

受轴向集中压力的椭球体的应力分析

云天铨 肖永谦 邱崇光

(武汉华中工学院, 1981年3月20日收到)

摘 要

用积分方程和光弹性方法分析受轴向集中压力的椭球体。

在弹性全空间 $z=-c$ 轴上的 $[a, \infty)$ 和 $[-a, -\infty)$ 区间上, 与 $z=0$ 平面对称地分布集度为 $X_1(c)=X_1(-c)$ 的集中力、集度为 $X_2(c)=X_2(-c)$ 的挤压中心, 以及迭加一对平行 z 轴、等值反向、分别作用于 $z=a$ 及 $z=-a$ 上的集中力, 就能使受轴向集中压力的椭球体问题归结为两个联立的 Fredholm 第一类积分方程。然后, 便能方便地进行数值计算。

三维光弹性“冻结”切片法用于详细分析两个椭球体的模型, 给出几个切面的应力分布, 所得结果 σ_z 与积分方程法相近, 并将结果应用于分析不规则岩石力学试件实测资料的整理。

一、概 述

椭球两端受轴向集中力问题是一个对岩石试件强度分析问题^[1]有重要意义的三维弹性力学轴对称问题。这个问题还未见有解。本文对此问题用积分方程方法进行分析计算并和光弹性实验分析进行比较。

积分方程方法用于(表面/体积)比例较低的弹性力学问题常较有限元法分析具有计算精度高和计算量省的优点^[2]。大多数作者用的积分方程方法是虚载荷直接分布于弹性体的边界面上的方法。此类方法导出的积分方程是二维的、奇异的第一类积分方程, 其数值计算很复杂, 不如作者[3, 4]的虚载荷沿轴线分布于弹性体外的方法简单。因为后者导出的积分方程是一维的、非奇异的第一类积分方程。其数值计算大为简单, 对计算机的要求也不高。因此, 在此采用的是虚载荷沿轴线分布于弹性体外的方法。

本文的第二节进行积分方程的推导。因为问题与 $z=0$ 平面对称, 故所有虚载荷均应与 $z=0$ 对称地分布。为简便, 选用集中力与挤压中心作为两种基本的虚载荷。为使得到的积分方程在离散计算时能近似为非齐次的代数方程, 我们于椭球长轴的顶点上分别作用一对反向的集中压力 P 。在这些载荷作用下, 令满足问题的边界条件, 椭球的平衡方程便可归结为两个联立的一维非奇异的 Fredholm 第一类积分方程。

在第三节, 联立的积分方程离散为非齐次的代数方程, 即令边界母线上 n 个点满足边界条件(边界面上应力为零), 就得到 $2n$ 个非齐次代数方程式(3.1)。此时, 在 $[a, \infty)$ 和 $[-a, -\infty)$ 内连续分布的虚载荷被在 n 个区间内均匀分布的虚载荷来代替。我们用 DJS-21 机计算过 $n=10$ 和 $n=16$ 的情形。

第四节中介绍了光弹性实验应力分析. 采用三维光弹“冻结”应力切片法, 分析了长短轴之比为 $a/b=1.315$ 及 $a/b=1.5$ 的两个模型, 求得其上的平面 $z=a/2$ 以及轴上的应力分布.

最后, 比较了积分方程法计算的和光弹性实验的结果.

二、积分方程的推导

1. 在弹性空间 $c=-z$ 轴上的 $[a, \infty)$ 和 $[-a, -\infty)$ 区间, 与 $z=0$ 平面对称地分布集度为 $X_1(c)=X_1(-c)$ 的集中力, 集度为 $X_2(c)=X_2(-c)$ 的挤压中心, 以及一对等值反向, 平行 z 轴作用于 z 轴上的 $z=a$ 及 $z=-a$ 的集中力 P . 在这些载荷作用下, 任一点 $N(r, \theta, z)$ 的应力为^[3]:

