关于控制系统的绝对稳定性准则*

廖 晓 昕

(武汉华中师范学院，1980年8月21日收到)

摘 要

本文：1.给出非线性控制系统第二标准型[2]平凡解绝对稳定性准则，特别地给出了飞机纵向运动方程平凡解绝对稳定性准则，文[8][9]中关于飞机纵向运动方程的结果是本文推论2.2的特例；2.给出非线性控制系统第一标准型[2]平凡解在通常情况和一种临界情况下绝对稳定准则；3.给出了Lure型直接控制系统一般型平凡解绝对稳定若干准则，全文结果均根据系统本身的参数，具体构造ляпунов函数，给出显式判据.

一、引 言

控制系统的绝对稳定性问题最初起源于飞机自动驾驶仪研究，后推广到一般．文献[1]、[2]、[3]中有关结果的错误，先后由文献[4]、[5]、[6]指出，文[6]、[7]进一步分别给出了用$V(x)=x^T Bx+\int_0^\sigma f(\sigma)d\sigma$或$V(x)=x^T Bx+\beta\int_0^\sigma f(\sigma)\,d\sigma$确定直接控制系统$\dot{x}=Ax+hf(\sigma)$绝对稳定的充要条件，但这些条件，一般验证不易.

本文首先给出包含飞机纵向运动方程为特例的第二标准型绝对稳定性准则．Пионтковский，A．A.的[8]和Michel．A．N的[9]中关于飞机纵向运动方程零解绝对稳定的相应结果，可作为推论的特例；其次给出第一标准型在通常情况和临界情况下的绝对稳定性准则；最后给出直接控制系统的一般型的绝对稳定性若干准则.

本文所有结果，不是建立在未知的V函数或未知的矩阵的存在性基础上，而完全根据系统本身的参数，给出显式代数判据，故设计和验证将是很方便的.

我们需用文[10]中定理1.1为引理.

考虑一般非线性自治系统：

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(x_1,x_2,\ \cdots x_n) \tag{1.1}$$

设f_i连续，保证解的唯一性，$f_i(0)=0\quad(i=1,2,\cdots n)$

引理 若存在定义于$(-\infty,\ +\infty)$的连续或仅有有限个第一、三类间断点的函数$\varphi_i(x_i)$ $(i=1,2,\cdots n)$使：

1° $\varphi_i(x_i)\cdot x_i>0\qquad$(当$x_i\neq0$)$\qquad(i=1,2,\cdots n)$

---

* 钱伟长推荐.

2° $\int_0^{\pm\infty}\varphi_i(x_i)\cdot x_i dx_i=+\infty \qquad (i=1,2,\cdots n)$

3° $G(x)\overset{\text{def}}{=}\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x_i)\cdot f_i(x_1,x_2,\cdots x_n)$ 负定.

则(1.1)平凡解全局稳定.（证明请参见[10]）

二、第 二 标 准 型

考虑控制系统第二标准型[2]：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dx_i}{dt}=-\rho_i x_i+\sigma \quad (i=1,2,\cdots n)\\&\frac{d\sigma}{dt}=\sum_{j=1}^{n}\beta_j x_j-p\sigma-rf(\sigma)\end{aligned}\right\}\tag{2.1}$$

这里，$p>0$，$r>0$，$\rho_i>0$ $(i=1,2,\cdots n)$ $f(\sigma)$连续，满足$f(0)=0$.
$\sigma f(\sigma)>0$，当$\sigma\neq 0$. 显然，下面的飞机纵向运动方程[8],[9]

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dx_i}{dt}=-\rho_i x_i+\sigma \quad (i=1,2,3,4)\\&\frac{d\sigma}{dt}=\sum_{j=1}^{4}\beta_j x_j-rp_2\sigma-f(\sigma)\end{aligned}\right\}\tag{2.2}$$

是(2.1)式的特例.

这里，$rp_2>0$，$\rho_i>0$ $(i=1,2,3,4)$ $f(\sigma)$连续，$f(0)=0$，$\sigma f(\sigma)>0$，当$\sigma\neq 0$.

定理2.1 若 $p-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1+\operatorname{sgn}\beta_i}{2}\right)\frac{\beta_i}{\rho_i}>0$，则(2.1)式平凡解绝对稳定.

