应用数学和力学，第2卷第6期（1981年12月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

特征方程的常数项的稳定区确定法

汪　家　诛

（浙江大学，1980年3月1日收到）

摘　要

应用多项式的增广图示知识，可以得到确定特征方程常数项 a_n 的稳定区的准则．由于 a_n 本身不参加计算，而且得到的是 a_n 稳定区，不只是一组系数的判别，所以这个判别线性系统稳定性的方法具有一定的优点．对于特征方程次数 $n\leqslant10$ 都能用公式计算．当 $n=5$ 或 6 时判别尤为便捷．若 $n\geqslant11$，不得不依靠解数字方程才行．

一、导　　论

从特征方程的系数直接判别线性系统稳定性的方法有 Hermité (1854)[1]，Routh (1877)[2]，Hurwitz (1895)[3]，Nyquist (1932)[4]，Михайлов (1938)[5] 等大家熟知的方法．现在本文从多项式的增广图示知识[6]也得到一种稳定性判别法．这个方法的基本算式和 Михайлов 的一对方程是通同的．他的方法要解两个高次方程，而本文只需求解一个；他只对一组已知的系数加以判别，而本文得到了 a_n 的稳定区．

关于确定稳定区域的 D 划分边界法，它是一种图解法．本文方法虽由图示知识得来，但应用时已经是一种纯计算法．

关于 Михайлов 所用的一对方程和本文算式的联系将在（五）中说明．

二、确定a_n稳定区的准则

设线性系统的特征方程为

$$a_0s^n+a_1s^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}s+a_n=0 \tag{2.1}$$

上式各系数必须都大于零，否则系统不稳，这是常识．故今后假定 $a_i>0$ $(i=0,1,2,\cdots n)$．

自 (2.1) 的系数可写出下列两个算式

$$a_{n-1}-a_{n-3}y^2+a_{n-5}y^4+\cdots+\begin{cases}(-1)^m a_0y^{2m}=0 & \text{当}n=2m+1\\(-1)^m a_1y^{2m}=0 & \text{当}n=2m+2\end{cases} \tag{2.2}$$

$$R=y^2\left[a_{n-2}-a_{n-4}y^2+\cdots+\begin{Bmatrix}(-1)^m a_1y^{2m-2}\\(-1)^{m-1}a_0y^{2m}\end{Bmatrix}\right]\begin{matrix}\text{当 }n=2m+1\\\text{当 }n=2m+2\end{matrix} \tag{2.3}$$

现在先叙述确定a_n稳区的准则，其理由将在（四）中说明．

先解y^2的m次方程(2.2)，若系统稳定则有

(i) 系统稳定时，方程(2.2)必有m个相异正根.

将解得的m个正根依大小排列，并附足标

$$0<y_1^2<y_2^2<\cdots\cdots<y_{m-1}^2<y_m^2$$

将y_i^2代入(2.3)，得相应的R_i. 设R_{0m}是所有奇足标R_1，R_3，R_5……中的最小者；R_{eM}是所有偶足标R_2，R_4，R_6……中的最大者. 则系统稳定时又必须适合下列二个条件：

(ii) $R_{0m}>0$， (iii) $R_{0m}>R_{eM}$

当上述三个必须条件满足以后，a_n的稳定区一定存在，而且可按下列两条原则确定：

A) 若$R_{eM}>0$，则稳定区为(R_{eM}, R_{0m})

B) 若$R_{eM}\leqslant 0$，则稳定区为$(0, R_{0m})$.

三、特征方程次数n⩽10的a_n稳定区

略去$n=1$及2两种简单情况

a) n=3

(2.2)，(2.3)两式分别成为

$$a_2-a_0y^2=0 \qquad R=a_1y^2$$

自第一式得$y^2=a_2/a_0$，代入第二式得

$$a_3\equiv R_1=a_1a_2/a_0>0 \qquad \text{稳定区：}(0, a_1a_2/a_0)$$

这和Routh-Hurwitz条件$\Delta_2=a_1a_2-a_0a_3>0$相合.