$$\begin{aligned}
 \sigma_r &= K \int_a^\infty ((1-2\nu)((z+c)R_{1c}^{-3} - (z-c)R_{2c}^{-3}) - 3r^2((z+c)R_{1c}^{-5} \\
 &\quad - (z-c)R_{2c}^{-5}))X_1(c)dc + K_1 \int_a^\infty ((r^2 - 0.5(z+c)^2)R_{1c}^{-5} \\
 &\quad + (r^2 - 0.5(z-c)^2)R_{2c}^{-5})X_2(c)dc + KP((1-2\nu)((z+a)R_1^{-3} \\
 &\quad - (z-a)R_2^{-3}) - 3r^2((z+a)R_1^{-5} - (z-a)R_2^{-5})) \\
 \sigma_\theta &= K \int_a^\infty (1-2\nu)((z+c)R_{1c}^{-3} - (z-c)R_{2c}^{-3})X_1(c)dc - 0.5K_1 \\
 &\quad \cdot \int_a^\infty (R_{1c}^{-3} + R_{2c}^{-3})X_2(c)dc + KP(1-2\nu)((z+a)R_1^{-3} - (z-a)R_2^{-3}) \\
 \sigma_z &= -K \int_a^\infty ((1-2\nu)((z+c)R_{1c}^{-3} - (z-c)R_{2c}^{-3}) + 3((z+c)^3R_{1c}^{-5} \\
 &\quad - (z-c)^3R_{2c}^{-5}))X_1(c)dc + K_1 \int_a^\infty (((z+c)^2 - 0.5r^2)R_{1c}^{-5} \\
 &\quad + ((z-c)^2 - 0.5r^2)R_{2c}^{-5})X_2(c)dc - KP((1-2\nu)((z+a)R_1^{-3} \\
 &\quad - (z-a)R_2^{-3}) + 3((z+a)^3R_1^{-5} - (z-a)^3R_2^{-5})) \\
 \tau_{rz} &= -K_r \int_a^\infty ((1-2\nu)(R_{1c}^{-3} - R_{2c}^{-3}) + 3((z+c)^2R_{1c}^{-5} \\
 &\quad - (z-c)^2R_{2c}^{-5}))X_1(c)dc + 1.5K_1r \int_a^\infty ((z+c)R_{1c}^{-5} \\
 &\quad + (z-c)R_{2c}^{-5})X_2(c)dc - KPr((1-2\nu)(R_1^{-3} - R_2^{-3}) + 3((z+a)^2R_1^{-5} \\
 &\quad - (z-a)^2R_2^{-5}))
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

式中:

$$\begin{aligned}
 R_{1c} &= (r^2 + (z+c)^2)^{1/2} \\
 R_{2c} &= (r^2 + (z-c)^2)^{1/2} \\
 R_1 &= (r^2 + (z+a)^2)^{1/2} \\
 R_2 &= (r^2 + (z-a)^2)^{1/2} \\
 K &= (8\pi(1-\nu))^{-1} \\
 K_1, P &\text{为常数. } \nu \text{为Poisson比.} \\
 r, \theta, z &\text{为柱坐标.} \\
 \sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{rz} &\text{为应力柱坐标分量.}
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

2. 应力边界条件

在母线方程为 $(\frac{r}{b})^2 + (\frac{z}{a})^2 = 1$ 的椭球边界面上, 应力为零. 于是由平衡方程求得在边界面上要满足:

$$\sigma_r = \tau_{rz} \cdot dr/dz \tag{2.3}$$

$$\tau_{rz} = \sigma_z \cdot dr/dz \tag{2.4}$$

将(2.1)式代入(2.3)式、(2.4)式, 得积分方程:

$$A_1 X_1 + B_1 X_2 = F_1 \tag{2.5}$$

$$A_2 X_1 + B_2 X_2 = F_2 \tag{2.6}$$

式中 A_1, A_2, B_1, B_2 分别为积分方程的核算子. F_1, F_2 为已知函数.