证：令 $\varphi_i(x_i)=2c_i x_i$ $(i=1,2,\cdots n)$ $\varphi_{n+1}(\sigma)=2\sigma$（其中$c_i$为待定正数）则$\varphi_i(x_i)$满足引理条件1°，2°，又：

$$G(x)\overset{\text{def}}{=}\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x_i)\frac{dx_i}{dt}+\varphi_{n+1}(\sigma)\frac{d\sigma}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x_i)(-\rho_i x_i+\sigma)+\varphi_{n+1}(\sigma)$$

$$\cdot\left[\sum_{j=1}^{n}\beta_j x_j-p\sigma-rf(\sigma)\right]$$

$$=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\\\sigma\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}-2c_1\rho_1 & 0 & 0\cdots 0 & (c_1+\beta_1)\\0 & -2c_2\rho_2 & \vdots & (c_2+\beta_2)\\\vdots & 0 & \vdots & \vdots\\ & \vdots & & \\0 & 0 & -2c_n\rho_n & (c_n+\beta_n)\\(c_1+\beta_1) & (c_2+\beta_2) & (c_n+\beta_n) & -2p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\\\sigma\end{pmatrix}-2r\sigma f(\sigma)$$

$$\leqslant\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\\ \sigma\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix} -2c_1\rho_1 & 0 & 0\cdots & 0 & (c_1+\beta_1)\\ 0 & -2c_2\rho_2 & & & (c_2+\beta_2)\\ \vdots & 0 & & \vdots & \vdots\\ & \vdots & & & \\ 0 & 0 & & -2c_n\rho_n & (c_n+\beta_n)\\ (c_1+\beta_1) & (c_2+\beta_2) & & (c_n+\beta_n) & -2p\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\\ \sigma\end{pmatrix} \tag{2.3}$$

由(2.3)式右端二次型系数矩阵的性质及 Sylvester 负定条件知，如果

$$(-1)^{n+1}D_{n+1}\overset{\text{def}}{=}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n-1}}\begin{vmatrix} -2c_1\rho_1 & 0 & 0\cdots & & (c_1+\beta_1)\\ 0 & -2c_2\rho_2 & & & (c_2+\beta_2)\\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots\\ & \vdots & & & \\ 0 & 0 & & -2c_n\rho_n & (c_n+\beta_n)\\ (c_1+\beta_1) & (c_2+\beta_2) & \cdots & (c_n+\beta_n) & -2p\end{vmatrix}>0 \tag{2.4}$$

就可使$G(x)$负定．下面用数学归纳法证：

$$D_{n+1}=(-1)^{n+1}4\prod_{i=1}^{n}c_i\rho_i p+(-1)^n\sum_{j=1}^{n}\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}c_i\rho_i(c_j+\beta_j)^2 \tag{2.5}$$

当 $n+1=2$有：

$$D_2=\begin{vmatrix} -2c_1\rho_1 & (c_1+\beta_1)\\ (c_1+\beta_1) & -2p\end{vmatrix}=4c_1\rho_1 p(-1)^2+(-1)(c_1+\beta_1)^2$$ (2.5)式成立．

设$n+1=k$时有：

$$D_k=\frac{1}{2^{k-2}}\begin{vmatrix} -2c_2\rho_2 & 0 & 0\cdots & 0 & (c_2+\beta_2)\\ 0 & -2c_3\rho_3 & 0 & \vdots & (c_3+\beta_3)\\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots\\ & \vdots & & & \\ 0 & 0 & & -2c_k\rho_k & (c_k+\beta_k)\\ (c_2+\beta_2) & (c_3+\beta_3) & & (c_k+\beta_k) & -2p\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^k4\prod_{i=2}^{k}c_i\rho_i p+(-1)^{k-1}\sum_{j=2}^{k}\prod_{\substack{i=2\\ i\neq j}}^{k}c_i\rho_i(c_j+\beta_j)^2$$

当$n+1=k+1$有：

$$D_{k+1}=\frac{1}{2^{k-1}}\begin{vmatrix} -2c_1\rho_1 & 0 & 0\cdots & 0 & (c_1+\beta_1)\\ 0 & -2c_2\rho_2 & 0 & \vdots & (c_2+\beta_2)\\ \vdots & 0 & & \vdots & \vdots\\ & \vdots & & & \\ 0 & 0 & & -2c_n\rho_n & (c_n+\beta_n)\\ (c_1+\beta_1) & (c_2+\beta_2) & & (c_n+\beta_n) & -2p\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2^{k-1}}\left[-2c_1\rho_1 2^{k-2}D_k+(-1)^{k+2}(c_1+\beta_1)^2(-1)^{k+1}\prod_{i=2}^{k}(-2c_i\rho_i)\right]$$

$$= (-1)^{k+1}4\prod_{i=1}^{k}c_i\rho_i p+(-1)^k\sum_{j=2}^{k}\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{k}c_i\rho_i(c_i+\beta_i)^2+(-1)^{k+2}(-1)^{k+1}(-1)^{k-1}$$

$$\cdot\prod_{i=2}^{k}c_i\rho_i(c_1+\beta_1)^2=(-1)^{k+1}4\prod_{i=1}^{k}c_i\rho_i p+(-1)^k\sum_{j=1}^{k}\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{k}c_i\rho_i(c_i+\beta_i)^2$$