b) n=4

(2.2)，(2.3)两式为

$$a_3-a_1y^2=0 \qquad R=y^2(a_2-a_0y^2)$$

自第一式得$y^2=a_3/a_1$，代入第二式得

$$a_4\equiv R_1=\frac{a_3}{a_1}\left(a_2-a_0\frac{a_3}{a_1}\right)$$

要$R_1>0$，必须$\Delta_2>0$.这条件满足后一定存在a_4的稳区：$\left[0,\frac{a_3}{a_1}\left(a_2-a_0\frac{a_3}{a_1}\right)\right]$.这和Routh-Hurwitz条件一致

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}>0$$

c) n=5

$$a_4-a_2y^2+a_0y^4=0 \qquad R=y^2(a_3-a_1y^2)$$

第一式能解出两个实根的条件为

(i) $\Delta=a_2^2-4a_0a_4>0$

上列条件满足后，必然可得两个正根：

$$y_1^2=\frac{1}{2a_0}\left(a_2-\sqrt{a_2^2-4a_0a_4}\right), \quad y_2^2=\frac{1}{2a_0}\left(a_2+\sqrt{a_2^2-4a_0a_4}\right)$$

第二式可用第一式降低对y^2的次数，而可写为

$$R=\frac{1}{a_0}[a_1a_4-(a_1a_2-a_0a_3)y^2]$$

要条件(iii)满足，即$y_1^2<y_2^2$时有$R_1>R_2$，那么自上式得必须条件$\Delta_2>0$.

条件(ii)成为 $R_1=(a_1a_4-\Delta_2y_1^2)/a_0>0$

这三个条件满足后，即可按(二)中A)，B)确定a_5的稳区.

例一. $s^5+2s^4+5s^3+9s^2+4s+a_5=0$

解：(i) $\Delta=9>0$，(iii) $\Delta_2=1>0$，$y_1^2=1$，$y_2^2=4$

$R_1=7$，$R_2=4$. 于是a_5的稳区为(4,7)

若$a_5=6$，稳定；若 $a_5=3$ 或 8，系统不稳.

d) n=6

$$a_5-a_3y^2+a_1y^4=0 \qquad R=y^2(a_4-a_2y^2+a_0y^4)$$

仿$n=5$，可得必须条件(i) $a_3^2-4a_1a_5>0$.

第二式用第一式接连二次降低对y^2的次数得

$$R=\frac{1}{a_1^2}(a_5\Delta_2-y^2\Delta_3') \qquad \Delta_3'=\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}$$

要条件(ii)，(iii)同时成立，必须$\Delta_2>0$，$\Delta_3'>0$.这三个条件满足后即可按(二)中(A)，(B)定稳区.

e) n=7

$$a_0y^6-a_2y^4+a_4y^2-a_6=0 \tag{3.1}$$

$$R=y^2(a_5-a_3y^2+a_1y^4) \tag{3.2}$$

令 $y^2=t+a_2/3a_0$以化去(3.1)式的第二项，得

$$t^3+3pt+2q=0 \tag{3.3}$$

式中

$$p=\frac{1}{3a_0}\left(a_4-\frac{a_2^2}{3a_0}\right) \tag{3.4}$$

$$q=\frac{1}{2a_0}\left(\frac{a_2a_4}{3a_0}-a_6-\frac{2}{27}\frac{a_2^3}{a_0^2}\right) \tag{3.5}$$

要(3.3)有三个实根，必须$p<0$及$\Delta\equiv q^2+p^3<0$. 这两式成立后，依Descartes符号规则可知(3.1)式一定有三个相异正根y^2.

要求y^2，先算 $\varphi=\cos^{-1}(-q/\sqrt{|p^3|})$ (3.6)

再用下式算y^2，

$$y^2=\frac{a_2}{3a_0}+\frac{2}{3a_0}\sqrt{a_2^2-3a_0a_4}\cos\frac{2\pi k+\varphi}{3} \quad k=0,1,2 \tag{3.7}$$

将y_i^2代入(3.2)得R_i，即可按(二)中(ii)，(iii)判别是各R_i是否适合稳定要求，不必再进行分析讨论.

