

# 夹层圆板大挠度问题的精确解

刘人怀 施云方

(中国科学技术大学近代力学系, 1981年6月16日收到)

## 摘 要

本文应用幂级数方法求出了在均布载荷作用下夹层圆板大挠度问题的精确解. 我们应用这一精确解验证了本文第一作者<sup>[4]</sup>以前用修正迭代法所得的解析解的精确度. 由验证可知, 解析解的精确性是十分令人满意的.

## 一、引 言

夹层板的大挠度问题是一个很有实际意义的问题, 已经引起许多人专门研究. Reissner<sup>[1]</sup>首先建立了具有软夹心和极薄表板的夹层矩形板的大挠度理论. 但是, 对于夹层圆板的大挠度问题说来, 却只有极少数人研究过. 近来, 中国科学院力学研究所板壳组<sup>[2]</sup>研究了这方面的一个问题. 接着, 刘人怀<sup>[3,4]</sup>进一步做了一些工作. 本文是前文<sup>[4]</sup>工作的继续. 应用幂级数方法, 我们求解了在均布载荷作用下的具有不同边界条件的夹层圆板的大挠度问题, 获得了精确解. 我们所处理的四种边界条件是: (1)固定; (2)滑动固定; (3)简支; (4)铰支. 最后, 我们还将此精确解与刘人怀<sup>[4]</sup>用修正迭代法所得的解析解进行了比较. 由比较可知: 以前的解析解的精确性是十分令人满意的.

## 二、基本方程和边界条件

今考虑一半径为 $a$ , 承受均布载荷 $q$ 的夹层圆板. 为了简便起见, 本文使用的主要符号与文献[4]所用的相同. 应用文献[4]所给的简化方程, 即得由夹层圆板中面上的挠度 $w$ 和径向应力 $\sigma_{r_0}$ 所满足的大挠度方程组:

$$\left. \begin{aligned} D \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dw}{dr} + \frac{2tD}{G_2 h_0} \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \sigma_{r_0} \frac{dw}{dr} \right) - 2t \sigma_{r_0} \frac{dw}{dr} - \frac{1}{2} q r = 0 \\ \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r^2 \sigma_{r_0}) + \frac{E}{2r} \left( \frac{dw}{dr} \right)^2 = 0 \end{aligned} \right\} (2.1)$$

其中 $D$ 是夹层圆板的抗弯刚度, 为

$$D = \frac{E t h_0^2}{2(1-\nu^2)} \quad (2.2)$$

非线性方程组(2.1)将分别在下列四种常用的边界条件下求解:

## 1. 固定:

$$\left. \begin{array}{l} \text{当 } r=a \text{ 时, } w=0, \psi=0, u=0; \\ \text{当 } r=0 \text{ 时, } \psi=0, \sigma_{r0} \text{ 有限.} \end{array} \right\} \quad (2.3)$$

## 2. 滑动固定:

$$\left. \begin{array}{l} \text{当 } r=a \text{ 时, } w=0, \psi=0, \sigma_{r0}=0; \\ \text{当 } r=0 \text{ 时, } \psi=0, \sigma_{r0} \text{ 有限.} \end{array} \right\} \quad (2.4)$$

## 3. 简支:

$$\left. \begin{array}{l} \text{当 } r=a \text{ 时, } w=0, M_r=0, \sigma_{r0}=0; \\ \text{当 } r=0 \text{ 时, } \psi=0, \sigma_{r0} \text{ 有限.} \end{array} \right\} \quad (2.5)$$

## 4. 铰支:

$$\left. \begin{array}{l} \text{当 } r=a \text{ 时, } w=0, M_r=0, u=0; \\ \text{当 } r=0 \text{ 时, } \psi=0, \sigma_{r0} \text{ 有限.} \end{array} \right\} \quad (2.6)$$

这里,  $u$  是夹层圆板中面上点的径向位移,  $\psi$  是夹层圆板中面法线在径向平面内的转角,  $M_r$  是夹层圆板的径向弯矩,  $\sigma_{r0}$  是夹层圆板中面内的环向应力,

$$\left. \begin{array}{l} u = \frac{r}{E} (\sigma_{r0} - \nu \sigma_{\theta 0}) \\ \psi = -\frac{2t}{G_2 h_0} \sigma_{r0} \frac{dw}{dr} - \frac{dw}{dr} - \frac{qr}{2G_2 h_0} \\ M_r = D \left( \frac{d\psi}{dr} + \nu \frac{\psi}{r} \right) \\ \sigma_{r0} = \frac{d}{dr} (r \sigma_{r0}) \end{array} \right\} \quad (2.7a, b, c, d)$$

首先, 将非线性方程组(2.1)和边界条件(2.3)–(2.6)转化为无量纲形式. 为此, 我们引入下列符号:

$$\left. \begin{array}{l} \rho = \frac{r}{a}, \quad W = \sqrt{2(1-\nu^2)} \frac{w}{h_0}, \quad \phi = \frac{dW}{d\rho} \\ S_r = -\frac{2ta^2}{D} \sigma_{r0}, \quad S_\theta = \frac{2ta^2}{D} \sigma_{\theta 0}, \quad k = \frac{D}{G_2 h_0 a^2} \\ P = \frac{\sqrt{2(1-\nu^2)} a^4}{2h_0 D} q \end{array} \right\} \quad (2.8)$$

应用这些符号和式(2.7)以后, 方程组(2.1)化为

$$\left. \begin{array}{l} L[\rho(kS_r + 1)\phi] - S_\theta \phi - P\rho = 0 \\ L(\rho^2 S_r) + \frac{\phi^2}{\rho} = 0 \end{array} \right\} \quad (2.9)$$