故对一切自然数n(2.5)式成立．而(2.4)式成立，当且仅当：

$$F(c_1, c_2, \cdots c_n)\overset{\text{def}}{=\!=}4p-\sum_{i=1}^{n}\frac{(c_i+\beta_i)^2}{c_i\ \rho_i}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{4p}{n}-\frac{(c_i+\beta_i)^2}{c_i\ \rho_i}\right)\overset{\text{def}}{=\!=}\sum_{i=1}^{n}F_i(c_i)>0 \tag{2.6}$$

今确定正数c_i，使$F_i(c_i)$极大，尽可能扩大稳定性参数区域，为此，取

$$c_i=\begin{cases}-\beta_i & \text{当}\beta_i<0\\ \varepsilon_i\quad(0<\varepsilon_i\ll 1) & \text{当}\beta_i=0\\ \beta_i & \text{当}\beta_i>0\end{cases}$$

易证，当 $\beta_i>0$，$F_i(\beta_i)=\left(\frac{4p}{n}-\frac{4\beta_i}{\rho_i}\right)$是$F_i(c_i)$的极大值，由于$\varepsilon_i$的任意性，故只须

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{4p}{n}-\frac{1+\operatorname{sgn}\beta_i}{2}\ \frac{4\beta_i}{\rho_i}\right)>0\quad\text{亦即}\quad p-\sum_{i=1}^{n}\frac{1+\operatorname{sgn}\beta_i}{2}\ \frac{\beta_i}{\rho_i}>0 \tag{2.7}$$

就能使$G(x)$负定．从而引理条件3°满足，定理2.1成立． □

推论2.1 若$\beta_i\leqslant 0$，则(2.1)式平凡解绝对稳定．

证：
$$p-\sum_{i=1}^{n}\frac{1+\operatorname{sgn}\beta_i}{2}\ \frac{\beta_i}{\rho_i}=p>0$$
□

推论(2.2) 若$rp_2-\sum_{i=1}^{4}\frac{1+\operatorname{sgn}\beta_i}{2}\ \frac{\beta_i}{\rho_i}>0$ (2.8)

则飞机纵向运动方程(2.2)式平凡解绝对稳定． □

文献[8]、[9]分别给出了(2.2)式平凡解绝对稳定的准则为：

$$\min_{1\leqslant i\leqslant 4}\rho_i^2r^2p_2^2-16\left(\sum_{i=1}^{4}\beta_i^2\right)>0 \tag{2.9}$$

$$\min_{1\leqslant i\leqslant 4}\rho_i^2r^2p_2^2-4\sum_{i=1}^{4}\beta_i^2>0 \tag{2.10}$$

前者是后者特例．下面证(2.10)是(2.8)的特例．

由(2.10)有 $r^2p_2^2>4\sum_{i=1}^{4}\frac{\beta_i^2}{\min\limits_{1\leqslant i\leqslant 4}\rho_i^2}\geqslant 4\sum_{i=1}^{4}\frac{\beta_i^2}{\rho_i^2}\geqslant\left(\sum_{i=1}^{4}\left|\frac{\beta_i}{\rho_i}\right|\right)^2$

从而有 $$r p_2 > \left(\sum_{i=1}^{4} \left| \frac{\beta_i}{\rho_i} \right| \right) \geqslant \left(\sum_{i=1}^{4} \frac{1+\operatorname{sgn}\beta_i}{2} \frac{\beta_i}{\rho_i} \right)$$

即(2.8)式成立. □

三、第 一 标 准 型

考虑控制系统第一标准型[2]

$$\frac{dx_i}{dt} = -\rho_i x_i + f(\sigma) \qquad \rho_i > 0 \qquad \sigma = \sum_{j=1}^{n} r_j x_j \ (i=1, 2, \cdots n) \tag{3.1}$$

$f(0)=0 \quad 0<\sigma f(\sigma) \leqslant K\sigma^2$ 当$\sigma \neq 0$ $\quad 0<K<\infty$ $\quad f(\sigma)$连续，保证(3.1)解唯一.

