关于用Euler角表示转动张量问题的一个注记*

程 沅 生

（上海工业大学机械工程系，1979年11月14日收到）

摘 要

本文指出，H. E Кочин[1]对于转动张量用Euler角表示的公式的推导是错误的．指出Кочин在这个问题上的错误，有助于弄清转动张量的概念及其表示方法．

H．E．Кочин的《向量计算及张量计算初步》一书在我国曾经流传过，在苏联则是多次再版发行．本文指出，根据1961年苏联第8版，Кочин对于转动张量用Euler角表示的公式的推导是有错误的．下面我们来讨论这个问题．

通过Euler角来实现有限转动（见图1），第一步是绕ox_3轴转动φ角，使得ox_1轴转到节线oN位置．这个转动将$ox_1x_2x_3$座标系的基底向量$\mathbf{i}_1$、$\mathbf{i}_2$、$\mathbf{i}_3$转成$\mathbf{i}_1^{(1)}$、$\mathbf{i}_2^{(2)}$、$\mathbf{i}_3^{(3)}$．

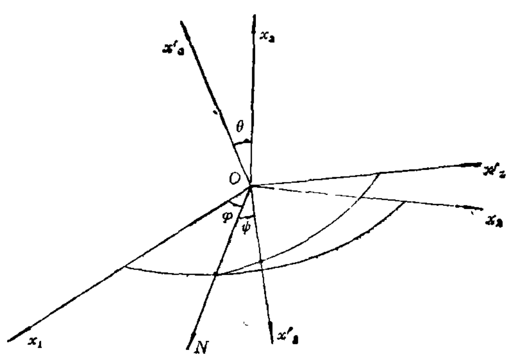

图 1

显然

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{i}_1^{(1)}&=\cos\varphi\,\mathbf{i}_1+\sin\varphi\,\mathbf{i}_2\\ \mathbf{i}_2^{(1)}&=-\sin\varphi\,\mathbf{i}_1+\cos\varphi\,\mathbf{i}_2\\ \mathbf{i}_3^{(1)}&=\mathbf{i}_3\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

我们将此转动的转动张量记为$\mathbf{R}_1$，它可表示为

$$\mathbf{R}_1=\mathbf{i}_1^{(1)}\mathbf{i}_1+\mathbf{i}_2^{(1)}\mathbf{i}_2+\mathbf{i}_3^{(1)}\mathbf{i}_3\tag{2}$$

将（1）式代入（2）式，得到

$$\mathbf{R}_1=\cos\varphi\,\mathbf{i}_1\mathbf{i}_1-\sin\varphi\,\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2+\sin\varphi\,\mathbf{i}_2\mathbf{i}_1+\cos\varphi\,\mathbf{i}_2\mathbf{i}_2+\mathbf{i}_3\mathbf{i}_3\tag{3}$$

即

$$\mathbf{R}_1=\begin{Bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{Bmatrix}\tag{4}$$

* 钱伟长推荐．

若该转动将 $\mathbf{r}$ 转成 $\boldsymbol{\xi}$，则

$$\boldsymbol{\xi}=\mathbf{R}_1\cdot\mathbf{r}$$

Кочин 将该转动张量表示为

$$\Phi=\begin{Bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \tag{5}$$

从而写出

$$\boldsymbol{\xi}=\Phi\mathbf{r} \tag{6}$$

当 $\mathbf{r}$ 取为 $\mathbf{i}_1$ 时，$\Phi\mathbf{i}_1$ 应该为 $\mathbf{i}_1^{(1)}$．而按照 Кочин 的表示式(5)及(6)，则得到

$$\mathbf{i}_1^{(1)}=\Phi\mathbf{i}_1=\cos\varphi\,\mathbf{i}_1-\sin\varphi\,\mathbf{i}_2$$

将上式与(1)式比较，可见 Кочин 表示式(5)、(6)是错误的．

Кочин 为什么会得出这个错误的表示式呢？

设 $\boldsymbol{\xi}$ 在基底向量为 $\mathbf{i}_1^{(1)}$、$\mathbf{i}_2^{(1)}$、$\mathbf{i}_3^{(1)}$ 的坐标系中的坐标为 ξ_1、ξ_2、ξ_3，即

$$\boldsymbol{\xi}=\xi_1\mathbf{i}_1^{(1)}+\xi_2\mathbf{i}_2^{(1)}+\xi_3\mathbf{i}_3^{(1)}$$

