}_y M_{xy_1} dy \right]_0^a \\ & + \left[ \int_0^a \bar{\psi}_x M_{xy_1} dx \right]_0^b - \left[ \int_0^b \bar{w} Q_{x_1} dy \right]_0^a - \left[ \int_0^a \bar{w} Q_{y_1} dx \right]_0^b \end{aligned} \quad (3.15)$$

在  $x$  方向的转角方程为

$$\begin{aligned} \psi_x(\xi, \eta) = & \frac{1}{D(1-\nu^2)} \int_0^a \int_0^b [M_x M_{x m_1} + M_y M_{y m_1} - \nu(M_x M_{y m_1} \\ & + M_y M_{x m_1}) + 2(1+\nu)M_{xy} M_{x y m_1}]_{(x, y; \xi, \eta)} dx dy \\ & + \frac{1}{C} \int_0^a \int_0^b (Q_x Q_{x m_1} + Q_y Q_{y m_1})_{(x, y; \xi, \eta)} dx dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[ \int_0^b \bar{\psi}_x M_{x_1} dy \right]_0^a + \left[ \int_0^a \bar{\psi}_y M_{y_1} dx \right]_0^b \\
 & + \left[ \int_0^b \bar{\psi}_y M_{x_1} dy \right]_0^a + \left[ \int_0^a \bar{\psi}_x M_{y_1} dx \right]_0^b \\
 & - \left[ \int_0^b \bar{w} Q_{x_1} dy \right]_0^a - \left[ \int_0^a \bar{w} Q_{y_1} dx \right]_0^b
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

易于写出  $\psi_y$  方程, 故省略.

对于具有非齐次位移边界条件考虑横向切变形影响的直梁, 其挠曲轴方程为

$$w(\xi) = \int_l \left( \frac{1}{EJ} M_x M_{x_1} + \frac{1}{C} Q_x Q_{x_1} \right)_{(x, \xi)} dx + \left( \bar{\psi} M_{x_1} - \bar{w} Q_{x_1} \right)_0^l \tag{3.17}$$

转角方程为

$$\psi(\xi) = \int_l \left( \frac{1}{EJ} M_x M_{x_1} + \frac{1}{C} Q_x Q_{x_1} \right)_{(x, \xi)} dx + \left( \bar{\psi} M_{x_1} - \bar{w} Q_{x_1} \right)_0^l \tag{3.18}$$

如果位移边界条件是齐次的, 那么在诸方程 (3.15) — (3.18) 中的边界积分应该为零.

作为前述理论的初步应用, 让我们求解一直梁的挠曲轴方程, 这直梁一端简支, 另一端为弹性支持, 距离简支端为  $a$  的距离作用一集中力  $P$  (图 2).

解: 首先, 我们求  $OA$  段的挠曲轴方程. 实际载荷的作用示于图 2 (a), 相应的弯矩分别为

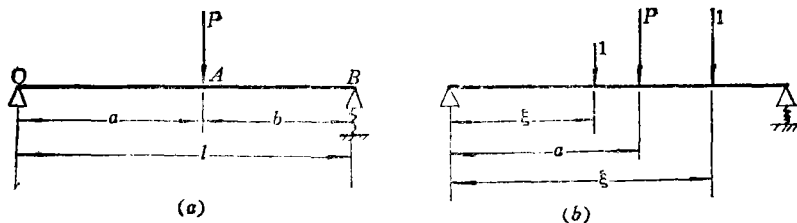


图 2

$$\left. \begin{aligned}
 M_x &= P \frac{b}{l} x, & 0 \leq x \leq a \\
 M_x &= P \frac{b}{l} x - P(x-a), & a \leq x \leq l
 \end{aligned} \right\} \tag{3.19}$$

作用于  $OA$  段内流动坐标点  $\xi$  的单位虚载荷示于图 2 (b), 相应的虚弯矩分别为

$$\left. \begin{aligned}
 M_{x_1} &= \frac{l-\xi}{l} x, & 0 \leq x \leq \xi \\
 M_{x_1} &= \frac{l-\xi}{l} x - (x-\xi), & \xi \leq x \leq l
 \end{aligned} \right\} \tag{3.20}$$

在梁的右端, 挠度和切力分别为

$$\bar{w}(l) = \frac{a}{lk} P, \quad Q_{x_1}(l) = -\frac{\xi}{l} \tag{3.21}$$

将式 (3.19) — (3.21) 代入方程 (3.8), 我们求得  $OA$  段的挠曲轴方程如下

$$w_1(\xi) = \frac{1}{EJ} \left\{ \int_0^\xi \left( \frac{Pb}{l}x \right) \left( \frac{l-\xi}{l}x \right) dx + \int_\xi^a \left( \frac{Pb}{l}x \right) \left[ \frac{l-\xi}{l}x - (x-\xi) \right] dx \right. \\ \left. + \int_a^l \left[ P\frac{b}{l}x - P(x-a) \right] \left[ \frac{l-\xi}{l}x - (x-\xi) \right] dx \right\} - P \frac{q}{l^2k} (-1) \frac{\xi}{l} \quad (3.22)$$