例2. $s^7+2.6s^6+7.14s^5+10.9s^4+14.3s^3+11.8s^2+8.12s+R=0$

解：为了和其他方法比较，列出重要算式和结果.

$$p=\frac{1}{3}\left(14.3-\frac{7.14^2}{3}\right)=-0.89773<0$$

$$q=\frac{1}{2}\left(\frac{7.14\times14.3}{3}-8.12-\frac{2}{27}\times7.14^3\right)=-0.52427$$

$$\Delta=q^2+p^3=-0.44864<0$$

$$\cos\varphi=-(-0.52427)/\sqrt{0.89773^3}=0.61635$$

$$\varphi=51.9492^\circ$$

$$y^2=\frac{7.14}{3}+\frac{2}{3}\sqrt{7.14^2-3\times14.3}\cos\left(120^\circ k+\frac{\varphi}{3}\right)\quad k=0,1,2$$

$$y_1^2=0.98697\qquad y_2^2=1.96392\qquad y_3^2=4.1891$$

$$R_1=3.5281\qquad R_2=0.82764\qquad R_3=49.285$$

因此$R_{0m}=R_1>R_2=R_{eM}$. 稳区(0.82764, 3.5281)

f) n=8

$$a_1y^6-a_3y^4+a_5y^2-a_7=0$$

$$R=y^2(a_6-a_4y^2+a_2y^4-a_0y^6)$$

比较e), f)第一式的系数，可知系数代换式为$a_i\to a_{i+1}$. 于是对应于(3.4)、(3.5)、(3.7)，有

$$p=\frac{1}{3a_1}\left(a_5-\frac{a_3^2}{3a_1}\right)$$

$$q=\frac{1}{2a_1}\left(\frac{a_3a_5}{3a_1}-a_7-\frac{2}{27}\frac{a_3^3}{a_1^2}\right)$$

$$y^2=\frac{a_3}{3a_1}+\frac{2}{3a_1}\sqrt{a_3^2-3a_1a_5}\cos\frac{2\pi k+\varphi}{3}$$

其余可仿e)进行.

g) n=9或10

第一式可联合写为

$$y^8-\beta_1y^6+\beta_2y^4-\beta_3y^2+\beta_4=0\tag{3.8}$$

其中 $\beta_i=\frac{a_{2i}}{a_0}$ 当$n=9$; $\beta_i=\frac{a_{2i+1}}{a_1}$ 当$n=10$.

令
$$g=y^2-\frac{\beta_1}{4}\tag{3.9}$$

则(3.8)化成 $g^4+Ag^2+Bg+C=0$ (3.10)

式中
$$A=\beta_2-\frac{3\beta_1^2}{8}\qquad B=\frac{1}{2}\beta_1\beta_2-\frac{1}{8}\beta_1^3-\beta_3$$

$$C=\beta_4-\frac{1}{4}\beta_1\beta_3+\frac{1}{16}\beta_1^2\beta_2-\frac{3}{256}\beta_1^4$$

现在用Euler法解(3.10). 令

$$g=\sqrt{u_1}+\sqrt{u_2}+\sqrt{u_3} \tag{3.11}$$

则u_1，u_2，u_3为下列三次方程的三个根

$$u^3+\frac{A}{2}u^2+\frac{1}{4}\left(\frac{A^2}{4}-C\right)u-\frac{B^2}{64}=0 \tag{3.12}$$

再令 $t=u+\dfrac{A}{6}$，则上式化成(3.3)，而p，q为

$$p=-\frac{1}{12}\left(\beta_4+\frac{1}{12}\beta_2^2-\frac{1}{4}\beta_1\beta_3\right) \tag{3.13}$$

$$q=\frac{1}{16}\left[\frac{1}{3}\beta_4\left(\beta_2-\frac{3}{8}\beta_1^2\right)+\frac{\beta_3}{8}\left(\frac{1}{3}\beta_1\beta_2-\beta_3\right)-\frac{1}{108}\beta_2^3\right] \tag{3.14}$$

以此p，q求解(3.3)，得t_1，t_2，t_3，再化成u_1，u_2，u_3，于是可得(3.8)式的四个y^2根

$$y^2=\pm\sqrt{u_a}\pm\sqrt{u_b}-\frac{B}{8(\pm\sqrt{u_a})(\pm\sqrt{u_b})}+\frac{\beta_1}{4} \tag{3.15}$$

u_a，u_b是三个u中的任意二个．由根号前的正负号不同得四个y^2根．将y_i^2代入第二式算出R_i以确定a_9或a_{10}的稳区．

例3． $s^{10}+2s^9+6.209s^8+10.532s^7+13.7458s^6+19.467s^5+12.84s^4+14.8844s^3+4.2569s^2+3.94177s+R=0$