边界条件(2.3)–(2.6)化为

## 1. 固定:

$$\left. \begin{array}{l} \text{当 } \rho=1 \text{ 时, } W=0, (kS_r + 1)\phi + kP=0, \frac{d}{d\rho}(\rho S_r) - \nu S_\theta = 0; \\ \text{当 } \rho=0 \text{ 时, } (kS_r + 1)\phi = 0, S_r \text{ 有限.} \end{array} \right\} \quad (2.10)$$

2. 滑动固定:

$$\left. \begin{aligned} &\text{当 } \rho=1 \text{ 时, } W=0, (kS_0+1)\phi+kP=0, S_0=0; \\ &\text{当 } \rho=0 \text{ 时, } (kS_0+1)\phi=0, S_0 \text{ 有限.} \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

3. 简支:

$$\left. \begin{aligned} &\text{当 } \rho=1 \text{ 时, } W=0, \frac{d}{d\rho}[(kS_0+1)\phi]+\nu(kS_0+1)\phi+k(1+\nu)P=0, S_0=0; \\ &\text{当 } \rho=0 \text{ 时, } (kS_0+1)\phi=0, S_0 \text{ 有限.} \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

4. 铰支:

$$\left. \begin{aligned} &\text{当 } \rho=1 \text{ 时, } W=0, \frac{d}{d\rho}[(kS_0+1)\phi]+\nu(kS_0+1)\phi+k(1+\nu)P=0 \\ &\quad \frac{d}{d\rho}(\rho S_0)-\nu S_0=0 \\ &\text{当 } \rho=0 \text{ 时, } (kS_0+1)\phi=0, S_0 \text{ 有限.} \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

其中

$$L(\dots) = \frac{d}{d\rho} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho}(\dots) \quad (2.14)$$

有了  $S_0$  和  $\phi$ , 就能得到所有的应力和位移的计算公式. 无量纲环向应力  $S_\theta$  由式(2.7d)求得. 积分  $\phi$ , 并注意到  $\rho=1$  时的边界条件  $W=0$ , 则可得到无量纲挠度  $W$ . 于是, 有:

$$\left. \begin{aligned} S_\theta &= \frac{d}{d\rho}(\rho S_0) \\ W &= \int_1^\rho \phi d\rho \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

### 三、用幂级数方法求解

应用幂级数方法, 我们可求得上述非线性方程组和边界条件的精确解. 假定  $S_0$  和  $\phi$  分别是  $\rho$  的对称函数和反对称函数, 在用幂级数表示后, 为

$$\left. \begin{aligned} S_0 &= \sum_{i=0}^{\infty} a_{2i} \rho^{2i} \\ \phi &= \sum_{i=0}^{\infty} b_{2i+1} \rho^{2i+1} \end{aligned} \right\} \quad (3.1a, b)$$

其中  $a_{2i}, b_{2i+1}$  ( $i=0, 1, 2, \dots$ ) 是待定的常数. 显然, 这些级数已满足夹层圆板的两个中心条件.

将式(3.1)代入式(2.15), 有

$$\left. \begin{aligned} S_\theta &= \sum_{i=0}^{\infty} (2i+1) a_{2i} \rho^{2i} \\ W &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{b_{2i+1}}{2(i+1)} [\rho^{2(i+1)} - 1] \end{aligned} \right\} \quad (3.2a, b)$$

这说明,如果知道了常数  $a_2$  和  $b_{2i+1}(i=0,1,2,\dots)$ , 则夹层圆板的所有应力和位移都能确定.

将级数 (3.1) 代入方程 (2.9), 并注意到方程 (2.9) 必须对任何  $\rho$  值都成立, 于是我们得到常数  $a_{2i}$  和  $b_{2i+1}$  之间的关系式:

$$\left. \begin{aligned} a_{2i} &= -\frac{1}{4i(i+1)} \sum_{m=0}^{i-1} b_{2m+1} b_{2i-2m-1}, \quad i=1, 2, 3, \dots \\ b_{2i+1} &= \frac{1}{ka_0+1} \left[ \frac{1}{4i(i+1)} \sum_{m=0}^{i-1} a_{2m} b_{2i-2m-1} - k \sum_{m=1}^i a_{2m} b_{2i-2m+1} \right], \quad i=2, 3, 4, \dots \\ b_2 &= \frac{1}{8(ka_0+1)} [(a_0-8ka_2)b_1+P] \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

由此看到,只要知道了  $a_0$  和  $b_1$  的值, 其它常数便可以依次确定. 这样一来, 我们便可用级数 (3.1a) 和 (3.2) 确定板中所有点的  $S_r$ ,  $S_\theta$  和  $W$  的值.

为了确定常数  $a_0$  和  $b_1$ , 我们需要应用前面每种边界条件中尚未用过的两个条件. 将式 (3.1) 代入这两个边界条件, 便得关于待定常数  $a_0$  和  $b_1$  的非线性方程组:

1. 对于固定

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} (2i+1-\nu) a_{2i} &= 0 \\ \sum_{i=0}^{\infty} \left( k \sum_{m=0}^i a_{2m} b_{2i-2m+1} + b_{2i+1} \right) + kP &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

2. 对于滑动固定

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} a_{2i} &= 0 \\ \sum_{i=0}^{\infty} \left( k \sum_{m=0}^i a_{2m} b_{2i-2m+1} + b_{2i+1} \right) + kP &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

3. 对于简支

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} a_{2i} &= 0 \\ \sum_{i=0}^{\infty} (2i+1+\nu) \left( k \sum_{m=0}^i a_{2m} b_{2i-2m+1} + b_{2i+1} \right) + k(1+\nu)P &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

