应用数学和力学，第3卷第2期(1982年3月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

用混合法求解带有离散支承的旋转体*

何 穷

(上海工业大学，1980年9月3日收到)

摘　要

本文采用超静定结构力学中力法处理带有离散支承的旋转体．将离散固定支承反力看成超静定未知力．用旋转体半解析有限元法去计算力法正则方程的系数阵（柔度阵）和右端项，求解力法正则方程．然后，将支承反力与外荷载叠加起来作为旋转体外荷载，而得到离散支承的旋转体有限元解．

一、一般荷载作用下旋转体有限元的数学描述

1. 分析方法的引入

在柱坐标下弹性力学平衡方程为

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma_{r,r}+\frac{1}{r}\tau_{\theta r,\theta}+\tau_{rz,z}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}+F_r=0\\
&\tau_{rz,r}+\frac{1}{r}\tau_{z\theta,\theta}+\sigma_{z,z}+\frac{\tau_{rz}}{r}+F_z=0\\
&\tau_{\theta r,r}+\frac{1}{r}\sigma_{\theta,\theta}+\tau_{z\theta,z}+\frac{2\tau_{\theta r}}{r}+F_\theta=0
\end{aligned}\right\}\tag{1.1}$$

其中 F_r、F_z，F_θ 为柱坐标下的体积力分量，而“，”号用在下标前边表示偏微商，如$\sigma_{r,r}$即是 $\dfrac{\partial\sigma_r}{\partial r}$．相应的应变-位移关系为

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_r\\ \varepsilon_z\\ \varepsilon_\theta\\ \gamma_{rz}\\ \gamma_{z\theta}\\ \gamma_{\theta r}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1/r&1/r&0\\
0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1/r&0&1&0&0&0\\
0&0&1/r&0&0&0&1&0&0&0&-1/r
\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{,r}\\ u_{,z}\\ u_{,\theta}\\ v_{,r}\\ v_{,z}\\ v_{,\theta}\\ w_{,r}\\ w_{,z}\\ w_{,\theta}\\ u\\ w\end{bmatrix}\tag{1.2}$$

---

* 杨礼求、钟万勰推荐．

其中 u, v, w 分别为旋转体内任意点的径向、轴向和环向位移．我们限定具有正交各向同性的弹性阵，其应力-应变关系如下：

$$\begin{Bmatrix}\sigma_r\\ \sigma_z\\ \sigma_\theta\\ \tau_{rz}\\ \tau_{z\theta}\\ \tau_{\theta r}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & & & \\ D_{12} & D_{22} & D_{23} & & 0 & \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} & & & \\ & & & D_{44} & 0 & 0\\ & 0 & & 0 & D_{55} & 0\\ & & & 0 & 0 & D_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_r\\ \varepsilon_z\\ \varepsilon_\theta\\ \gamma_{rz}\\ \gamma_{z\theta}\\ \gamma_{\theta r}\end{Bmatrix} \tag{1.3}$$

显然，这种应力-应变关系对大多数问题是足够的了．

我们假定旋转体任意点的位移具有形式：

$$\left.\begin{aligned} u&=\bar{u}\cos n\theta\\ v&=\bar{v}\cos n\theta\\ w&=\bar{w}\sin n\theta\end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

其中 $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ 是 r, z 的函数，而 n 是整数．将 (1.4) 代入 (1.3) 得到

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r&=\bar{\sigma}_r\cos n\theta & \tau_{rz}&=\bar{\tau}_{rz}\cos n\theta\\ \sigma_z&=\bar{\sigma}_z\cos n\theta & \tau_{z\theta}&=\bar{\tau}_{z\theta}\sin n\theta\\ \sigma_\theta&=\bar{\sigma}_\theta\cos n\theta & \tau_{\theta r}&=\bar{\tau}_{\theta r}\sin n\theta\end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

其中 $\bar{\sigma}_r$、$\bar{\sigma}_z$、$\bar{\sigma}_\theta$、$\bar{\tau}_{rz}$、$\bar{\tau}_{z\theta}$、$\bar{\tau}_{\theta r}$ 是 r、z、n 以及弹性常数的函数，而不依赖于 θ.设体积力分量有如下形式：

$$\left.\begin{aligned} F_r&=\bar{F}_r\cos n\theta\\ F_z&=\bar{F}_z\cos n\theta\\ F_\theta&=\bar{F}_\theta\sin n\theta\end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$