文[6]在$\sum_{i=1}^{n} r_i < 0$限制下得到(3.1)式平凡解在$[0, \infty]$内绝对稳定性一系列实用准则. 本文取消$\sum_{i=1}^{n} r_i < 0$的限制，在$[0, K]$内得到通常情况及临界情况下绝对稳定性准则，与[6]结果互不包含.

我们总可适当调整(3.1)式方程和未知函数x_i的编号顺序使之有：

$$r_i \begin{cases} <0 & i=1, 2, \cdots i_1 \\ =0 \quad 当 & i=i_1+1, \cdots i_2 \qquad 1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant n \\ >0 & i=i_2+1, \cdots n \end{cases}$$

定理3.1 若 $\rho_i > 2K(n-i_2) r_i \quad (i=i_2+1, \cdots n)$ 则(3.1)式平凡解在Hurwitz角域$[0, K]$内绝对稳定.

证：令$$\varphi_i(x_i) = \begin{cases} -2r_i x_i & i=1, 2, \cdots i_1 \\ 2\varepsilon_i x_i & i=i_1+1, \cdots i_2 \\ 2r_i x_i & i=i_2+1, \cdots n \end{cases} \quad 其中 0<\varepsilon_i<\frac{2\rho_i}{K(i_2-i_1)}$$

显然$\varphi_i(x_i)$满足引理条件1°，2°，又

$$G(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x_i)[-\rho_i x_i + f(\sigma)]$$

$$= 2\Big(\sum_{i=1}^{i_1} r_i \rho_i x_i^2 - \sum_{i=1}^{i_1} r_i x_i f(\sigma) - \sum_{i=i_1+1}^{i_2} \varepsilon_i \rho_i x_i^2 + \sum_{i=i_1+1}^{i_2} \varepsilon_i x_i f(\sigma)$$

$$- \sum_{i=i_2+1}^{n} r_i \rho_i x_i^2 + \sum_{i=i_2+1}^{n} r_i x_i f(\sigma) \Big)$$

$$= 2\Big(\sum_{i=1}^{i_1} r_i \rho_i x_i^2 - \sum_{i=i_1+1}^{i_2} \varepsilon_i \rho_i x_i^2 - \sum_{i=i_2+1}^{n} r_i \rho_i x_i^2 \Big) - 2\sigma f(\sigma) + 2 \sum_{i=i_1+1}^{i_2} \varepsilon_i x_i f(\sigma)$$

$$+4\sum_{i=i_2+1}^{n} r_i x_i f(\sigma)$$

$$\leqslant 2\Big(\sum_{i=1}^{i_1} r_i\rho_i x_i^2-\sum_{i=i_1+1}^{i_2}\varepsilon_i\rho_i x_i^2-\sum_{i=i_2+1}^{n} r_i\rho_i x_i^2\Big)-2\sigma f(\sigma)$$

$$+2\Big|\sqrt{K}\sum_{i=i_1+1}^{i_2}\varepsilon_i x_i\Big|\Big|\frac{f(\sigma)}{\sqrt{K}}\Big|+2\Big|2\sqrt{K}\sum_{i=i_2+1}^{n} r_i x_i\Big|\Big|\frac{f(\sigma)}{\sqrt{K}}\Big|$$

$$\leqslant 2\Big(\sum_{i=1}^{i_1} r_i\rho_i x_i^2-\sum_{i=i_1+1}^{i_2}\varepsilon_i\rho_i x_i^2-\sum_{i=i_2+1}^{n} r_i\rho_i x_i^2\Big)-2\sigma f(\sigma)$$

$$+K\Big(\sum_{i=i_1+1}^{i_2}\varepsilon_i x_i\Big)^2+\frac{f^2(\sigma)}{K}+4K\Big(\sum_{i=i_2+1}^{n} r_i x_i\Big)^2+\frac{f^2(\sigma)}{K}$$

$$\leqslant 2\Big(\sum_{i=1}^{i_1} r_i\rho_i x_i^2-\sum_{i=i_1+1}^{i_2}\varepsilon_i\rho_i x_i^2-\sum_{i=i_2+1}^{n} r_i\rho_i x_i^2\Big)-2\sigma f(\sigma)$$