解:

$$3.9418-14.8844y^2+19.467y^4-10.532y^6+2y^8=0 \tag{3.16}$$

$$R=y^2[4.2569-12.84y^2+13.7458y^4-6.209y^6+y^8] \tag{3.17}$$

由(3.16)和(3.13)算p

$$p=-\frac{1}{12}\left[1.9709+\frac{1}{12}(9.7335)^2-\frac{1}{4}\times5.266\times7.4422\right]$$
$$=-0.0056899<0$$

自(3.14)算q得 $q=-2.995\times10^{-4}$

$$\Delta=q^2+p^3=-9.451\times10^{-8}<0$$

$$A=-0.665533 \qquad B=-0.067665$$

$$u=t-\frac{A}{6}=t+0.110922$$

$$\cos\varphi=-q/\sqrt{|p^3|}=\frac{2.995\times10^{-4}}{\sqrt{(5.6899\times10^{-3})^3}}=0.69781$$

$$\varphi=45^\circ.7481$$

$$t=2\sqrt{-p}\cos\frac{360^\circ k+\varphi}{3}=0.15086\cos(120^\circ k+15.2493^\circ)$$

$$t_1=0.14555 \qquad t_2=-0.10714 \qquad t_3=-0.038412$$

$$u_1=0.25647 \qquad u_2=0.0037827 \qquad u_3=0.07251$$

$$y^2=\pm\sqrt{u_a}\pm\sqrt{u_b}+\frac{0.0084581}{(\pm\sqrt{u_a})(\pm\sqrt{u_b})}+1.3165$$

$$y_1^2=0.62293 \quad y_2^2=1.0178 \quad y_3^2=1.4921 \quad y_4^2=2.1472$$

$$R_1=0.15081 \quad R_2=-0.04641, \quad R_3=0.04809 \quad R_4=-0.31967$$

于是 $R_{0m}=R_3$，$R_{eM}=R_2=-0.04641<0$

所以a_{10}的稳定区为(0，0.04809)

四、a_n稳定区判别理论

线性系统的稳定性由特征方程各根的实数部的正负号决定，只有当所有各根的实数部都为负值才稳定．研究

$$R(\equiv a_n)=-(a_0s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-2}s^2+a_{n-1}s) \qquad (4.1)$$

的增广图示的$(x,\ y)$和$(x,\ R)$曲线，能提供在$x>0$半平面中复根的分布情况．由于$(x,\ y)$曲线对x轴成对称，因此只要研究它在第一象限的图线．(4.1)的实曲线R_r当x自0增至$+\infty$时，R自0单调地趋于$-\infty$．所以a_n如果存在稳区，一定在$R>0$这边．$(x,\ R)$图中的复根曲线R_c在$x=0$直线上的R_c值是决定R稳区的重要数据．为此令文献[6]中基本算式中的$x=0$．由于

$$R_r\equiv\alpha^{(n)}(0)=0,\quad \alpha^{(t)}(0)=-a_t \quad (t\neq n)$$

[6]中(1.8)，(1.9)两式便成为本文(2.2)和(2.3)两式．

(4.1)的图线当$|s|\to\infty$，它的渐近式为

$$R=-a_0\left(s+\frac{a_1}{na_0}\right)^n \qquad (4.2)$$

这式的$(x,\ y)$及$(x,\ R)$图线如图1所示．$(x,\ y)$图的根轨迹是汇交于$c\left(-\frac{a_1}{na_0},\ 0\right)$的$n$根直线，其中只有$m$根直线穿过第一象限，与$y>0$的$iy$轴相交于$m$点，不论$n=2m+1$或$n=2m+2$．对$x>0$的$x$轴垂线$x=k(>0)$也同样交于$m$点．

对于(4.1)的图线，当$x\to+\infty$与(4.2)的图线逼近．因此对充分大的k，(4.1)的根轨迹也与$x=k$相交于m点．将k值变小，则交点数可能减少．现在说明，当$k\to0$时，如果交点数少于m，那么系统必然是不稳的．因为交点数的减少一定是由于下列二种情况之一产生的．

(Ⅰ) 两支根轨迹在A点相合为一整支曲线，如图2(Ⅰ)(a)．此时根轨迹方程在$x>0$的半平面$x=k_A$处有重根．对应的$(x,\ R)$图在$x>0$有整支复根曲线R_c自$-\infty$至$+\infty$，如图2(Ⅰ)(b)，因此系统不稳．