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= A_1(z, c) = K((1-2\nu)((z+c)R_{ac}^{-3} - (z-c)R_{bc}^{-3}) \\ &\quad - 3b^2(1-(z/a)^2)((z+c)R_{ac}^{-5} - (z-c)R_{bc}^{-5}) + (dr/dz)b(1 \\ &\quad - (z/a)^2)^{1/2}((1-2\nu)(R_{ac}^{-3} - R_{bc}^{-3}) + 3((z+c)^2R_{ac}^{-5} - (z-c)^2R_{bc}^{-5})) \\ A_2 &= A_2(z, c) = -K(b(1-(z/a)^2)^{1/2}((1-2\nu)(R_{ac}^{-3} - R_{bc}^{-3}) \\ &\quad + 3((z+c)^2R_{ac}^{-5} - (z-c)^2R_{bc}^{-5})) - (dr/dz)((1-2\nu)((z+c)R_{ac}^{-3} \\ &\quad - (z-c)R_{bc}^{-3}) + 3((z+c)^3R_{ac}^{-5} - (z-c)^3R_{bc}^{-5})) \\ B_1 &= B_1(z, c) = K_1((b^2(1-(z/a)^2) - 0.5(z+c)^2)R_{ac}^{-5} + (b^2(1-(z/a)^2) \\ &\quad - 0.5(z-c)^2)R_{bc}^{-5} - 1.5(b(1-(z/a)^2)^{1/2}((z+c)R_{ac}^{-6} \\ &\quad + (z-c)R_{bc}^{-6})) \cdot (dr/dz)) \\ B_2 &= B_2(z, c) = K_1(1.5b(1-(z/a)^2)^{1/2}((z+c)R_{ac}^{-5} + (z-c)R_{bc}^{-5}) \\ &\quad - (dr/dz)((z+c)^2 - 0.5b^2(1-(z/a)^2))R_{ac}^{-5} + ((z-c)^2 \\ &\quad - 0.5b^2(1-(z/a)^2))R_{bc}^{-5}) \\ F_1 &= F_1(z) = -KP((1-2\nu)((z+a)R_c^{-3} - (z-a)R_b^{-3}) \\ &\quad - 3b^2(1-(z/a)^2)((z+a)R_a^{-5} - (z-a)R_b^{-5}) + (dr/dz)b(1 \\ &\quad - (z/a)^2)^{1/2}((1-2\nu)(R_a^{-3} - R_b^{-3}) + 3((z+a)^2R_a^{-5} - (z-a)^2R_b^{-5}))) \\ F_2 &= F_2(z) = KP(b(1-(z/a)^2)^{1/2}((1-2\nu)(R_a^{-3} - R_b^{-3}) + 3((z+a)^2R_a^{-5} \\ &\quad - (z-a)^2R_b^{-5})) - (dr/dz)((1-2\nu)((z+a)R_a^{-3} - (z-a)R_b^{-3}) \\ &\quad + 3((z+a)^3R_a^{-5} - (z-a)^3R_b^{-5}))) \end{aligned} \right\} \tag{2.7}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{式中: } \quad dr/dz &= -b^2z/a^2r = -(b/a^2)z(1-(z/a)^2)^{-1/2} \\ R_{ac} &= (b^2(1-(z/a)^2) + (z+c)^2)^{1/2} \\ R_{bc} &= (b^2(1-(z/a)^2) + (z-c)^2)^{1/2} \\ R_a &= (b^2(1-(z/a)^2) + (z+a)^2)^{1/2} \\ R_b &= (b^2(1-(z/a)^2) + (z-a)^2)^{1/2} \end{aligned} \right\} \tag{2.8}$$

满足上述积分方程(2.5)、(2.6)的同时还要满足确定常数 P , K_1 的椭球体的平衡方程. 即 ($\Sigma z=0$ 和 $\Sigma x=0$);

$$\int_{s_1} \sigma_z ds = Q \quad (2.9)$$

$$\int_{s_2} \sigma_\theta ds = 0 \quad (2.10)$$

式中 s_1 , s_2 分别为 $z=0$ 的剖面面积和 $y=0$ 的剖面面积.

解(2.5), (2.6), (2.9), (2.10)式求出 X_1 , X_2 , K_1 , P , 则应力由(2.1)式算出.

三、积分方程的离散计算

大多数文献对形如(2.5), (2.6)的积分方程的数值处理, 通常是用其离散的形式来代替. 即在边界 $(\frac{r}{b})^2 + (\frac{z}{a})^2 = 1$ 上取 n 个点, 令满足应力为零的边界条件(2.3)、(2.4); 同时, 虚载荷连续在 $[a, \infty)$, $[-a, -\infty)$ 内连续地对称分布也改为分成 n 个区间内阶梯地分布. 即(2.5)、(2.6)式改为:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^n A_{1j} X_{1j} + \sum_{j=1}^n B_{1j} X_{2j} &= F_{1i} \\ \sum_{j=1}^n A_{2j} X_{1j} + \sum_{j=1}^n B_{2j} X_{2j} &= F_{2i} \end{aligned} \right\} i=1, 2, \dots, n. \quad (3.1)$$