4. 对于铰支

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} (2i+1-\nu) a_{2i} &= 0 \\ \sum_{i=0}^{\infty} (2i+1+\nu) \left( k \sum_{m=0}^i a_{2m} b_{2i-2m+1} + b_{2i+1} \right) + k(1+\nu)P &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

使用牛顿法, 可求得这些方程组关于  $a_0$  和  $b_1$  的数值解. 对于给定的泊松比  $\nu$ 、无量纲特征参数  $k$  和无量纲横向载荷  $P$  的值, 本文采用一种简单的方法来选取  $a_0$  和  $b_1$  的初始值. 我们从很小的载荷, 如  $P=P_0$  开始, 这时可令  $a_0$  和  $b_1$  的初始值为零. 求解上面的方程组, 便得在  $P=P_0$  情况下  $a_0$  和  $b_1$  的数值解. 然后, 对于十分接近于  $P_0$  值的另一载荷值情况, 我们便可将刚才所得的解作为此时的初始值. 于是依此类推, 按照载荷  $P$  的由小到大的顺序, 便能毫无困难地依次给出  $a_0$  和  $b_1$  的其它初始值. 为了简化以后的计算, 在确定  $a_0$  和  $b_1$  的初始值时, 使用插值法是有益的. 这样, 上述方程组的牛顿迭代程序能够迅速收敛.

在 DJS-8 机上完成了繁冗的数值计算, 结果给在表 1 中.

计算表明, 级数 (3.1) 收敛很慢. 当  $k \leq 0.01$  时, 我们必须取级数前面二十五项才能得到足够精确的结果. 随着  $k$  值的增大, 级数收敛变得更慢, 因此级数中必须计算的项数越来越多. 当  $k=0.10$  时, 这些级数至少要取八十项.

应用式 (3.2b), 可得下列关于无量纲中心挠度  $W_0$  的公式:

$$W_0 = W|_{\rho=0} = - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{b_{2i+1}}{2(i+1)} \tag{3.8}$$

表1a 固定夹层圆板的  $a_0$  和  $b_1$  的值  $\nu=0.3$

$k=$	0		0.01		0.05		0.10	
	$P$	$a_0$	$b_1$	$a_0$	$b_1$	$a_0$	$b_1$	$a_0$
5	0.047429	-0.62302	0.061064	-0.67170	0.13751	-0.85953	0.27434	-1.0695
10	0.18696	-1.2345	0.23905	-1.3245	0.51388	-1.6389	0.93262	-1.9088
15	0.41099	-1.8245	0.52006	-1.9431	1.0526	-2.3021	1.7441	-2.5211
20	0.70863	-2.3856	0.88555	-2.5181	1.6844	-2.8526	2.5953	-2.9802
25	1.0676	-2.9133	1.3164	-3.0456	2.3631	-3.3095	3.4439	-3.3412
30	1.4759	-3.4058	1.7955	-3.5259	3.0621	-3.6930	4.2754	-3.6373
35	1.9226	-3.8631	2.3088	-3.9616	3.7665	-4.0198	5.0853	-3.8883
40	2.3984	-4.2865	2.8456	-4.3567	4.4682	-4.3025	5.8730	-4.1066
45	2.8958	-4.6781	3.3976	-4.7155	5.1629	-4.5506	6.6393	-4.3004
50	3.4085	-5.0405	3.9590	-5.0421	5.8484	-4.7711	7.3856	-4.4751
55	3.9320	-5.3760	4.5254	-5.3406	6.5236	-4.9694	8.1133	-4.6345
60	4.4624	-5.6872	5.0937	-5.6140	7.1981	-5.1494	8.8238	-4.7816
65	4.9970	-5.9764	5.6615	-5.8658	7.8420	-5.3142	9.5184	-4.9183
70	5.5335	-6.2457	6.2274	-6.0983	8.4854	-5.4663	10.198	-5.0463
75	6.0704	-6.4971	6.7902	-6.3138	9.1187	-5.6075	10.864	-5.1668
80	6.6062	-6.7322	7.3490	-6.5142	9.7423	-5.7395	11.518	-5.2809
85	7.1401	-6.9527	7.9035	-6.7013	10.356	-5.8633	12.160	-5.3893
90	7.6714	-7.1598	8.4532	-6.8765	10.962	-5.9801	12.790	-5.4927
95	8.1995	-7.3549	8.9978	-7.0410	11.559	-6.0907	13.410	-5.5916
100	8.7240	-7.5390	9.5374	-7.1959	12.147	-6.1958	14.021	-5.6865