将 (1.5) 和 (1.6) 代入平衡方程 (1.1) 得

$$\left.\begin{aligned} &\left(\bar{\sigma}_{r,r}+\frac{n}{r}\bar{\tau}_{\theta r}+\bar{\tau}_{rz,z}+\frac{\bar{\sigma}_r-\bar{\sigma}_\theta}{r}+\bar{F}_r\right)\cos n\theta=0\\ &\left(\bar{\tau}_{rz,r}+\frac{n}{r}\bar{\tau}_{z\theta}+\bar{\sigma}_{z,z}+\frac{\bar{\tau}_{rz}}{r}+\bar{F}_z\right)\cos n\theta=0\\ &\left(\bar{\tau}_{\theta r,r}-\frac{n}{r}\bar{\sigma}_\theta+\bar{\tau}_{z\theta,z}+\frac{2\bar{\tau}_{\theta r}}{r}+\bar{F}_\theta\right)\sin n\theta=0\end{aligned}\right\} \tag{1.7}$$

其中 (……) 中各项不依赖于 θ. 由于 θ 是任意的，方程 (1.7) 必有 (……) $=0$. 因此，得到一组以 $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ 为函数以 r,z 为自变量的三个二阶偏微分方程．

我们得到结论：

① 在 (1.6) 式那种形式体积力作用下，旋转体的位移和应力分别取 (1.4) 和(1.5) 的形式．

② 弹性力学平衡方程 (1.1) 从一个三维问题退化成一系列二维问题．

对任意荷载 F_r、F_z、F_θ 可用富里叶级数展开为下列形式

$$\left.\begin{aligned} F_r(r,z,\theta)&=\sum_{n=0}^{\infty}\bar{F}_{rn}(r,z)\cos n\theta+\sum_{n=1}^{\infty}\bar{\bar{F}}_{rn}(r,z)\sin n\theta\\ F_z(r,z,\theta)&=\sum_{n=0}^{\infty}\bar{F}_{zn}(r,z)\cos n\theta+\sum_{n=1}^{\infty}\bar{\bar{F}}_{zn}(r,z)\sin n\theta\\ F_\theta(r,z,\theta)&=\sum_{n=1}^{\infty}\bar{F}_{\theta n}(r,z)\sin n\theta+\sum_{n=0}^{\infty}\bar{\bar{F}}_{\theta n}(r,z)\cos n\theta\end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

我们看到，前边讨论的是（1.8）式中“单横杠”级数的一个典型项.而对“双横杠”级数，只要交换一下“cos”和“sin”就可以了.对任意荷载作用下的旋转体有限元解，是无限个二维问题的叠加.收敛是很快的，实际上只取有限项就足够了.

2. 单元公式的表述

图1是剖开旋转体某一子午面的展开图.阴影部分就是旋转体单元剖面.单元就是具有三角形截面（或任意四边形）的圆环，而节点是一个节点圆.

我们叙述八节点（圆）的任意四边形截面等参元.因为4到7节点等参元也不难用降阶的办法由八点等参元得到.位移场的形式如下：

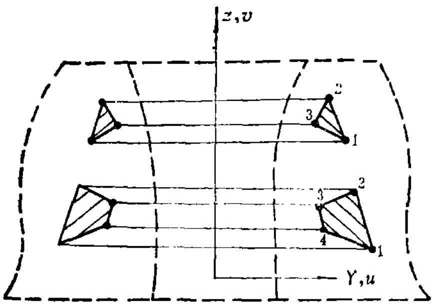


图1 三角形和四边形单元.

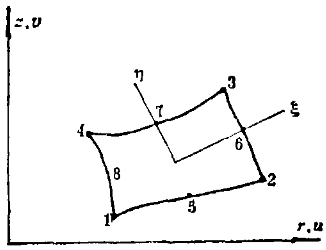


图2 八点等参元.

$$\left.\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^{8} N_i u_i \cos n\theta \\ v &= \sum_{i=1}^{8} N_i v_i \cos n\theta \\ w &= \sum_{i=1}^{8} N_i w_i \sin n\theta \end{aligned}\right\} \tag{1.9}$$

其中 N_i 为形函数，$u_i \cos n\theta$，$v_i \cos n\theta$，$w_i \sin n\theta$ 为节点位移.这个单元的剖面和节点安排次序如图2所示.