式中:

$$\left. \begin{aligned} X_{tj} &= X_t(c_j), \quad F_{ti} = F_t(z_i) \\ A_{tij} &= \int_{ja}^{(j+1)a} A_t(z_i, c) dc \\ B_{tij} &= \int_{ja}^{(j+1)a} B_t(z_i, c) dc \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &t=1, 2; \\ &i, j=1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.2)$$

将(2.9)式和(2.10)式离散为:

$$2\pi(b/m)^2 \sum_{i=1}^m i \sigma_z(ib/m, 0) = Q \quad (3.3)$$

$$ab/(mL) \sum_{i=1}^m \sum_{t=1}^L \sigma_\theta(ib/m, ta/L) = 0 \quad (3.4)$$

其中 $\sigma_z(r, z)$ 和 $\sigma_\theta(r, z)$ 按(2.1)式计算; 但若(3.4)式中 $t > L\sqrt{1-(i/m)^2}$ 时, 取 $\sigma_\theta(ib/m, ta/L) = 0$.

解(3.1)~(3.4)式, 可得 X_1 , X_2 , P , K_1 . 则应力按(2.1)式计算.

本例计算的椭球模型的半长轴 $a=2.2875\text{cm}$, 半短轴 $b=1.525\text{cm}$, $a/b=1.5$; 泊桑比 $\nu=0.45$; 外载荷 $Q=23.08\text{kg}$; 计算机为DJS-21机; 积分公式采用 Romberg 公式和梯形公

式；计算过 $n=10$ 和 $n=16$ 情形，所得的应力计算 σ_z 和 σ_r 的结果示于图6中。

四、沿长轴压缩椭球体的光弹性应力分析

1. 分析原理

为探明长短轴比不同的椭球体，在沿长轴压缩时的应力状态，用三维光弹性“冻结”应力切片法分析了长短轴比 a/b 为1.315及1.5的椭球。

由于椭球体在所讨论的荷载下为轴对称问题，应力状态与 θ 无关，于是只需切取互相正交的两切片，即可求出全部应力分量，一片为包括对称轴的子午切片，另一片为垂直于对称轴与赤道面平行的切片（或称水平切片）。这些切片的位置见示意图1

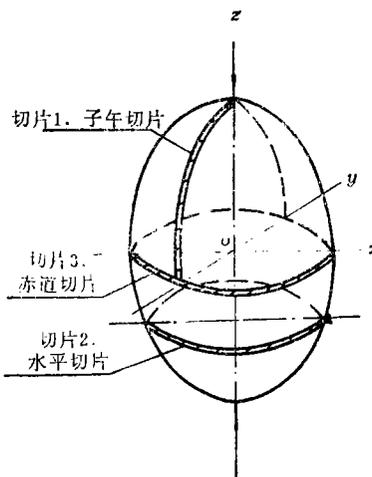


图1 切片位置示意图。

根据应力光学定律^{[5][6]}，由垂直照射子午切片及水平切片可得：

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r - \sigma_z &= (p' - q')_\theta \cos 2\varphi_\theta = n_\theta F_\theta \cos 2\varphi_\theta \\ \tau_{rz} &= \frac{1}{2}(p' - q')_\theta \sin 2\varphi_\theta = \frac{1}{2}n_\theta F'_\theta \sin 2\varphi_\theta \\ \sigma_\theta - \sigma_r &= (p' - q')_z = n_z F_z \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

式中 σ_r ， σ_θ ， σ_z 及 τ_{rz} 为轴对称问题柱坐标系应力分量。 $(p' - q')_\theta$ ， $(p' - q')_z$ 表示偏振光沿 θ 方向及 z 方向照射所得之次主应力差。 φ_θ 为沿 θ 照射的次主应力之方向与水平轴的夹角。 n_θ ， F_θ 及 n_z ， F_z 为切片沿 θ 及 z 方向照射的条纹序数及条纹值。

方程(4.1)中三个方程均系独立的，但未知量有四个。故不能求得单独的正应力，只能直接求得正应力差值。为了分离正应力，可借积分平衡微分方程来补充一个方程。在不计体力时，轴对称问题柱坐标系下的平衡微分方程为：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

若沿 or 积分上式中第一式可得：

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_r)_i &= (\sigma_r)_0 - \int_0^i \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} dr - \int_0^i \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} dr \\ \text{或} \\ (\sigma_r)_i &= (\sigma_r)_0 - \sum_0^i \frac{\Delta \tau_{rz}}{\Delta z} \Delta r - \sum_0^i \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} \Delta r \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