表1b

滑动固定夹层圆板的  $a_0$  和  $b_1$  的值

$k=$	0		0.01		0.05		0.10	
	$a_0$	$b_1$	$a_0$	$b_1$	$a_0$	$b_1$	$a_0$	$b_1$
5	0.024367	-0.62422	0.029851	-0.67372	0.057756	-0.86949	0.10526	-1.1058
10	0.096910	-1.2438	0.11841	-1.3399	0.22521	-1.7076	0.39513	-2.1112
15	0.21601	-1.8543	0.26282	-1.9916	0.48712	-2.4904	0.81323	-2.9688
20	0.37911	-2.4519	0.45873	-2.6230	0.82373	-3.2047	1.3062	-3.6813
25	0.58296	-3.0332	0.70077	-3.2295	1.2155	-3.8472	1.8372	-4.2724
30	0.82382	-3.5957	0.98307	-3.8081	1.6457	-4.4209	2.3842	-4.7684
35	1.0977	-4.1373	1.2997	-4.3569	2.1013	-4.9323	2.9349	-5.1909
40	1.4006	-4.6569	1.6449	-4.8753	2.5726	-5.3888	3.4826	-5.5568
45	1.7286	-5.1537	2.0136	-5.3635	3.0528	-5.7980	4.0236	-5.8784
50	2.0780	-5.6278	2.4012	-5.8224	3.5370	-6.1666	4.5562	-6.1647
55	2.4454	-6.0792	2.8036	-6.2533	4.0219	-6.5004	5.0796	-6.4228
60	2.8279	-6.5086	3.2175	-6.6577	4.5052	-6.8045	5.5936	-6.6576
65	3.2226	-6.9166	3.6401	-7.0372	4.9853	-7.0829	6.0983	-6.8732
70	3.6274	-7.3042	4.0690	-7.3937	5.4613	-7.3393	6.5939	-7.0726
75	4.0400	-7.6723	4.5022	-7.7288	5.9325	-7.5765	7.0808	-7.2583
80	4.4688	-8.0219	4.9381	-8.0442	6.3985	-7.7969	7.5594	-7.4322
85	4.8823	-8.3541	5.3756	-8.3412	6.8590	-8.0028	8.0300	-7.5959
90	5.3091	-8.6699	5.8134	-8.6215	7.3141	-8.1957	8.4932	-7.7506
95	5.7382	-8.9702	6.2509	-8.8863	7.7636	-8.3773	8.9491	-7.8974
100	6.1686	-9.2560	6.6872	-9.1368	8.2076	-8.5486	9.3983	-8.0373

表1c

简支夹层圆板的  $a_0$  和  $b_1$  的值 $\nu=0.3$ 

$k$	0		0.01		0.05		0.10	
	$a_0$	$b_1$	$a_0$	$b_1$	$a_0$	$b_1$	$a_0$	$b_1$
5	0.22980	-1.5457	0.24501	-1.5874	0.30821	-1.7446	0.39023	-1.9171
10	0.82268	-2.8940	0.86536	-2.9444	1.0281	-3.1094	1.2096	-3.2477
15	1.6072	-3.9899	1.8682	-4.0208	1.8854	-4.0991	2.1045	-4.1316
20	2.4650	-4.8684	2.5310	-4.8674	2.7564	-4.8337	2.9726	-4.7642
25	3.3365	-5.5807	3.3974	-5.5448	3.6015	-5.4034	3.7950	-5.2502
30	4.1956	-6.1686	4.2446	-6.0994	4.4106	-5.8631	4.5727	-5.6440
35	5.0314	-6.6628	5.0645	-6.5633	5.1835	-6.2463	5.3106	-5.9755
40	5.8403	-7.0850	5.8549	-6.9588	5.9227	-6.5742	6.0139	-6.2627
45	6.6217	-7.4510	6.6167	-7.3015	6.6314	-6.8606	6.6871	-6.5167
50	7.3766	-7.7721	7.3512	-7.6026	7.3129	-7.1149	7.3341	-6.7452
55	8.1064	-8.0568	8.0607	-7.8703	7.9700	-7.3439	7.9580	-6.9535
60	8.8129	-8.3117	8.7469	-8.1108	8.6052	-7.5524	8.5614	-7.1453
65	9.4977	-8.5417	9.4119	-8.3287	9.2206	-7.7440	9.1465	-7.3234
70	10.163	-8.7508	10.057	-8.5278	9.8182	-7.9215	9.7152	-7.4900
75	10.809	-8.9420	10.685	-8.7109	10.400	-8.0870	10.269	-7.6468
80	11.438	-9.1179	11.296	-8.8803	10.966	-8.2424	10.809	-7.7950
85	12.051	-9.2806	11.891	-9.0378	11.519	-8.3888	11.337	-7.9358
90	12.649	-9.4318	12.472	-9.1851	12.059	-8.5276	11.855	-8.0701
95	13.234	-9.5729	13.041	-9.3234	12.588	-8.6594	12.359	-8.1985
100	13.806	-9.7050	13.596	-9.4538	13.106	-8.7852	12.855	-8.3217

表1d 铰支夹层圆板的  $a_0$  和  $b_1$  的值  $\nu=0.3$

k=	0		0.01		0.05		0.10	
	$a_0$	$b_1$	$a_0$	$b_1$	$a_0$	$b_1$	$a_0$	$b_1$
P								
5	0.59429	-1.4118	0.62887	-1.4369	0.76263	-1.5222	0.91577	-1.6006
10	1.6835	-2.3378	1.7457	-2.3479	1.9663	-2.3723	2.1964	-2.3828
15	2.7969	-2.9666	2.8693	-2.9565	3.1223	-2.9152	3.3739	-2.8717
20	3.8579	-3.4356	3.9329	-3.4072	4.1941	-3.3125	4.4533	-3.2303
25	4.8611	-3.8084	4.9352	-3.7646	5.1956	-3.6276	5.4564	-3.5178
30	5.8128	-4.1178	5.8844	-4.0610	6.1398	-3.8901	6.3996	-3.7600
35	6.7199	-4.3824	6.7862	-4.3145	7.0367	-4.1162	7.2945	-3.9707
40	7.5887	-4.6137	7.6532	-4.5365	7.8940	-4.3158	8.1492	-4.1584
45	8.4242	-4.8194	8.4847	-4.7343	8.7176	-4.4951	8.9701	-4.3283
50	9.2305	-5.0048	9.2870	-4.9129	9.5120	-4.6583	9.7618	-4.4841
55	10.011	-5.1738	10.063	-5.0761	10.281	-4.8086	10.528	-4.6284
60	10.768	-5.3291	10.817	-5.2264	11.027	-4.9431	11.271	-4.7630
65	11.505	-5.4730	11.550	-5.3663	11.753	-5.0785	11.995	-4.8896
70	12.223	-5.6071	12.264	-5.4965	12.460	-5.2012	12.700	-5.0091
75	12.924	-5.7329	12.962	-5.6191	13.151	-5.3173	13.389	-5.1225
80	13.609	-5.8513	13.644	-5.7349	13.827	-5.4274	14.063	-5.2305
85	14.280	-5.9633	14.312	-5.8446	14.489	-5.5324	14.723	-5.3337
90	14.938	-6.0696	14.966	-5.9490	15.138	-5.6328	15.370	-5.4327
95	15.583	-6.1709	15.609	-6.0486	15.775	-5.7291	16.005	-5.5278
100	16.217	-6.2676	16.240	-6.1440	16.401	-5.8216	16.629	-5.6195