(Ⅱ) 有一支根轨迹对称地横跨于$x>0$的x轴上，即与正x轴有一交点B，对应的$(x,\ R)$图的实曲线R_r在$x=k_B$处有一极大值．我们知道，增广图在B'点出发必有一条R_c线趋于$R=+\infty$，如图2(Ⅱ)(b)．于是这系统也不稳．

事实上若各a_i都大于零，那么在$x>0$半平面中$\frac{dR_r}{dx}<0$．所以这情况就不会出现．

综合以上两种情况，必须条件(i)成立．

对稳定系统而言，iy轴上$y_1^2<y_2^2<\cdots<y_m^2$的顺序与在$x=k>0$的交点顺序相同．因为若有变更，在$x>0$就有二支根轨迹相交于D，于是对应的$(x,\ R)$图线就有两支R_c线在$x>0$的$x=k_D$处相交，这样系统便不稳，如图3．

(4.2)的$(x,\ R)$图，按[6]中二项式图线公式可知各R_c线在R轴上的交点顺序为

$$\cdots>R_5>R_3>R_1>0>R_2>R_4>R_6>\cdots \qquad (4.3)$$

(4.1)的$(x,\ R)$图，各R_c在R轴上也有m个交点，它们的顺序可能和上列顺序不同．但可以证明，对于$x>0$，中心点c在x负轴上的情况下，R_{c_1}，R_{c_3}，…是x的单调升函数；

R_{c_2}，$R_{c_4}\cdots$是 x 的单调降函数．现在以两种观点加以说明．

(a) 几何法——在 $x>0$，根轨迹没有重根，那么任两支 R_c 线不会在 $x>0$ 连接成一支线，即使整个 (x, R) 平面内有这种情况，这 R_c 线亦已被 R 轴所截断．这样每一支 R_c 线在 $x>0$ 一定是单调升或降，因为如果出现如图 4 那样有极值点的 R_c 线，则 R 变大经过 β 时，根将突然减少四个，经过 α 时突然增加四个．这和增广图示"除中心线上以外，能保持根数不变"的基本特性不符．

至于奇足标 R_c 是单调升，偶足标 R_c 是单调降，那是由于 (4.1) 是 (4.2) 的渐近式的缘故．

(b) 分析法——先讨论 $n=2m+1$ 的情况，将[6]中增广图示基本算式缩写成

$$\Phi\equiv\sum_{k=0}^{m}(-1)^k y^{2k}\alpha^{(n-2k-1)}=0 \tag{4.4}$$

$$R_c=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k y^{2k}\alpha^{(n-2k)} \tag{4.5}$$

将上二式对 x 求导数，并应用关系式

$$\frac{d}{dx}\alpha^{(i)}=(n-i+1)\alpha^{(i-1)} \tag{4.6}$$

得
$$\frac{dR_c}{dx}=\sum_{k=1}^{m}(-1)^k 2ky^{2k-1}\frac{dy}{dx}\alpha^{(n-2k)}+\sum_{k=0}^{m}(-1)^k y^{2k}(2k+1)\alpha^{(n-2k-1)})$$

$$\frac{d\Phi}{dx}=\sum_{k=1}^{m}(-1)^k 2ky^{2k-1}\frac{dy}{dx}\alpha^{(n-2k-1)})+\sum_{k=0}^{m}(-1)^k y^{2k}(2k+2)\alpha^{(n-2k-2)}=0$$

将上式第二项用代替 $k+1\to k$，然后解出$\frac{dy}{dx}$，将它代入$\frac{dR_c}{dx}$，并考虑到 $k=m+1$ 时，$\alpha^{(n-2k)}$不存在（即总和只到 m 为止），得

$$\frac{dR_c}{dx}=\frac{2\left[\sum_{k=1}^{m}(-1)^k ky^{2k-2}\alpha^{(n-2k)}\right]^2}{\sum_{k=1}^{m}(-1)^k ky^{2k-2}\alpha^{(n-2k-1)}}+\sum_{k=0}^{m}(-1)^k y^{2k}(2k+1)\alpha^{(n-2k-1)})$$