$$+K(i_2-i_1)\Big[\sum_{i=i_1+1}^{i_2}(\varepsilon_i x_i)^2\Big]+\sigma f(\sigma)+4K(n-i_2)\sum_{i=i_2+1}^{n}(r_i x_i)^2+\sigma f(\sigma)$$

$$=2\sum_{i=1}^{i_1} r_i\rho_i x_i^2-\sum_{i=i_1+1}^{i_2}[2\varepsilon_i\rho_i-K(i_2-i_1)\varepsilon_i^2]x_i^2-\sum_{i=i_2+1}^{n}[2r_i\rho_i$$

$$-4K(n-i_2)r_i^2]x_i^2<0 \quad 当\ x\neq 0$$

由引理知(3.1)式平凡解在 Hurwitz 角域[0, K]内绝对稳定. □

推论 3.1.1　若 $r_i\leqslant 0$ $(i=1,2,\cdots n)$ 则 (3.1) 式平凡解在 Hurwitz 角域 $[0,K]$ 内绝对稳定.

证：不失一般，设 $r_i \begin{matrix} <0 & i=1,2,\cdots i_0 \\ =0 & i=i_0+1,\cdots n\end{matrix}$

令 $\varphi_i(x_i)=\begin{cases} -2Kr_i x_i & 当\ i=1,2,\cdots i_0 \\ 2\varepsilon_i x_i & \ i=i_0+1,\cdots n\end{cases}$ 　其中 $0<\varepsilon_i<\dfrac{2\rho_i}{n-i_0}$

与定理 3.1 证明过程类似可得:

$$G(x)\overset{\text{def}}{=}\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x_i)[-\rho_i x_i+f(\sigma)]\leqslant\sum_{i=1}^{i_0}Kr_i\rho_i x_i^2-\sum_{i=i_0+1}^{n}[2\rho_i\varepsilon_i$$

$$-(n-i_0)\varepsilon_i^2]x_i^2<0 \quad 当\ x\neq 0.$$ □

推论 3.1.2　若 $r_i<0$ $(i=1,2,\cdots n)$ 则(3.1)式平凡解在 Hurwitz 角域[0, $+\infty$] 内绝对稳定. [此即文[6]准则 A, 这里证法更简]

证：令$\varphi_i(x_i)=-r_i x_i$. $(i=1,2,\cdots n)$ 则$\varphi_i(x_i)$ 满足引理条件 1°、2°，且

$$G(x)\overset{\text{def}}{=}\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x_i)\frac{dx_i}{dt}=\sum_{i=1}^{n}(r_i\rho_i x_i^2)-\sum_{i=1}^{n} r_i x_i f(\sigma)$$

$$=\sum_{i=1}^{n} r_i\rho_i x_i^2-\sigma f(\sigma)\leqslant\sum_{i=1}^{n} r_i\rho_i x_i^2<0 \quad \text{当 } x\neq 0$$

所以，(3.1) 之平凡解在 Huriwtz 角域 $[0,+\infty]$ 内绝对稳定. □

下面讨论一类临界情况.

定理 3.2 若 $\rho_i>0$ $(i=1,2,\cdots n-1)$，$\rho_n=0$，$r_n<0$，$r_i<\dfrac{\rho_i}{2K(n-1)}$ $(i=1,2,\cdots n-1)$ 则 (3.1) 式平凡解在 Hurwitz 角域 $[0,K]$ 内绝对稳定.

证：关于未知数 y_i 的二次代数不等式：

$$K(n-1)y_i^2+2[K(n-1)r_i-\rho_i]y_i+K(n-1)r_i^2<0 \quad (i=1,2,\cdots n-1)$$

有正数解，当且仅当 $r_i<\dfrac{\rho_i}{2K(n-1)}$ $(i=1,2,\cdots n-1)$ (3.2)

设 $y_i=c_i$ $(i=1,2,\cdots n-1)$ 是 (3.2) 的任一组正数解.