如欲求夹层圆板的中心和边缘应力，我们就必须利用级数(3.1a)和(3.2a). 其结果为：

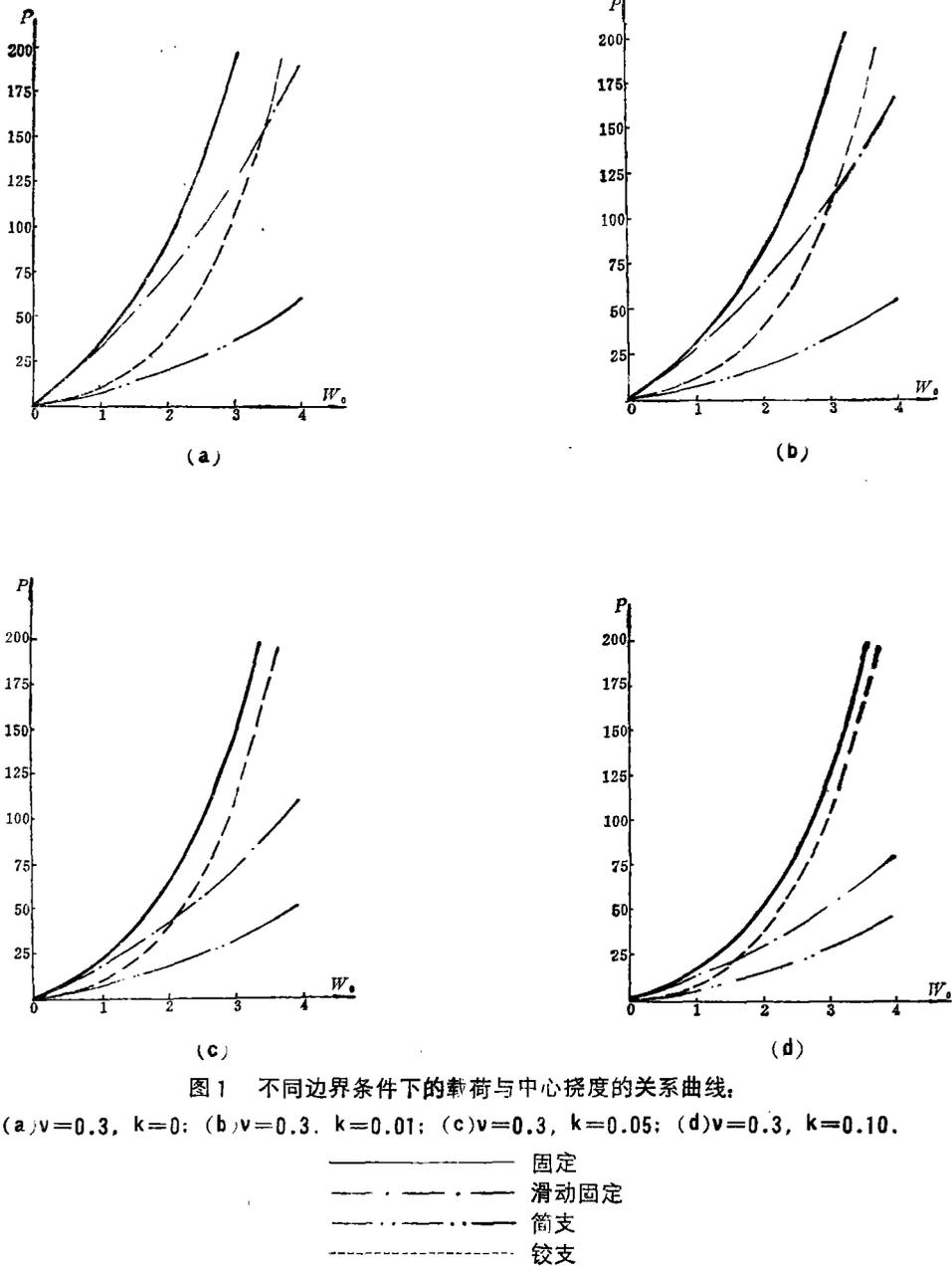
$$\left. \begin{aligned}
 S_r(0) &= S_r|_{\rho=0} = a_0 \\
 S_\theta(0) &= S_\theta|_{\rho=0} = a_0 \\
 S_r(1) &= S_r|_{\rho=1} = \sum_{i=0}^{\infty} a_{2i} \\
 S_\theta(1) &= S_\theta|_{\rho=1} = \sum_{i=0}^{\infty} (2i+1)a_{2i}
 \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

由边界条件(2.11)和(2.12)可知，在滑动固定和简支两种边界情况下，夹层圆板的无量纲边缘径向应力 $S_r(1)$ 恒等于零。

最后，我们将夹层圆板的挠度和应力的计算结果给在图1, 2, 3, 4中。

### 四、讨 论

本文使用幂级数方法求得了夹层圆板大挠度问题的精确解。虽然此法的数值计算量相当大，但我们使用电子计算机容易地克服了这一困难。应用本文的精确解，我们能验证文献[4]中所给的解析解的精确度。以滑动固定夹层圆板为例，我们将这两个解的数值结果及其相对误差给在表2中。为简单起见，今将文献[4]中的不同近似的解析解加以区分。为此，我们分别用下标2和3表示二次近似解和三次近似解。由表可知：



(1) 三次近似解与精确解几乎重合, 它们的相对误差小于 0.5%;

(2) 二次近似解便有令人满意的精确性. 一般说来, 它与精确解之相对误差小于 10%. 这说明, 对夹层圆板的大挠度问题而言, 修正迭代法<sup>[4]</sup>能给出十分精确的解, 即使只做到二次近似, 就能得到满意的近似解.