其中

$$\left.\begin{aligned} N_i &= (1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)(\xi\xi_i+\eta\eta_i-1)/4 \qquad & i=1,2,3,4 \\ N_i &= (1-\xi^2)(1+\eta\eta_i)/2 \qquad & i=5,7 \\ N_i &= (1+\xi\xi_i)(1-\eta^2)/2 \qquad & i=6,8 \end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

$$\left.\begin{aligned} \xi_i &= -1,1,1,-1,0,1,0,-1 \\ \eta_i &= -1,-1,1,1,-1,0,1,0 \\ i &= 1,2,3,4,5,6,7,8 \end{aligned}\right\} \tag{1.11}$$

其坐标插值

$$\left.\begin{aligned} r &= \sum_{i=1}^{8} N_i r_i \\ z &= \sum_{i=1}^{8} N_i z_i \end{aligned}\right\} \tag{1.12}$$

根据（1.9）和（1.12）式，得到下列关系

$$
\begin{Bmatrix} u_{,r} \\ u_{,z} \\ u_{,\theta} \\ v_{,r} \\ v_{,z} \\ v_{,\theta} \\ w_{,r} \\ w_{,z} \\ w_{,\theta} \\ u \\ w \end{Bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
J_{11}^* & J_{12}^* & 0 & & & & & & & & \\
J_{21}^* & J_{22}^* & 0 & & & & & 0 & & & \\
0 & 0 & 1 & & & & & & & & \\
 & & & J_{11}^* & J_{12}^* & 0 & & & & & \\
 & & & J_{21}^* & J_{22}^* & 0 & & & & & \\
 & & & 0 & 0 & 1 & & & & & \\
 & & & & & & J_{11}^* & J_{12}^* & 0 & & \\
 & & & & & & J_{21}^* & J_{22}^* & 0 & & \\
 & 0 & & & & & 0 & 0 & 1 & & \\
 & & & & & & & & & 1 & \\
 & & & & & & & & & & 1
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \\ u_{,\theta} \\ v_{,\xi} \\ v_{,\eta} \\ v_{,\theta} \\ w_{,\xi} \\ w_{,\eta} \\ w_{,\theta} \\ u \\ w \end{Bmatrix}
\tag{1.13}
$$

其中雅可比逆阵为

$$
[J]^{-1}=\begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* \\ J_{21}^* & J_{22}^* \end{bmatrix} \tag{1.14}
$$

而

$$
[J]=\begin{bmatrix} r_{,\xi} & z_{,\xi} \\ r_{,\eta} & z_{,\eta} \end{bmatrix} \tag{1.15}
$$

根据（1.2），（1.9），（1.13）容易得到应变-位移关系

$$
\{\varepsilon\}=[B]\{u\} \tag{1.16}
$$

其中

$$
\{\varepsilon\}=\{\varepsilon_r\ \varepsilon_z\ \varepsilon_\theta\ \gamma_{rz}\ \gamma_{z\theta}\ \gamma_{\theta r}\}^T
$$

$$
\{u\}=\{u_1\ u_2\cdots u_8\ v_1\ v_2\cdots v_8\ w_1\ w_2\cdots w_8\}^T
$$

$[B]$阵是应变-位移映射阵，包括有 $\cos n\theta$ 和 $\sin n\theta$ 项.

单元刚度阵为

$$
[K]=\int_V [B]^T[E][B]dV \tag{1.17}
$$

其中$[E]$是弹性系数阵. 将（1.17）式在柱坐标下表示，并作等参变换，得

$$
[K]=\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}[B]^T[E][B]r\det[J]d\theta d\xi d\eta
$$

被积函数中只包含有 $\sin^2 n\theta$、$\cos^2 n\theta$ 和 $\sin n\theta\cos n\theta$ 项，对 θ 的积分容易求得. 刚度阵$[K]$只须作下列积分

$$
\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}[B]^T[E][B]\det[J]rd\xi d\eta \tag{1.18}
$$

积分式（1.18）由数值积分做出，通常采用高斯积分.