令 $\varphi_i(x_i)=\begin{cases}2c_ix_i & i=1,2,\cdots n-1\\ -2r_nx_n & i=n\end{cases}$ $\varphi_i(x_i)$满足引理条件 1°，2°，又

$$G(x)\overset{\text{def}}{=}\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x_i)\frac{dx_i}{dt}=-2\sum_{i=1}^{n-1}c_i\rho_ix_i^2+2\sum_{i=1}^{n-1}c_ir_if(\sigma)-2r_nx_nf(\sigma)$$

$$=-2\sum_{i=1}^{n-1}c_i\rho_ix_i^2+2\sum_{i=1}^{n-1}(c_i+r_i)x_if(\sigma)-\sum_{i=1}^{n}2r_ix_if(\sigma)$$

$$\leqslant-2\sum_{i=1}^{n-1}c_i\rho_ix_i^2+2\left|\sqrt{K}\sum_{i=1}^{n-1}(c_i+r_i)x_i\right|\left|\frac{f(\sigma)}{\sqrt{K}}\right|-2\sigma f(\sigma)$$

$$\leqslant-2\sum_{i=1}^{n-1}c_i\rho_ix_i^2+K(n-1)\sum_{i=1}^{n-1}(c_i+r_i)^2x_i^2+\sigma f(\sigma)-2\sigma f(\sigma)$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n-1}[K(n-1)(c_i+r_i)^2-2c_i\rho_i]x_i^2-\sigma f(\sigma)$$

$$=\sum_{i=1}^{n-1}\{K(n-1)c_i^2-2[K(n-1)r_i-\rho_i]c_i+K(n-1)r_i^2\}x_i^2-\sigma f(\sigma)\overset{\text{def}}{=}W(x)$$

今$G(0)=W(0)=0$，$\because G(x)\leqslant W(x)\leqslant 0$，若有 $\tilde{x}$，使 $W(\tilde{x})=0$. 因为 $\sigma f(\sigma)>0$，当 $\sigma\neq 0$，故有 $\sum_{i=1}^{n-1}\tilde{x}_i^2=0$. 从而 $r_n\tilde{x}_nf(r_n\tilde{x})=0$，故 $r_n\tilde{x}_n=0$. $\because$ $r_n<0$，故有 $\tilde{x}_n=0$ 从而$\tilde{x}=0$，故 $W(x)$负定，推知 $G(x)$负定，由引理知(3.1) 式平凡解在 Hurwitz 角域$[0,K]$内绝对稳定. □

推论 3.2.1 若 $\rho_i>0$ $(i=1,2,\cdots n-1)$ $\rho_n=0$，$r_n<0$，$r_i\leqslant 0$ $(i=1,2,\cdots n-1)$则(3.1) 式平凡解在 $[0,K]$ 内绝对稳定.

推论 3.2.2 若 $\rho_i>0$ $(i=1,\ 2,\ \cdots n-1)$ $\rho_n=0$, $r_i<0$ $(i=1,\ 2,\ \cdots n)$则(3.1)式平凡解在 Hurwitz 角域 $[0,+\infty]$ 内绝对稳定.

证：令 $\varphi_i(x_i)=-r_i x_i$ $(i=1,\ 2,\ \cdots n)$则

$$G(x)\overset{\text{def}}{=}\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x_i)\frac{dx_i}{dt}=\sum_{i=1}^{n-1}r_i\rho_i x_i^2-\sum_{i=1}^{n}r_i x_i f(\sigma)=\sum_{i=1}^{n-1}r_i\rho_i x_i^2-\sigma f(\sigma)$$

与定理 3.2 证法类似，可知 $G(x)$负定，(3.1)式平凡解在 Hurwitz 角域$[0,+\infty]$内绝对稳定. □

四、Luré 直接控制系统的一般型

考虑直接控制系统一般型[2]

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+h_i f(\sigma)\quad(i=1,\ 2,\cdots n)\qquad \sigma=\sum_{j=1}^{n}r_j x_j \tag{4.1}$$

$$f(0)=0\quad 0<\frac{f(\sigma)}{\sigma}\leqslant K\ \text{当}\ \sigma\neq 0,\ f(\sigma)\text{是连续的}.$$

不失一般，设

$$\begin{gathered}h_i r_i<0\ (i=1,\ 2,\ \cdots i_1);\ h_i r_i>0\ (i=i_1+1,\ \cdots i_2);\ h_i=r_i=0\ (i=i_2+1,\cdots i_3)\\ h_i=0,\ r_i\neq 0\ (i=i_3+1,\cdots i_4),\ h_i\neq 0,\ r_i=0\ (i=i_4+1,\cdots n)\ 1\leqslant i_1\leqslant i_2\leqslant i_3\leqslant i_4\leqslant n\end{gathered} \tag{4.2}$$

定理 4.1 若矩阵$[B(b_{ij})_{n\times n}+C(c_{ij})_{n\times n}]$负定，则(4.1)式的平凡解在Hurwitz 角域$[0,K]$内绝对稳定.