又将上式末项折成两项：

$$\sum_{k=1}^{m}(-1)^k y^{2k}(2k+1)\alpha^{(n-2k-1)}+\alpha^{(n-1)}$$

应用$\Phi=0$，有 $\alpha^{(n-1)}=-\sum_{k=1}^{m}(-1)^k y^{2k}\alpha^{(n-2k-1)}$

于是

$$\frac{dR_c}{dx}=\frac{2\left[\sum\limits_{k=1}^{m}(-1)^k y^{2k-2}a^{(n-2k)}\right]^2+2y^2\left(\frac{\partial\Phi}{\partial(y^2)}\right)^2}{\frac{\partial\Phi}{\partial(y^2)}}$$

式中

$$\frac{\partial\Phi}{\partial(y^2)}=\sum_{k=1}^{m}(-1)^k y^{2k-2}a^{(n-2k-1)}$$

同样对于 $n=2m+2$，可推得

$$\frac{dR_c}{dx}=\left\{2\left[\sum_{k=1}^{m+1}(-1)^k y^{2k-2}a^{(n-2k)}\right]^2+2y^2\left(\frac{\partial\Phi}{\partial(y^2)}\right)^2\right\}\Big/\frac{\partial\Phi}{\partial(y^2)}$$

从上面两个$\frac{dR_c}{dx}$式看出，分子恒为正值，所以$\frac{dR_c}{dx}$的符号随分母而定．即$\frac{dR_c}{dx}$在 $x>0$ 中变号时，必定经过$\frac{\partial\Phi}{\partial(y^2)}$的零点．但$\frac{\partial\Phi}{\partial(y^2)}=0$ 与$\Phi=0$ 表示根轨迹方程有重根．如今对稳定系统，$\Phi=0$ 在$x>0$ 没有重根，所以$\frac{dR_c}{dx}$在 $x>0$ 的半平面内符号不变，即 R_c 是 x 的单调函数．

当 R_c 在 $x\geqslant 0$ 内是单调函数时，(4.1)的稳定区完全由 R 轴上的 m 个 R_c 值决定．因若 R_c 在 $x>0$ 有极值点如图 4，那么稳定区为 $(\beta,\ \alpha)$ 而不是$(R_b,\ R_a)$．

至于必须条件 (ii)，(iii)；和A)，B)两条原则，理由是显然的．

五、本文内容和其他判别法的联系和比较

将 (2.3) 中 R 改为 a_n，然后 (2.2)，(2.3) 两式用 Sylvester 消去法，可以得到Hurwitz 行列式 Δ_{n-1}．

从$\Delta_{n-1}=0$，也可以得到 a_n 的 m 次方程．它与 $\Delta_{n-3}>0$，$\Delta_{n-5}>0$ ……结合，原则上也可确定 a_n 的稳定区．但展开高阶行列式是个麻烦的工作，而且方程也比本文 (2.2) 复杂得多．

Михайлов 将 $s=j\omega$ 代入 $f(s)=0$，得

$$f(j\omega)=u(\omega)+iv(\omega)=0$$

于是

$$u(\omega)\equiv a_n-a_{n-2}\omega^2+a_{n-4}\omega^4-\cdots=0$$

$$v(\omega)\equiv a_{n-1}\omega-a_{n-3}\omega^3+a_{n-5}\omega^5-\cdots=0$$

他用的 ω 即本文的y．上两式显然和(2.2)，(2.3)两式相同．

Михайлов 要解上述二个方程．当 ω 自零增大时，如发现两者的根交替出现，那么系统便是稳定．本文只要解 $\Phi=0$ 一个．从 $\Phi=0$ 的根代入另一式，便求得 a_n 的稳定区．