对式 (3.22) 积分合并  $\xi$  的同次幂, 我们得到

$$w_1(\xi) = \frac{Pb\xi}{6EJl} (l^2 - b^2 - \xi^2) + P \frac{q}{l^2k} \xi \quad 0 \leq \xi \leq a \quad (3.23a)$$

同法可求得  $AB$  段的挠曲轴方程

$$w_2(\xi) = \frac{1}{EJ} \left\{ \int_0^a \left( \frac{Pb}{l}x \right) \left( \frac{l-\xi}{l}x \right) dx + \int_a^\xi \left[ P\frac{b}{l}x - P(x-a) \right] \left( \frac{l-\xi}{l}x \right) dx \right. \\ \left. + \int_\xi^l \left[ P\frac{b}{l}x - P(x-a) \right] \left[ \frac{l-\xi}{l}x - (x-\xi) \right] dx \right\} - P \frac{a}{l^2k} (-\xi) \\ = \frac{Pb\xi}{6EJl} (l^2 - b^2 - \xi^2) + \frac{P}{6EJ} (\xi - a)^3 + P \frac{a}{l^2k} \xi \quad a \leq \xi \leq l \quad (3.23b)$$

如果我们对方程  $w_1(\xi)$  [或者  $w_2(\xi)$ ] 取  $\xi$  的导数, 或者我们在  $OA$  段 (或  $AB$  段) 的一流动坐标点  $\xi$  外施加一单位虚弯矩均可求得转角方程

$$\left. \begin{aligned} \theta_1(\xi) &= \frac{Pb}{6EJl} (l^2 - b^2 - 3\xi^2) + \frac{Pa}{l^2k}, & 0 \leq \xi \leq a \\ \theta_2(\xi) &= \frac{Pb}{6EJl} (l^2 - b^2 - 3\xi^2) + \frac{P}{2EJ} (\xi - a)^2 + \frac{Pa}{l^2k} & a \leq \xi \leq l \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

或者

其次, 我们来计算一如图 3(a) 所示细长直梁的挠曲轴方程。

解: 将此梁的弯矩方程展成三角级数

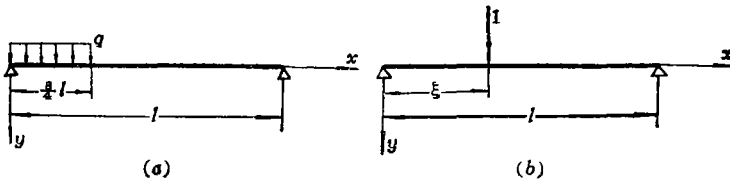


图 3

$$M_x = \sum_{m=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{2ql^2}{(m\pi)^3} \left( 1 - \cos \frac{m\pi}{4} \right) \sin \frac{m\pi x}{l} \quad (3.25)$$

如图 3(b) 所示, 由作用于流动坐标点  $\xi$  处的单位虚载荷所引起的弯矩方程为

$$M_{x_1} = \sum_{m=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{2l}{(m\pi)^2} \sin \frac{m\pi\xi}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} \quad (3.26)$$

将式 (3.25) 和式 (3.26) 代入式 (3.8), 并注意到式 (3.8) 中的边界积分为零, 挠曲轴的方程为



$$\begin{aligned}
 w(\xi) &= -\frac{1}{EJ} \int_0^l (M_x M_{x_1})_{(x;\xi)} dx \\
 &= -\frac{1}{EJ} \int_0^l \sum_{m=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{2ql^2}{(m\pi)^3} \left(1 - \cos \frac{m\pi}{4}\right) \sin \frac{m\pi x}{l} \\
 &\quad \cdot \sum_{m=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{2l}{(m\pi)^2} \sin \frac{m\pi \xi}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} dx \\
 &= \frac{1}{EJ} \sum_{m=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{2ql^4}{(m\pi)^5} \left(1 - \cos \frac{m\pi}{4}\right) \sin \frac{m\pi \xi}{l}
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

对于中点挠度取级数的前二项，则得

$$w\left(\frac{l}{2}\right) = 0.00187 \frac{ql^4}{EJ} \tag{3.28}$$

这与材料力学方法所得的结果  $w\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{23ql^4}{12288EJ}$  是相同的。

当简支梁在A点作用有集中载荷P时，其弯矩方程为

$$M_x = \sum_{m=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{2Pl}{(m\pi)^2} \sin \frac{m\pi a}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} \tag{3.29}$$

当简支梁在B点作用有集中弯矩M<sub>0</sub>时，其弯矩方程为

$$M_x = \sum_{m=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{2M_0}{m\pi} \cos \frac{m\pi b}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} \tag{3.30}$$