式中 $(\sigma_r)_0$ 和 $(\sigma_r)_i$ 为积分路径上起始点和某点 i 的 σ_r 值。上式中的第一个积分,可由子午切片资料完成。第二个积分可由水平切片的资料求得。如果未切取水平切片, $(\sigma_r - \sigma_\theta)$ 之值也可由对子午切片的斜射求得。求出了 σ_r 之后,可由式(4.1)的第一与第三式求出 σ_θ 及 σ_z 。这样,由正交切片的光弹性资料及积分平衡微分方程,可求得椭球体内两切片交线上的所有应力分量 σ_r , σ_z , σ_θ 及 τ_{rz} ,即得到所需断面上弹性应力问题的完全解。

至于对称轴 oz 上各点的应力分量,可用沿水平断面积分时求得的 oz 轴上某点的 σ_z 为已知起点,向上下积分而得,即对方程(4.2)的第二式积分:

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_z)_i &= (\sigma_z)_0 - \int_0^i \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} dz - \int_0^i \frac{\tau_{rz}}{r} dz = (\sigma_z)_0 - 2 \int_0^i \frac{\tau_{rz}}{r} dz \\ \text{或} \\ (\sigma_z)_i &= (\sigma_z)_0 - 2 \sum_0^i \frac{\Delta \tau_{rz}}{\Delta r} \Delta z = (\sigma_z)_0 - 2 \sum_0^i \frac{\tau_{rz}}{r} \Delta z \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

我们的积分路径是由 A_1 至 o_1 再由 o_1 至 o 。同时从 A 至 o 。(见图2)。这样也可以校核实验的精度,因为从不同路径积分到 o 点,所得之 σ_z 应相同。在从 A 至 o 积分时,由于 oA 亦是对称断面,即为主应力迹线。这时,用拉梅—麦克斯韦(G. Lamé—J. Maxwell)方程求解更为方便。即

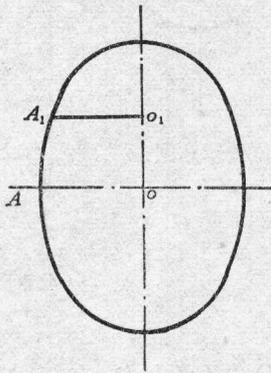


图 2

$$\left. \begin{aligned} p_i &= p_0 - \int_0^i (p-q) \frac{d\theta}{dy} ds_1 \\ q_i &= q_0 - \int_0^i (p-q) \frac{d\theta}{dx} ds_2 \\ \text{或} \quad q_i &= q_0 - \frac{1}{\Delta x} \sum_0^i (p-q) \Delta \theta \Delta y \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

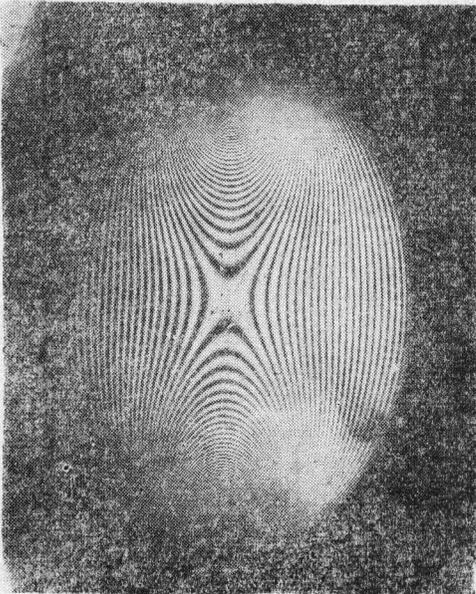


图 3 a) 椭球($a/b=1.315$)整体应力条纹图。

上式中 p , q 为主应力或次主应力; $\frac{d\theta}{dy}$ 为主应力迹线的切线与水平轴的夹角,对于垂直轴 oy 的变化率, Δy 为靠近水平轴(即选为积分路径的主应力迹线)的某参数之等倾线间的垂直距离。

2. 光弹性实验结果及精度校核

上述研究过的两椭球的光弹性实验结果如下。图3a)为长轴与短轴之比 a/b 为1.315椭球的整体应力条纹图;图3b)该椭球子午切片的应力条纹图;图3c)为该椭球在 $z=\frac{a}{2}$ 处之水平切片应力条纹图。图4a)为 $a/b=1.5$ 椭球的子午切片应力条纹图;图4b)为该椭球水平切片