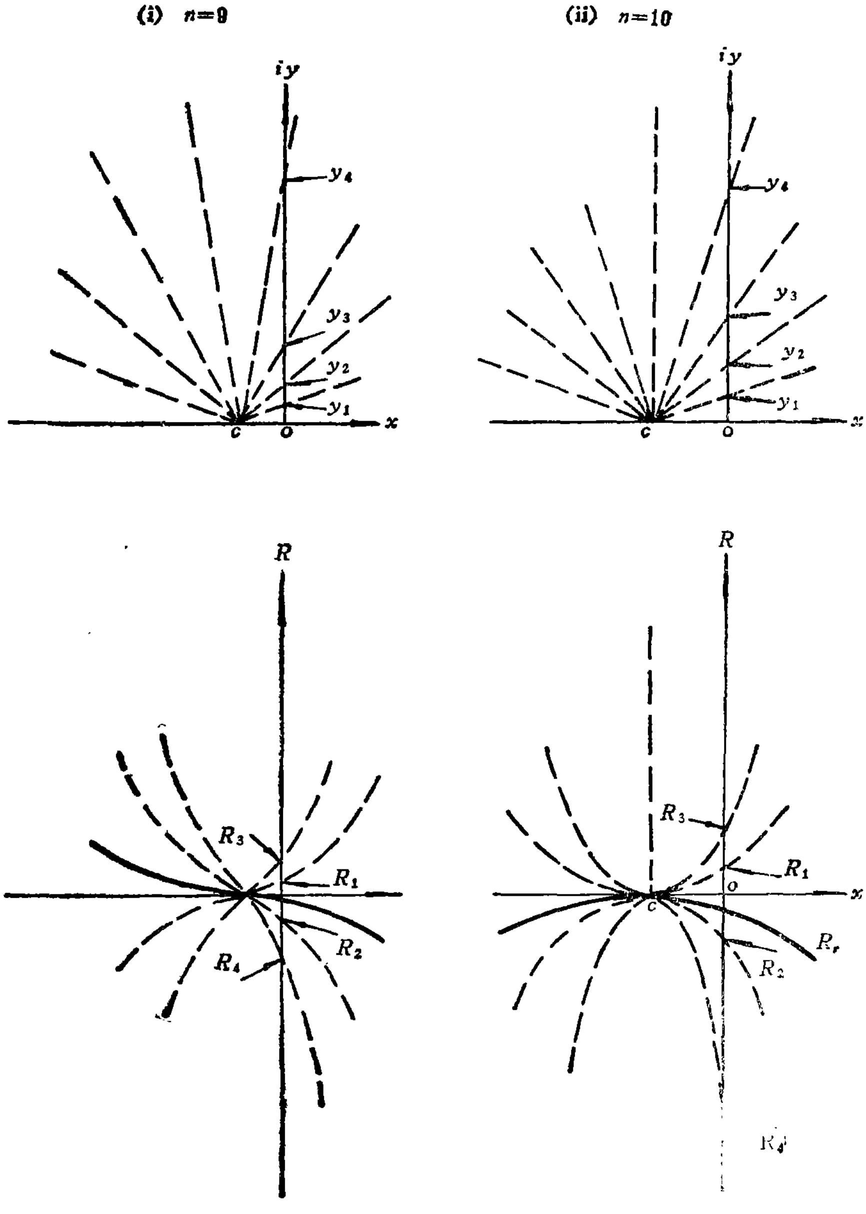
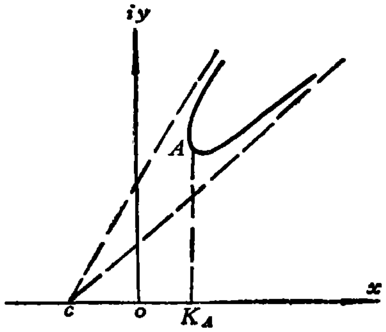
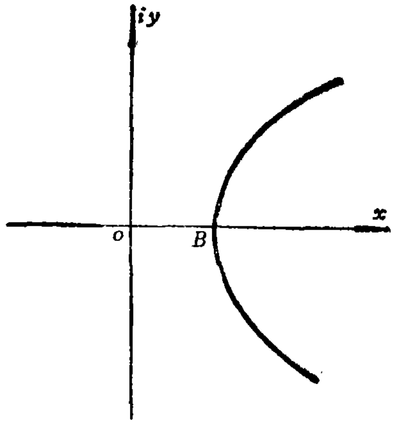


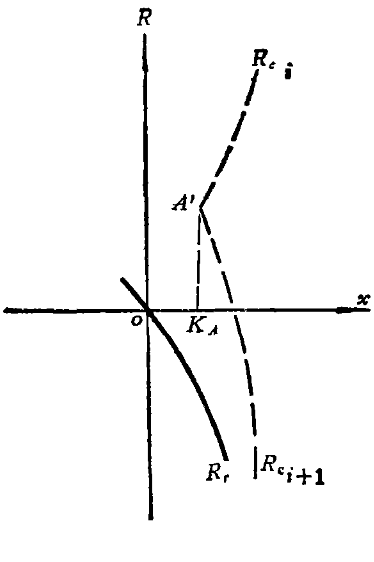
图 1



(a)