这里，

$$b_{ij}=b_{ji}=\begin{cases}-\dfrac{r_i}{h_i}a_{ii} & i=j=1,2,\ \cdots i_1\\[2ex] \dfrac{r_i}{h_i}a_{ii} & i=j=i_1+1,\ \cdots i_2\\ a_{ii} & i=j=i_2+1,\ \cdots n\\ \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{b_{ii}a_{ij}}{a_{ii}}+\dfrac{b_{jj}a_{ji}}{a_{jj}}\right] & i\neq j;\ i,\ j=1,2\cdots n\end{cases}$$

$$c_{ij}=\begin{cases}0 & i=j=1,\ 2,\cdots\ i_1,\ i_2+1,\cdots i_3\\ 0 & i\neq j\\ 3(i_2-i_1)Kr_i^2 & i=j=i_1+1,\cdots i_2\\ \dfrac{3}{4}(i_4-i_3)Kr_i^2 & i=j=i_3+1,\cdots i_4\\[2ex] \dfrac{3}{4}(n-i_4)Kh_i^2 & i=j=i_4+1,\cdots n\end{cases}$$

证：设 $\varphi_i(x_i)=\begin{cases}-\dfrac{r_i}{h_i}x_i & (i=1,\ 2,\cdots i_1)\\[2ex] \dfrac{r_i}{h_i}x_i & (i=i_1+1,\cdots i_2)\\ x_i & (i=i_2+1,\cdots n)\end{cases}$ 则 $\varphi_i(x_i)$ $(i=1,\ 2,\cdots n)$ 满足引理

条件 1°，2°，且：

$$G(x)\overset{\text{def}}{=}\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x_i)\Big[\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+h_if(\sigma)\Big]$$

$$=\sum_{j=1}^{n}b_{jj}x_j^2+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}x_ix_j-\sum_{i=1}^{i_1}r_ix_if(\sigma)+\sum_{i=i_1+1}^{i_2}r_ix_if(\sigma)+\sum_{i=i_4+1}^{n}x_ih_if(\sigma)$$

$$=\sum_{j=1}^{n}b_{jj}x_j^2+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}x_ix_j-\sum_{i=1}^{i_1}r_ix_if(\sigma)-\sum_{i=i_1+1}^{i_2}r_ix_if(\sigma)-\sum_{i=i_3+1}^{i_4}r_ix_if(\sigma)$$

$$+2\sum_{i=i_1+1}^{i_2}r_ix_if(\sigma)+\sum_{i=i_4+1}^{n}x_ih_if(\sigma)+\sum_{i=i_3+1}^{i_4}r_ix_if(\sigma)$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{n}b_{jj}x_j^2+\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}b_{ij}x_ix_j-\sigma f(\sigma)+2\sum_{i=i_1+1}^{i_2}\left(\sqrt{3K}\,r_i\,x_i\frac{f(\sigma)}{\sqrt{3K}}\right)$$

$$+2\sum_{i=i_4+1}^{n}\left(\frac{\sqrt{3K}}{2}x_ih_i\frac{f(\sigma)}{\sqrt{3K}}\right)+2\sum_{i=i_3+1}^{i_4}\left(r_i\,x_i\frac{\sqrt{3K}}{2}\;\frac{f(\sigma)}{\sqrt{3K}}\right)$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{n}b_{jj}x_j^2+\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}b_{ij}x_ix_j-\sigma f(\sigma)+\Big(\sum_{i=i_1+1}^{i_2}\frac{\sqrt{3K}}{2}r_ix_i\Big)^2+\frac{f^2(\sigma)}{3K}$$

$$+\Big(\sum_{i=i_4+1}^{n}\frac{\sqrt{3K}}{2}x_ih_i\Big)^2+\frac{f^2(\sigma)}{3K}+\Big(\sum_{i=i_3+1}^{i_4}\frac{\sqrt{3K}}{2}r_ix_i\Big)^2+\frac{f^2(\sigma)}{3K}$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{n}b_{jj}x_j^2+\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}b_{ij}x_ix_j-\sigma f(\sigma)+3(i_2-i_1)K\sum_{i=i_1+1}^{i_2}r_i^2x_i^2$$

$$+\frac{3}{4}(n-i_4)K\sum_{i=i_4+1}^{n}(r_ih_i)^2+\frac{3}{4}(i_4-i_3)K\sum_{i=i_3+1}^{i_4}(r_ix_i)^2+\sigma f(\sigma)$$