致谢: 刘怀玉同志参加了本文一部分数值计算工作, 特此致谢.

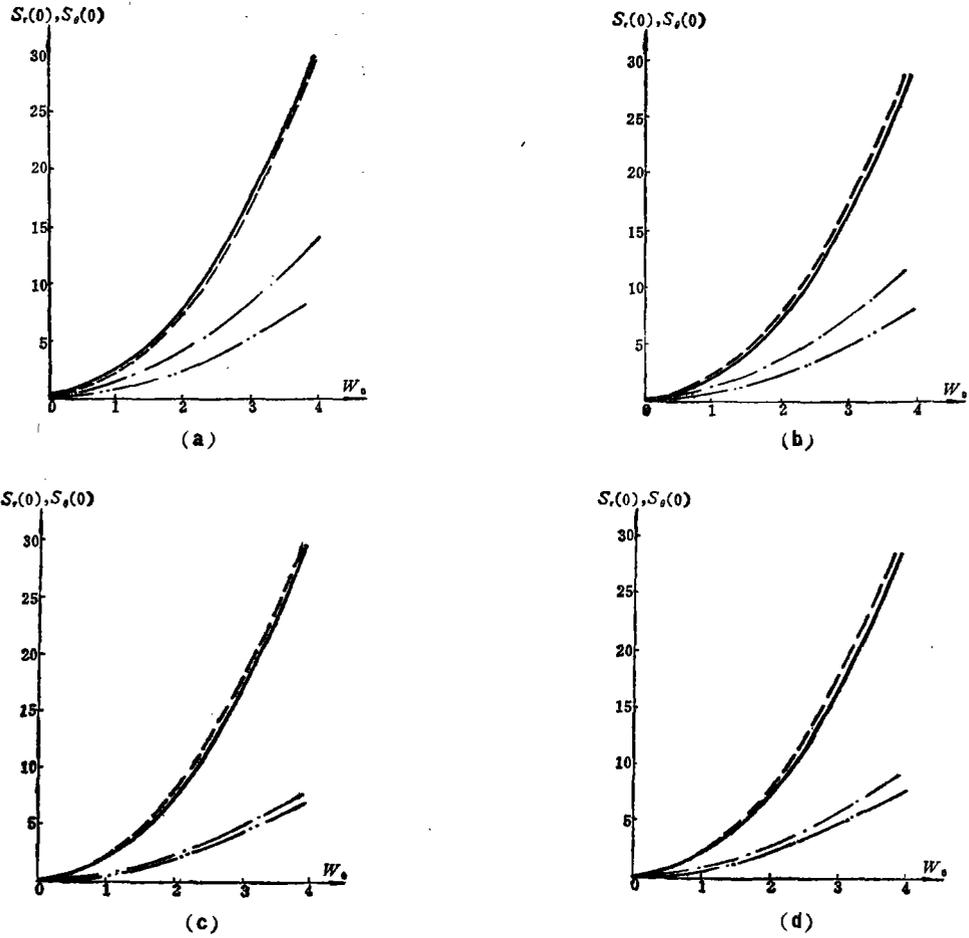
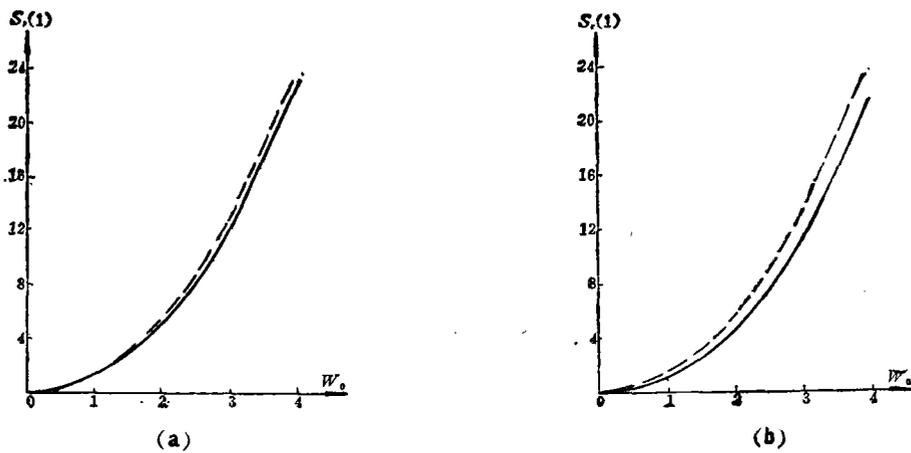


图2 不同边界条件下的夹层圆板中心的径向应力和环向应力,

(a)  $\nu=0.3, k=0$ ; (b)  $\nu=0.3, k=0.01$ ; (c)  $\nu=0.3, k=0.05$ ; (d)  $\nu=0.3, k=0.10$ .