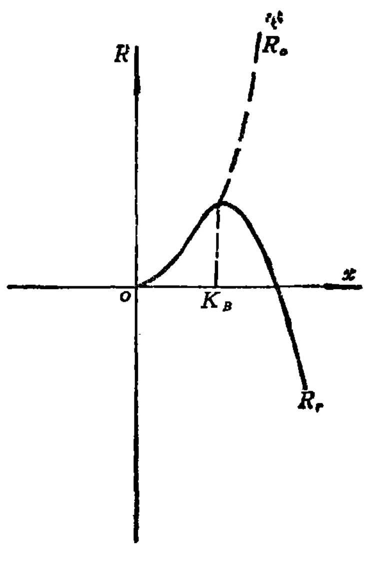


(a)



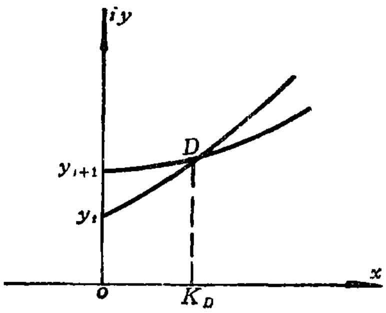
(b)

图 2(Ⅰ)



(b)

图 2(Ⅱ)



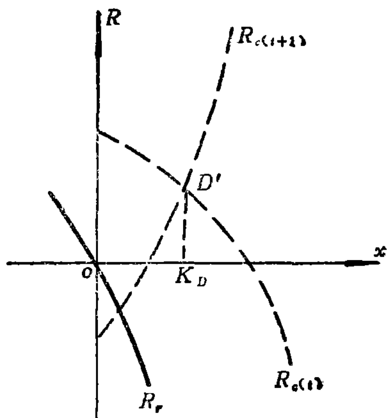


图 3

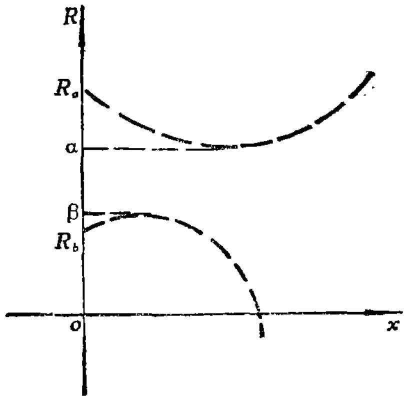


图 4

参 考 文 献

1. Hermité, C., Le nombre des racines d'une équation algebraique comprises entre des limites données, *J. de Crelle (Paris)*, 52, (1854).
2. Routh, E. I., A Treatise on the Stability of a Given State of Motion-Adams Prize Essa (Macmillan, 1877).
3. Hurwitz, A., Uber die Bedinungen unter welchen eine Gleich nur Wurzeln mit negativen reellen. Teilen besitzt, *Mathematical Annual*, 46.(1895),273—284.
4. Nyquist, H., Regeneration theory, *Bell Syst. Tech. J.* 11, (1932), 126—147.
5. Михайлов, А. В., Метод гармонического анализа в теории регулирования, *Автоматика и Телемеханика*, 3, (1938).
6. 汪家诛, 多项式的增广图示及其在工程控制论中的应用. 应用数学和力学,第 2 卷第 3 期,(1981).
7. Неймарк, Ю. И., Структура D-разбиения пространства полиномов и диаграммы вышнеградского и найквиста доклады, Академии Наук СССР, LIX, 5, (1948).

An Approach to Determine the Stable Interval of the Constant Term of a Characteristic Equation

Wong Chia-ho

(*Zhejiang University, Hangzhou*)

Abstract

In this paper, an approach is introduced to determine the stable interval of the constant term of a characteristic equation by using the theory of extended graphical representation of polynomials.

Because the constant a_n itself is not taken into account and because this method is to get a stable interval of a_n, not merely to make a stability test for a set of known coefficients, this method of stability criteria has some advantages over the others. The interval of a_n can be obtained from the calculation of some algebraical expressions when $n \leqslant 10$ where n is the degree of the characteristic equation. It is very convenient to calculate for the cases $n=5$ and $n=6$. When $n \geqslant 11$, this interval can be found only by the method of numerical solutions.