又设 $\boldsymbol{\xi}$ 在坐标系 $ox_1x_2x_3$ 中的坐标为 x_1、x_2、x_3．则 ξ_i 与 x_i 之间有下列关系

$$\left.\begin{aligned} \xi_1&=x_1\cos\varphi+x_2\sin\varphi \\ \xi_2&=-x_1\sin\varphi+x_2\cos\varphi \\ \xi_3&=x_3 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Кочин 错误地将上式中的 x_1、x_2、x_3 当作向量 $\mathbf{r}$ 的分量，ξ_1、ξ_2、ξ_3 当作向量 $\boldsymbol{\xi}$ 的分量，然后利用张量除法定理，认为

$$\Phi=\begin{Bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & \theta & 1 \end{Bmatrix}$$

是转动张量．

还应该指出，张量除法定理

$$\mathbf{b}=\mathbf{R}\cdot\mathbf{a}$$

中要求向量$\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$的分量写成同一个坐标系中的分量，不能把$\mathbf{a}$的分量取为$ox_1x_2x_3$坐标系中的分量，而把$\mathbf{b}$的分量取为另一个坐标系($\mathbf{i}_1^{(1)}$、$\mathbf{i}_2^{(1)}$、$\mathbf{i}_3^{(1)}$)中的分量．Кочин 的错误就出在这儿．

通过Euler角实现有限转动的第二步，是绕节线oN转动θ角，把ox_3轴转到ox_3'轴的位置．这个转动把基底向量 $\mathbf{i}_1^{(1)}$、$\mathbf{i}_2^{(1)}$、$\mathbf{i}_3^{(1)}$ 转成基底向量 $\mathbf{i}_1^{(2)}$、$\mathbf{i}_2^{(2)}$、$\mathbf{i}_3^{(2)}$．

显然

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{i}_1^{(2)}&=\mathbf{i}_1^{(1)} \\ \mathbf{i}_2^{(2)}&=\cos\theta\,\mathbf{i}_2^{(1)}+\sin\theta\,\mathbf{i}_3^{(1)} \\ \mathbf{i}_3^{(2)}&=-\sin\theta\,\mathbf{i}_2^{(1)}+\cos\theta\,\mathbf{i}_3^{(1)} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

我们把这个转动的转动张量记为$\mathbf{R}_2$，它应该为

$$\mathbf{R}_2=\mathbf{i}_1^{(2)}\mathbf{i}_1^{(1)}+\mathbf{i}_2^{(2)}\mathbf{i}_2^{(1)}+\mathbf{i}_3^{(2)}\mathbf{i}_3^{(1)} \tag{9}$$

转动张量$\mathbf{R}_2$在基底向量为$\mathbf{i}_1^{(1)}$、$\mathbf{i}_2^{(1)}$、$\mathbf{i}_3^{(1)}$的坐标系中的分量表示式为

$$\mathbf{R}_2=\mathbf{i}_1^{(1)}\mathbf{i}_1^{(1)}+\cos\theta\,\mathbf{i}_2^{(1)}\mathbf{i}_2^{(1)}-\sin\theta\,\mathbf{i}_2^{(1)}\mathbf{i}_3^{(1)}+\sin\theta\,\mathbf{i}_3^{(1)}\mathbf{i}_2^{(1)}+\cos\theta\,\mathbf{i}_3^{(1)}\mathbf{i}_3^{(1)}$$

即

$$\mathbf{R}_2=\begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{Bmatrix} \tag{10}$$

而转动张量 $\mathbf{R}_2$ 在坐标系 $ox_1x_2x_3$ 中的分量表示式则为

$$\mathbf{R}_2=\begin{Bmatrix} \cos^2\varphi+\sin^2\varphi\cos\theta & \cos\varphi\sin\varphi-\sin\varphi\cos\varphi\cos\theta & \sin\theta\sin\varphi \\ \sin\varphi\cos\varphi-\sin\varphi\cos\varphi\cos\theta & \sin^2\varphi+\cos^2\varphi\cos\theta & -\sin\theta\cos\varphi \\ -\sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi\sin\theta & \cos\theta \end{Bmatrix} \tag{11}$$

可见第二个转动（绕节线oN的转动）的转动张量$\mathbf{R}_2$在基底向量为$\mathbf{i}_1^{(1)}$、$\mathbf{i}_2^{(1)}$、$\mathbf{i}_3^{(1)}$的坐标系中的分量表示式为(10)，而在$ox_1x_2x_3$坐标系中的分量表示式为(11). Кочин所列出的

$$\boldsymbol{\theta}=\begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{Bmatrix} \tag{12}$$

根本不是绕节线oN转动θ角的转动张量.