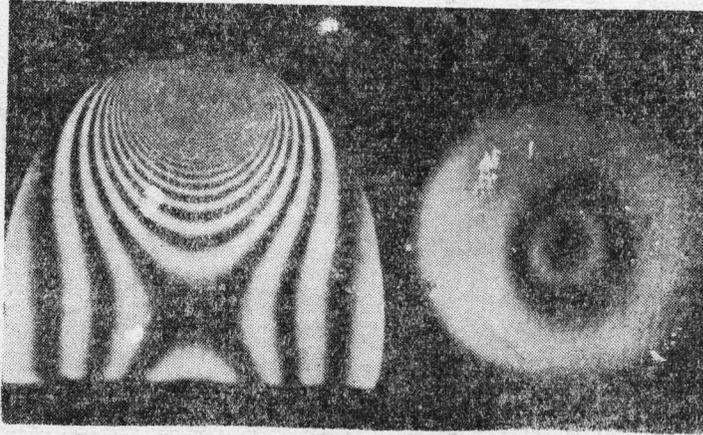


图 3 b) 此椭球之子午切片应力条纹图.

图 3 c) 此椭球之水平切片应力条纹图.

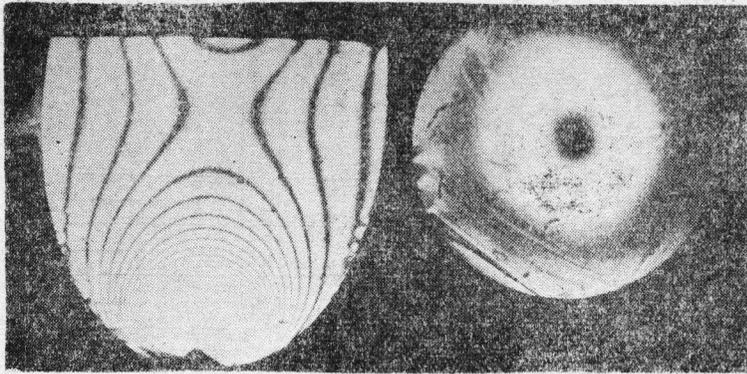
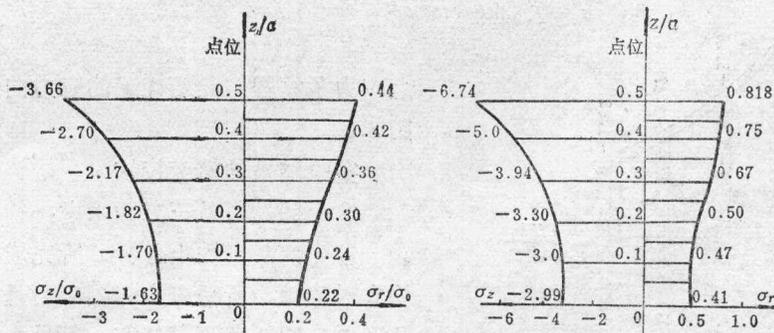
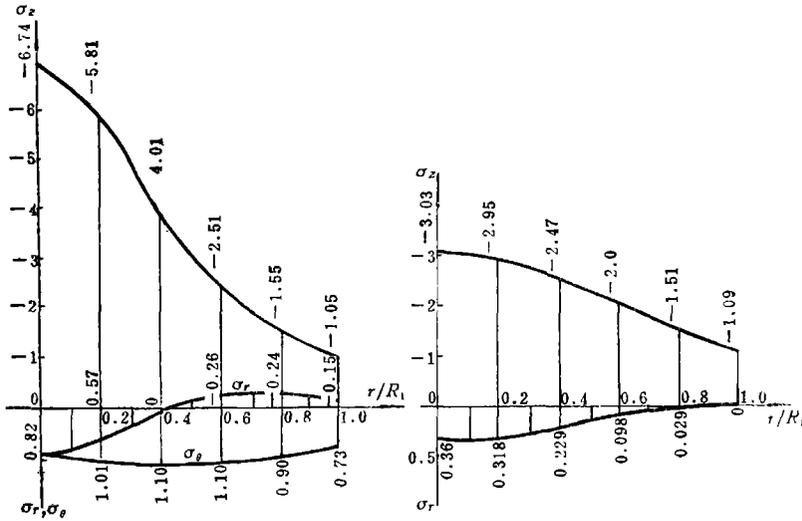


图 4 a) 椭球(a/b=1.5)子午切片应力条纹图.