—— 固定  
 - · - · - 滑动固定  
 ····· 简支  
 - - - - 铰支



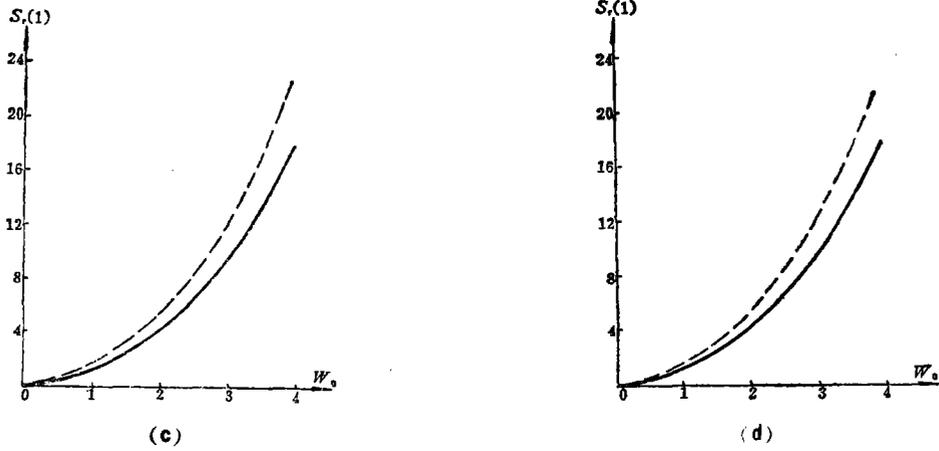


图 3 不同边界条件下的夹层圆板边缘的径向应力:

(a) $\nu=0.3, k=0$ ; (b) $\nu=0.3, k=0.01$ ; (c) $\nu=0.3, k=0.05$ ; (d) $\nu=0.3, k=0.10$ .

—— 固定  
 - - - 铰支

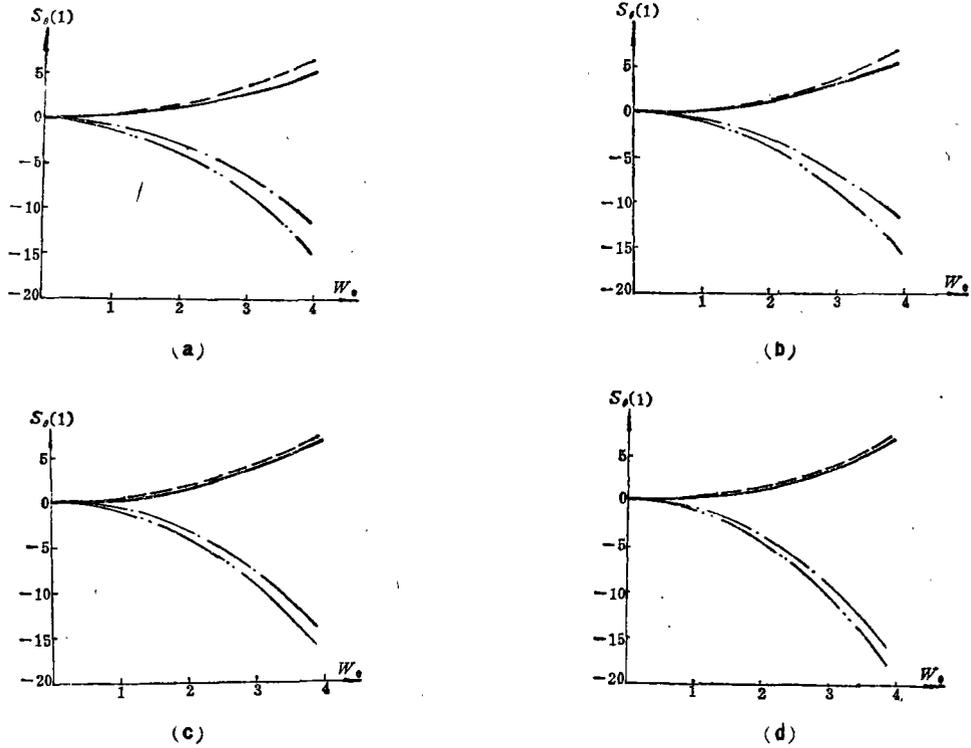


图 4 不同边界条件下的夹层圆板边缘的环向应力:

(a) $\nu=0.3, k=0$ ; (b) $\nu=0.3, k=0.01$ ; (c) $\nu=0.3, k=0.05$ ; (d) $\nu=0.3, k=0.10$ .

—— 固定  
 ..... 滑动固定  
 - . - . 简支  
 - - - 铰支

表2a

文[4]的解析解与本文精确解的比较  
k=0

$W_0$		0.46535	1.0544	1.4587	1.9438	2.4723	3.0157	3.4847	3.9625	
P	本 文	15	35	50	70	95	125	155	190	
	文[4]	$P_2$	15.000	35.007	50.036	70.144	95.455	126.16	167.27	194.08
		相对误差 (%)	0	-0.02	-0.07	-0.2	-0.5	-0.9	-1.5	-2.1
	文[4]	$P_3$	15.000	35.000	50.000	69.999	94.997	125.00	155.05	190.22
相对误差 (%)		0	0	0	0.001	0.003	0	-0.03	-0.1	
S <sub>r</sub> (0)	本 文	0.21601	1.0977	2.0760	3.6274	5.7382	8.3184	10.842	13.667	
	文[4]	$S_{r2}(0)$	0.21600	1.0974	2.0761	3.6175	5.7003	8.2074	10.607	13.221
		相对误差 (%)	0.005	0.03	0.09	0.3	0.7	1.3	2.2	3.3
S <sub>r</sub> (1)	本 文	-0.14458	-0.74671	-1.4388	-2.5816	-4.235	-6.4074	-8.6920	-11.433	
	文[4]	$S_{r2}(1)$	-0.14458	-0.74686	-1.4398	-2.5871	-4.2579	-6.4810	-8.8638	-11.797
		相对误差 (%)	0	0.02	0.07	0.2	0.5	1.1	2.0	3.2