在这两种情况下，据方程(3.26)，(3.29)，(3.30)和(3.8)就可求出相应的挠曲轴方程。

应该指明，直梁某一点挠度的正负号取决于单位虚载荷的方向，正号则表示挠度的方向和虚载荷的方向彼此相同，负号则表示方向相反。

#### 四、功的互等定理的推广应用

下面我们将推广功的互等定理的应用于求解平板和直梁的挠曲方程。

我们假设，于中面流动坐标点(ξ, η)处作用有单位虚载荷的简支矩形板为第一系统，具有四边固定的受真实载荷作用的同一矩形板为第二系统，于此两者之间应用互等定理，我们得到

$$\begin{aligned}
 w_2(\xi, \eta) &= \int_0^a \int_0^b q_2(x, y) w_1(x, y; \xi, \eta) dx dy + \sum_{i=1}^m P_{2i} w_1(x_i, y_i; \xi, \eta) \\
 &\quad + \sum_{j=1}^n M_{2jx} \left[ \frac{\partial}{\partial x} w_1(x, y; \xi, \eta) \right]_{x=x_j} + \sum_{k=1}^o M_{2y} \left[ \frac{\partial}{\partial y} w_1(x, y; \xi, \eta) \right]_{y=y_k} \\
 &\quad - \left[ \int_0^b M_{2x} \frac{\partial}{\partial x} w_1(x, y; \xi, \eta) dy \right]_0^a - \left[ \int_0^a M_{2y} \frac{\partial}{\partial y} w_1(x, y; \xi, \eta) dx \right]_0^b
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

这就是第二系统挠曲面的方程。

如果我们取在流动坐标点  $\xi$  处作用有单位虚载荷的简支梁为第一系统，而具有实际载荷作用的两端固定的同一直梁为第二系统，对于第二系统的挠曲轴方程，我们有

$$w_2(\xi) = \int_0^l q_2(x) w_1(x; \xi) dx + \sum_{i=1}^m P_{2i} w_1(x_i; \xi) + \sum_{j=1}^n M_{2j} \left[ \frac{d}{dx} w_1(x; \xi) \right]_{x=x_j} - \left[ M_2 \frac{d}{dx} w_1(x; \xi) \right]_0^l \quad (4.2)$$

下面，举一简例让我们来说明互等定理的应用是如何推广的。

一长度为  $l$  受集度为  $q$  的均布载荷作用的悬臂梁示于图 4(a)。在流动坐标点  $\xi$  处作用有单位虚载荷的同一悬臂梁示于图 4(b)。

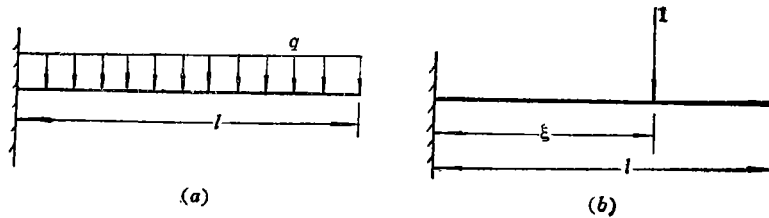


图 4

对于示于图 4(b) 的系统，我们分别有

$$\left. \begin{aligned} w_1(x; \xi) &= \frac{\xi}{2EJ} \left( x^2 - \frac{x^3}{3\xi} \right), \quad 0 \leq x \leq \xi \\ w_1(x; \xi) &= \frac{\xi^3}{3EJ} + (x - \xi) \frac{\xi^2}{2EJ}, \quad \xi \leq x \leq l \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

于图 4(a) 和 (b) 之间应用互等定理，我们得到

$$\begin{aligned} w_2(\xi) &= \int_0^\xi q \frac{\xi}{2EJ} \left( x^2 - \frac{1}{3\xi} x^3 \right) dx + \int_\xi^l q \left[ \frac{\xi^3}{3EJ} + (x - \xi) \frac{\xi^2}{2EJ} \right] dx \\ &= \frac{q\xi^4}{24EJ} - \frac{q\xi^3 l}{6EJ} + \frac{q\xi^2 l^2}{4EJ} \end{aligned} \quad (4.4)$$

这就是示于图 4(a) 的第二系统的真实挠曲轴方程。

### 参 考 文 献

1. Лейбензон, Л. С., *Вариационные Методы Решения Задач Теории Упругости*, Издательство Академии наук СССР, Москва (1951). (中译本, 叶开沅, 卢文达, 《弹性力学问题的变分法》, 科学出版社, 1958).
2. 胡海昌, 《变分法和结构设计——弹性力学的变分原理和它们的应用》(待出版).
3. Timoshenko, S. and Woinowsky-Krieger., *Theory of Plates and Shells*, second edition, (1959).
4. Langhaar, Henry L., *Energy Methods in Applied Mechanics*, (1969).
5. Timoshenko, S., *Strength of Materials*, Part I.

## Energy Theorems for Solving Equations of Deflections

Fu Bao-lian

*(Northeast Heavy Machinery Institute, Heilongjiang)*

### Abstract

In this paper the unit-dummy-load method is generalized on the basis of Castigliano's theorem. On these grounds the general equations of deflection surfaces of the structures, such as a kind of beams, plates and shells, are directly derived by the force method.

We derived the equations of the deflection surface of the rectangular thin plates and thick plates considering the effect of transverse shearing deformations with the inhomogeneous displacement boundary conditions. At the same time we give the equations of deflection axes of the corresponding straight beams.

The applications of the reciprocal theorem are also generalized.

Three simple calculated examples are given.