图 4 b) 此椭球之水平切片应力条纹图.

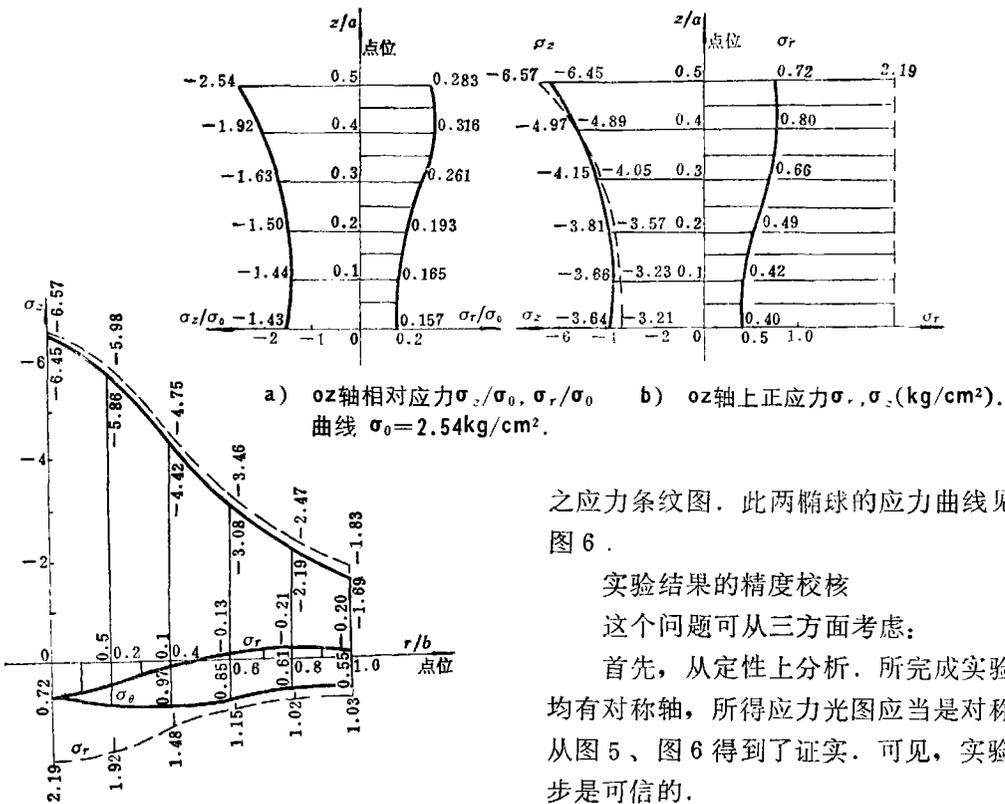


a) oz 轴上相对应力曲线 $\sigma_0 = \frac{Q}{A} = 1.836$, A 为赤道面面积, b) oz 轴上 σ_r, σ_z 曲线.



c) A_1O_1 断面上的 $\sigma_z, \sigma_r, \sigma_\theta$ 曲线. d) 中心断面 Ao 上的 σ_z, σ_r 曲线.

图5 椭球($b/a=1:1.315$)应力曲线.



a) oz 轴相对应力 $\sigma_z/\sigma_0, \sigma_r/\sigma_0$ b) oz 轴上正应力 σ_r, σ_z (kg/cm^2).
曲线 $\sigma_0=2.54kg/cm^2$.

c) $z = \frac{a}{2}$ 的水平断面 A_1O_1 上的应力 σ_r, σ_θ ,
 σ_z (kg/cm^2).

图6 椭球($b/a=1:1.5$)应力曲线.

之应力条纹图. 此两椭球的应力曲线见图5、图6.

实验结果的精度校核

这个问题可从三方面考虑:

首先, 从定性上分析. 所完成实验的模型均有对称轴, 所得应力光图应当是对称的. 这从图5、图6得到了证实. 可见, 实验结果初步是可信的.