表2b

文[4]的解析解与本文精确解的比较  
k=0.01

$W_0$		0.53828	1.0475	1.5122	2.0600	2.5369	2.9576	3.5035	3.9832	
P	本 文	15	30	45	65	85	105	135	165	
	文[4]	$P_2$	15.000	30.011	45.066	65.301	85.812	106.67	138.66	171.52
		相对误差 (%)	0	-0.04	-0.2	-0.5	-1.0	-1.6	-2.7	-4.0
	文[4]	$P_3$	15.000	30.000	44.999	64.993	84.978	104.96	134.86	165.08
相对误差 (%)		0	0	0.002	0.01	0.03	0.04	0.03	-0.05	
S <sub>r</sub> (0)	本 文	0.26282	0.98307	2.0136	3.6401	5.3756	7.1220	9.6776	12.121	
	文[4]	$S_{r2}(0)$	0.26281	0.98261	2.0097	3.6175	5.3054	6.9652	9.3100	11.452
		相对误差 (%)	0.004	0.05	0.2	0.6	1.3	2.2	3.8	5.5
S <sub>r</sub> (1)	本 文	-0.19551	-0.74562	-1.5693	-2.9573	-4.5570	-6.2900	-9.0467	-11.924	
	文[4]	$S_{r2}(1)$	-0.19551	-0.74588	-1.5717	-2.9719	-4.6068	-6.4120	-9.3754	-12.612
		(%) 相对误差	0	0.03	0.2	0.5	1.1	1.9	3.6	5.8

表2c

文[4]的解析解与本文精确解的比较

k=0.05

$W_0$		0.55524	1.0734	1.5387	1.9528	2.4950	2.9646	3.5094	3.9866	
P	本 文	10	20	30	40	55	70	90	110	
	文[4]	$P_2$	10.001	20.021	30.118	40.365	56.135	72.466	95.174	118.93
		相对误差 (%)	-0.01	-0.1	-0.4	-0.9	-2.1	-3.5	-5.7	-8.1
	文[4]	$P_3$	10.000	19.999	29.995	39.976	54.907	69.792	89.663	109.79
相对误差 (%)		0	0.005	0.02	0.06	0.2	0.3	0.4	0.2	
$S_0(0)$	本 文	0.22521	0.82373	1.6457	2.5726	4.0219	5.4613	7.3141	9.0797	
	文[4]	$S_{02}(0)$	0.22518	0.82238	1.6353	2.5345	3.8874	5.1541	6.6730	8.0374
		相对误差 (%)	0.01	0.2	0.6	1.5	3.3	5.6	8.8	11.5
$S_0(1)$	本 文	-0.22712	-0.86149	-1.8057	-2.9717	-5.0088	-7.2875	-10.588	-14.110	
	文[4]	$S_{02}(1)$	-0.22714	-0.86263	-1.8152	-3.0099	-5.1661	-7.7093	-11.687	-16.364
		相对误差 (%)	0.009	0.1	0.5	1.3	3.1	5.8	10.4	16.0

表2d

文[4]的解析解与本文精确解的比较

k=0.10

$W_0$		0.40275	1.1415	1.4649	2.0293	2.5084	2.9258	3.4693	3.9416	
P	本 文	5	15	20	30	40	50	65	80	
	文[4]	$P_2$	5.0002	15.034	20.113	30.515	41.332	52.607	70.370	89.093
		相对误差 (%)	-0.004	-0.2	-0.6	-1.7	-3.3	-5.2	-8.3	-11.4
	文[4]	$P_3$	5.0000	14.998	19.993	29.949	39.853	49.738	64.732	80.311
相对误差 (%)		0	0.01	0.04	0.2	0.4	0.5	0.4	-0.4	
$S_0(0)$	本 文	0.10526	0.81323	1.3062	2.3843	3.4826	4.5562	6.0983	7.5594	
	文[4]	$S_{02}(0)$	0.10525	0.80991	1.2930	2.3118	3.2823	4.1650	5.3596	6.5113
		相对误差 (%)	0.01	0.4	1.0	3.0	5.8	8.6	12.1	13.9
$S_0(1)$	本 文	-0.12922	-1.0702	-1.7990	-3.5998	-5.7209	-8.0654	-11.885	-15.974	
	文[4]	$S_{02}(1)$	-0.12923	-1.0740	-1.8152	-3.7065	-6.0773	-8.9146	-14.090	-20.469
		相对误差 (%)	0.008	0.4	0.9	3.0	6.2	1.5	18.6	28.1

## 参 考 文 献

1. Reissner, E., Finite deflections of sandwich plates, *J. Aeron. Sci.*, 15, 7 (1948), 435; 17, 2(1950), 125.
2. 中国科学院北京力学研究所固体力学研究室板壳组, 夹层板壳的弯曲、稳定和振动, 科学出版社, 北京(1977), 42.
3. 刘人怀, 在边缘力矩作用下夹层圆板的非线性轴对称弯曲问题, 中国科学技术大学学报, 10, 2 (1980), 56.
4. 刘人怀, 夹层圆板的非线性弯曲, 应用数学和力学, 2, 2(1981), 173—190.

## Exact Solution for Circular Sandwich Plate with Large Deflection

Liu Ren-huai    Shi Yun-fang

*(Department of Modern Mechanics, University of Science  
and Technology of China, Hefei, Anhui)*

### Abstract

This paper gives the exact solution of large deflection of circular sandwich plate under the action of uniform lateral load by the method of power series. Making use of this solution, we can judge the accuracy of Liu Ren-huai's<sup>(4)</sup> analytic solution given by means of the modified iteration method. This indicates that previous solution has very satisfactory accuracy.