致于第三个转动——绕ox_3'轴转动ψ角，把节线oN转到ox_1'轴位置，将基底向量$\mathbf{i}_1^{(2)}$、$\mathbf{i}_2^{(2)}$、$\mathbf{i}_3^{(2)}$转成$ox_1'x_2'x_3'$坐标系的基底向量$\mathbf{i}_1'$、$\mathbf{i}_2'$、$\mathbf{i}_3'$.

显然

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{i}_1'&=\cos\psi\,\mathbf{i}_1^{(2)}+\sin\psi\,\mathbf{i}_2^{(2)} \\ \mathbf{i}_2'&=-\sin\psi\,\mathbf{i}_1^{(2)}+\cos\psi\,\mathbf{i}_2^{(2)} \\ \mathbf{i}_3'&=\mathbf{i}_3^{(2)} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

将第三个转动的转动张量记为$\mathbf{R}_3$，则

$$\mathbf{R}_3=\mathbf{i}_1'\mathbf{i}_1^{(2)}+\mathbf{i}_2'\mathbf{i}_2^{(2)}+\mathbf{i}_3'\mathbf{i}_3^{(2)} \tag{14}$$

从而可找出转动张量$\mathbf{R}_3$在基底向量为$\mathbf{i}_1^{(2)}$、$\mathbf{i}_2^{(2)}$、$\mathbf{i}_3^{(2)}$的坐标系中的分量表示式

$$\mathbf{R}_3=\begin{Bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \tag{15}$$

而转动张量$\mathbf{R}_3$在基底向量为$\mathbf{i}_1^{(1)}$、$\mathbf{i}_2^{(1)}$、$\mathbf{i}_3^{(1)}$的坐标系中的分量表示式则为

$$\mathbf{R}_3=\begin{Bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi\cos\theta & -\sin\psi\sin\theta \\ \sin\psi\cos\theta & \cos\psi\cos^2\theta+\sin^2\theta & \sin\theta\cos\theta\cos\psi-\sin\theta\cos\theta \\ \sin\psi\sin\theta & \sin\theta\cos\theta\cos\psi-\sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta\cos\psi+\cos^2\theta \end{Bmatrix} \tag{16}$$

转动张量$\mathbf{R}_3$在$ox_1x_2x_3$坐标系中的分量表示式则为

$$\mathbf{R}_3=\left\{\begin{matrix}
\begin{array}{l}\cos\psi\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\cos\psi\cos^2\theta\\ \quad+\sin^2\theta\sin^2\varphi\\ \end{array} & \begin{array}{l}\cos\psi\cos\varphi\sin\varphi-\sin\psi\cos\theta\\ \quad-\sin\varphi\cos\varphi\cos\psi\cos^2\theta\\ \quad-\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi\end{array} & \begin{array}{l}\sin\varphi\sin\theta\cos\theta\\ \quad-\sin\psi\sin\theta\cos\varphi\\ \quad-\sin\varphi\sin\theta\cos\theta\cos\psi\end{array}\\
\begin{array}{l}\cos\psi\sin\varphi\cos\varphi+\sin\psi\cos\theta\\ \quad-\cos\psi\cos^2\theta\sin\varphi\cos\varphi\\ \quad-\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi\end{array} & \begin{array}{l}\cos\psi\sin^2\varphi\\ \quad+\cos\psi\cos^2\theta\cos^2\varphi\\ \quad+\sin^2\theta\cos^2\varphi\end{array} & \begin{array}{l}\sin\theta\cos\theta\cos\psi\cos\varphi\\ \quad-\sin\psi\sin\theta\sin\varphi\\ \quad-\sin\theta\cos\theta\cos\varphi\end{array}\\
\begin{array}{l}\sin\psi\sin\theta\cos\varphi\\ \quad-\sin\theta\cos\theta\cos\psi\sin\varphi\\ \quad+\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\end{array} & \begin{array}{l}\sin\psi\sin\theta\sin\varphi\\ \quad+\sin\theta\cos\theta\cos\psi\cos\varphi\\ \quad-\sin\theta\cos\theta\cos\varphi\end{array} & \begin{array}{l}\sin^2\theta\cos\psi+\cos^2\theta\\ \\ \\ \end{array}
\end{matrix}\right\} \tag{17}$$