3. 算　例

图 3 所示一个盛钢桶耳轴的剖面图. 受有挂钩荷载. 其分布规律为

$$
q_r=q_0\cos\frac{\pi}{2\alpha}\theta \tag{1.19}
$$

其中 2α 为环向包角. L 为 z 向荷载分布长度，Q 为荷载合力. 则由条件

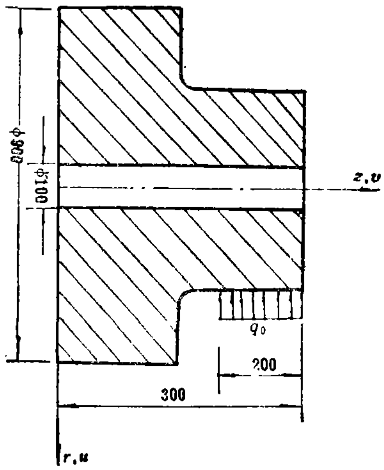


图 3 耳轴尺寸及荷载

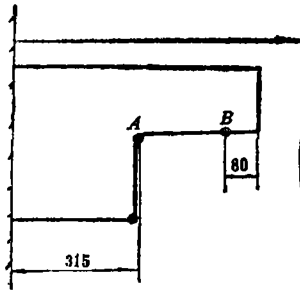


图4 荷载对称面A，B 点.

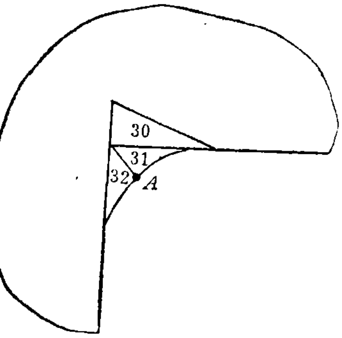


图5 A点附近网格划分

$$Q=\int_0^L\int_{-\alpha}^{\alpha} q_0\cos\left(\frac{\pi}{2\alpha}\theta\right)Rd\theta dz \tag{1.20}$$

定出 q_0. 这里 $2\alpha=10°$，$L=200^{mm}$，$R=235^{mm}$，$Q=175^{T}$.

表 1 给出了图 4 和图 5 所示 A、B 点处分别用块体和旋转体单元计算结果的比较.

表1 旋转体与块体单元比较 单位 (kg cm)

单元 \ 应力 位移		最大主应力	$\tau_{r\theta}$	$\tau_{z\theta}$	挠 度
旋转体	A	1202.16	0	0	−0.003764
	B	—	—	—	−0.020847
块 体	A	880.00[1]	—	—	—
	B	—	—	—	−0.01515

[1] 线性外插到边界，其应力值也为1200.

二、带离散支承的旋转体处理

本文提出了求解带有离散支承的旋转体问题仍旧采用旋转体有限元的一种办法. 把带固定支承的旋转体看成是“超静定体系”，而把解除支承的旋转体看成“静定体系”. 按照结构力学中的办法，超静定体系的解就是外荷载和超静定支承反力联合作用到静定体系的解. 用力法正则方程去求解支承反力.

1. 正则方程柔度阵和右端项的计算

设有 m 个支承位移，那么，力法正则方程为

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1m} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{m1} & f_{m2} & \cdots & f_{mm} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

或简记为

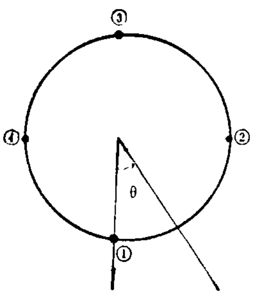
$$[F]\{P\}=\{U\} \tag{2.2}$$

其中$[F]$为柔度阵．元素f_{ij}的意义是第i个支承反力方向作用单位力在第j个支承方向上产生的位移．$\{U\}$是右端项，其意义是外荷载作用下，各支承处解除约束后所产生的位移．$\{P\}$是待求向量，其意义是外荷载作用下产生的支承反力．具体计算步骤如下：首先，在外荷载作用下，对无支承的旋转体进行求解，得总位移向量，在总位移向量中选出m个支承位移，构成右端项$\{U\}$．而柔度阵的形成是依次在支承处加上单位集中力，对无支承的旋转体进行求解，每次在总位移向量中选出m个支承位移，作为柔度阵的一行（或一列），总共进行m次有限元求解，就得到$m\times m$个元素，构成柔度阵．按着方程（2.1）求得$\{P\}$．把支承反力$\{P\}$与外荷载叠加起来，对旋转体进行有限元求解，就得到带离散支承旋转体的解．