其次, 可从静力平衡校核方面考虑. 对于对称轴压缩的椭球来说, 平行于赤道面的任一水平断面上的总垂直内力, 应当等于所加外载

荷. 设此总垂直内力为 Q' , 则有:

$$Q' = \int_0^R 2\pi r(\sigma_z) r dr \quad (4.6)$$

写成数值近似积分的形式为

$$Q' = \frac{2\pi R}{\beta^2 n} \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \bar{\sigma}_{z(i)} = \frac{2\pi R}{\beta^2 n} \left[\frac{1}{4} (r_1 \sigma_{z(0)} + 3r_1 \sigma_{z(1)} + 2r_n \sigma_{z(n)}) + \sum_{i=2}^{n-1} r_i \sigma_{z(i)} \right] \quad (4.7)$$

式中 R 为所取水平截面的半径; r_i , $\sigma_{z(i)}$ 为各节点处的半径及垂直正应力; \bar{r}_i , $\bar{\sigma}_{z(i)}$ 为相邻两点的平均半径与平均垂直正应力; n 为断面分割的段数; β 为应力条纹图成像时的放大系数.

把图5c)中各 $\sigma_{z(i)}$ 之值代入式(4.7)得椭球($a/b=1.315$)在 $z=\frac{a}{2}$ 处平行赤道平面的水平断面内的总内力为 $Q'=23.45$ 公斤. 而此椭球所加外力 $Q=23.08$ 公斤. 于是静力平衡校核误差为:

$$\varepsilon = \frac{Q' - Q}{Q} \times 100\% = \frac{23.45 - 23.08}{23.08} \times 100\% = 1.5\%$$

同理求得椭球($a/b=1.5$)的静力平衡误差 $\varepsilon=0.43\%$.

再其次, 实验精度可从比较不同积分路径求得的同一点的应力值来估计. 对于椭球($a/b=1.315$), 在分离正应力时, 我们首先从 A_1 经 o_1 积分到 o (见图2)得 o 点的 $\sigma_z=-2.993$ 公斤/厘米², $\sigma_r=0.407$ 公斤/厘米². 而后, 从 A 积分到 o , 又得 o 点的应力为 $\sigma_z=-3.026$ 公斤/厘米², $\sigma_r=0.36$ 公斤/厘米². 比较两者, 相差甚微.

图6的虚线表示将积分方程离散化算得的结果; 实线表示由光弹性实验求得的结果. 比较可见 σ_z 的分布较接近, 但 σ_r 较差. 这是因为我们的计算比较粗糙, 尤其是(3.4)式. 单元划分细些可望结果好些.

参 考 文 献

1. Broch, E. and Franklin, J. A., The point-load strength test, *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 9,6.(1972).
2. Banerjee, P. K., Integral equation method for analysis of piece-wise non-homogeneous three-dimensional elastic solids of arbitrary shape, *Int. J. Mech. Sci.*, 18, (1976),293.
3. 云天铨, 圆柱嵌入半空间的三维问题的一个简便的积分方程方法, 固体力学学报, 第一卷, 第二期, (1980年).
4. 云天铨, 轴对称受力问题的积分方程的迭代法, 应用数学和力学, 第一卷, 第一期, (1980),115-123.
5. Frocht, M. M., *Photoelasticity*, 2, (1948).
6. Kuske, A., *Photoelastic Stress Analysis*,(1973).

Analysis of Ellipsoid Compressed by Two Axial Concentrated Forces at Two Ends

Yun Tian-quan Shao Uong-chang Qiu Chong-guang

(Huazhong Institute of Technology, Wuhan)

Abstract

Integral equation method and photoelastic experiment are used for the stress analysis of an axial compressive ellipsoid. Let the concentrated forces and the centers of compression, with symmetrical unknown intensive functions $x_1(c)=x_1(-c)$ and $x_2(c)=x_2(-c)$ respectively, be distributed symmetrically to $z=0$ plane along the axis z ($=-c$) in $[a, \infty)$ and $[-a, -\infty)$ of the elastic space. In addition to a pair of equal and opposite axial forces acting on $z=a$ and $z=-a$, we can reduce the problem of an axial compressive ellipsoid to two coupled Fredholm integral equations of the first kind. Furthermore, numerical calculation is then made. Two photoelastic models of ellipsoid had been analysed by the "Freezing and Cutting" method and the results, in which σ_z is quite nearly to those obtained by integral equation method, had been used in the analysis of the data of compressive rock specimens.