可见第三个转动（绕ox_3轴的转动）的转动张量$\mathbf{R}_3$在基底向量为$\mathbf{i}_1^{(2)}$、$\mathbf{i}_2^{(2)}$、$\mathbf{i}_3^{(2)}$的坐标系中的分量表示式为(15)，在基底向量为$\mathbf{i}_1^{(1)}$、$\mathbf{i}_2^{(1)}$、$\mathbf{i}_3^{(1)}$的坐标系中的分量表示式为(16)，而在$ox_1x_2x_3$坐标系中的分量表示式为(17)．Кочин所指出的

$$\Psi=\left\{\begin{matrix}\cos\psi & \sin\psi & 0\\ -\sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}\right\} \tag{18}$$

其实并不是绕ox_3'轴转动ψ角的转动张量．

三个转动的合成转动张量$\mathbf{R}$为

$$\mathbf{R}=\mathbf{R}_3\cdot\mathbf{R}_2\cdot\mathbf{R}_1 \tag{19}$$

$\mathbf{R}$在$ox_1x_2x_3$坐标系中的分量为$\mathbf{R}_1$、$\mathbf{R}_2$、$\mathbf{R}_3$在$ox_1x_2x_3$坐标系中分量之标积．同样的，$\mathbf{R}$在指定的某个坐标系中的分量则为$\mathbf{R}_1$、$\mathbf{R}_2$、$\mathbf{R}_3$在那个指定的坐标系中分量之标积．Кочин把合成转动张量令为$\Psi\Theta\Phi$在概念上也是不清楚的．

现在我们通过$\mathbf{R}_1$、$\mathbf{R}_2$、$\mathbf{R}_3$在$ox_1x_2x_3$坐标系中的分量表示式(4)、(11)、(17)来求出合成转动的转动张量$\mathbf{R}$在$ox_1x_2x_3$坐标系中的分量表示式．将(4)、(11)、(17)代入(19)式，经过展开、化简、整理，则得到用Euler角表示的转动张量$\mathbf{R}$

$$\mathbf{R}=\left\{\begin{matrix}
\begin{array}{l}\cos\psi\cos\varphi\\ \quad-\sin\varphi\sin\psi\cos\theta\end{array} & \begin{array}{l}-\sin\psi\cos\varphi\\ \quad-\sin\varphi\cos\theta\cos\psi\end{array} & \sin\theta\sin\varphi\\
\begin{array}{l}\cos\psi\sin\varphi\\ \quad+\sin\psi\cos\theta\cos\varphi\end{array} & \begin{array}{l}-\sin\varphi\sin\psi\\ \quad+\cos\varphi\cos\psi\cos\theta\end{array} & -\sin\theta\cos\varphi\\
\sin\psi\sin\theta & \sin\theta\cos\psi & \cos\theta
\end{matrix}\right\} \tag{20}$$

Кочин给出的$\mathbf{r}'=\Psi\Theta\Phi\mathbf{r}$是个坐标变换公式，不是合成转动的转动张量标积公式．

我们认为，指出 Кочин 在这个问题上的错误，有助于弄清转动张量的概念及其表示方法．

本文承钱伟长教授审阅，并提出宝贵意见，作者根据钱伟长教授的意见，作了修改．对此，作者致以深切的谢意．

参 考 文 献

1. Кочин. Н. Е. *Векторное Исчисление и Начало Тензорного Исчисления*. изд. 8-е. изд. АН СССР. Москва. 1961. стр. 316（中译本，史福培等译，《向量计算及张量计算初步》，高等教育出版社）.

A Note on the Expression for the Rotation Tensor in Terms of Euler Angles

Cheng Yuan-sheng

(Department of Mechanical Engineering, Shanghai University of Technology, Shanghai)

Abstract

It is pointed out in this paper that the derivation of the expression for the rotation tensor in terms of Euler angles by N. E. Kochin[1] is erroneous. To point out Kochin's deficit on this problem is advantageous for perfecting the concept of the rotation tensor and its method of expression.