2. 形成柔度阵的节约算法

形成柔度阵的计算量很大．我们利用对称性，构造形成柔度阵的循环表，从而避免了多次回代求解．

对于支承的描述，沿着轴向具有相同的z和r坐标的支承，说它在同一“环”上．所有支承可能取的不同z和r值的个数，就是支承的“环数”．在同一环上不同位置的支承，用“刻度”来描述，并规定，刻度数等分每一环，所有支承必须落在刻度上．支承位置是由环号和刻度号决定的．图6所示是一个带有四个刻度的环，该环逆钟针（或顺钟针）转一刻度，结构恢复原状．这是一种C_{nV}群对称性，利用这种对称性，在形成f_{ij}时，可构造一个循环表．在①处作用单位力，求得①、②、③、④处的位移，即f_{11}，f_{12}，f_{13}，f_{14}．当单位力作用到②时，系数f_{22}，f_{23}，f_{24}，f_{21}就分别等于单位力作用于①点的f_{11}，f_{12}，f_{13}，f_{14}．这也同样适用于③、④点处．从几何上看，单位力作用于②处得到的位移与把单位力作用于①处得到的位移连同结构一起从①转到②相同．下表就是图6所示结构柔度阵系数对应情况．



单位力 / 位移	①	②	③	④
①	f_{11}	f_{21}	f_{31}	f_{41}
②	f_{12}	f_{22}	f_{32}	f_{42}
③	f_{13}	f_{23}	f_{33}	f_{43}
④	f_{14}	f_{24}	f_{34}	f_{44}

图6 带有四个刻度的环．

设刻度数为NM，在①处作用单位力我们求得系数f_{11}，f_{12}，$\cdots f_{1NM}$，这就是柔度阵的循环表．当第j个刻度作用单位力时，在循环表中哪个元素等于f_{ij}？设该元素号为k，则

$$k=\begin{cases} j-i+1 & 若\ \ j\geqslant i \\ j-i+1+NM & 若\ \ j<i \end{cases} \tag{2.3}$$

3．总位移计算公式

设

sup ——支承总数

N_{ij} ——富氏级数展开项数

α_j ——第 j 个支承处幅角

U_{Lj} ——单位力第L级数展开项作用在第j个支承所在环$\theta=0°$处引起的位移

p_j ——第j个支承点的支承反力

则所有支承反力引起任一点 θ 处的位移

$$u_\theta=\sum_{L=0}^{N_{ij}}\sum_{j=1}^{\sup}U_{Lj}\cos L(\theta-\alpha_j)p_j \tag{2.4}$$

在位移算出之后，按着常规过程就可以计算出应力，这里不赘述．

参 考 文 献

1．何穷，朱学仁，带有离散支承的旋转体计算，1978 年教育部高等学校计算结构力学学术交流会论文集，第二集．

2．D.库克著（美）《有限元分析的概念和应用》，何穷，程耿东译，科学出版社出版，1981年9月．

3．钟万勰，一个多用途结构分析程序JIGFEX，大连工学院学报，3，4 (1977)．

4．钱令希著《超静定结构力学》，上海科学技术出版社．

5．Jennings, Alan, *Matrix Computation for Engineers and Sientists* (1977).

On the Application of Mixed Method to Solve Solids of Revolution with Discrete Fixed Supports

He Qiong

(Shanghai University of Technology, Shanghai)

Abstract

In this paper, the force method of statically indeterminate structure mechanics is used to treat the solids of revolution with discrete fixed supports The reactionary forces of discrete fixed supports are considered as statically indeterminate unknown variables. The force-method canonical equations, in which the coefficient matrix and the right-hand vector are computed by semi-analytical finite element method, are solved. Then the finite element solution of solid of revolution with discrete fixed supports is calculated with the external loads superposed from the assigned external loads and the reactionary forces of discrete supports.