$$=\sum_{j=1}^{i_1}b_{jj}x_j^2+\sum_{j=i_1+1}^{i_2}[b_{jj}+3(i_2-i_1)Kr_j^2]x_j^2+\sum_{j=i_1+1}^{i_3}b_{jj}x_j^2$$

$$+\sum_{j=i_3+1}^{i_4}[b_{jj}+\frac{3}{4}(i_4-i_3)Kr_j^2]x_j^2+\sum_{j=i_4+1}^{n}[b_{jj}+\frac{3}{4}(n-i_4)Kh_j^2]x_j^2+\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}b_{ij}x_ix_j$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} x^T[B(b_{ij})_{n\times n}+C(c_{ij})_{n\times n}]x<0 \quad 当x\neq 0 \tag{4.3}$$

由引理知(4.1)式平凡解在Hurwitz角域$[0,K]$内绝对稳定.　□

推论4.1.1 若定理4.1中的矩阵$B(b_{ij})_{n\times n}+C(c_{ij})_{n\times n}$的元素满足：

$$b_{ii}+c_{ii}+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|b_{ij}|<0 \quad (i=1,2,\cdots n) \tag{4.4}$$

则(4.1)式平凡解在Hurwitz角域$[0,K]$内绝对稳定.

证：由定理4.1的证明有：

$$G(x)\leqslant\sum_{i=1}^{n}(b_{ii}+c_{ii})x_i^2+\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}b_{ij}x_ix_j$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}(b_{ii}+c_{ii})x_i^2+2\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\left(\frac{\sqrt{|b_{ij}|}}{\sqrt{2}}\ \frac{\sqrt{|b_{ij}|}}{\sqrt{2}}|x_i||x_j|\right)$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}(b_{ii}+c_{ii})x_i^2+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{|b_{ij}|}{2}x_i^2+\frac{|b_{ji}|}{2}x_i^2\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}[(b_{ii}+c_{ii})x_i^2+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|b_{ij}|]x_i^2<0 \quad 当x\neq 0 \tag{4.5}$$ □

推论4.1.2 若$h_ir_i<0$ $(i=1,2,\cdots n)$和矩阵$B(b_{ij})_{n\times n}$是负定的，则(4.1)式平凡解在Hurwitz角域$[0,K]$内绝对稳定，这里

$$b_{ij}=b_{ji}=\begin{cases}-\dfrac{r_i}{h_i}a_{ii}\quad(i=1,2,\cdots n) & i=j\\[2ex] \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{b_{ii}}{a_{ii}}a_{ij}+\dfrac{b_{jj}}{a_{jj}}a_{ji}\right)=\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{r_i}{h_i}a_{ij}-\dfrac{r_j}{h_j}a_{ji}\right) & i\neq j\end{cases}$$

证：令 $\varphi_i(x_i)=-\dfrac{r_i}{h_i}x_i\quad(i=1,2,\cdots n)$　则

$$G(x)\stackrel{\text{def}}{=}\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x_i)\Big[\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}x_j+h_if(\sigma))\Big]=\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}x_ix_j-\sigma f(\sigma)<0$$

当　$x\neq 0$　□

推论4.1.3 若$h_ir_i<0$　$(i=1,2,\cdots n)$，$h_i=r_i=0$　$(i=i_1+1,\cdots n)$ 且 $a_{ii}<0$ $(i=i_1+1,\cdots n)$ 矩阵$B(b_{ij})_{n\times n}$负定，则(4.1)式平凡解在Hurwitz角域$[0,+\infty]$内绝对稳定. 这里，

$$b_{ij}=b_{ji}=\begin{cases}-\dfrac{r_i}{h_i}a_{ii}\quad(i=1,2,\cdots i_1) & i=j\\ -a_{ii}^2, \quad i=i_1+1,\cdots n & i=j\\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{b_{ii}}{a_{ii}}a_{ij}+\dfrac{b_{jj}}{a_{jj}}a_{ji}\right) & i\neq j\end{cases}$$

证：令 $\varphi_i(x_i)=\begin{cases}-\dfrac{r_i}{h_i}x_i & i=1,2,\cdots i_1\\ -a_{ii}x_i & i=i_1+1,\cdots n\end{cases}$ $\varphi_i(x_i)$满足引理条件1°、2°.

又 $$G(x)\overset{\text{def}}{=}\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x_i)\Big[\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+h_i f(\sigma)\Big]\leqslant\sum_{j=1}^{n}(b_{jj}x_j^2+\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}b_{ij}x_ix_j)<0\quad 当x\neq0$$ □

定理4.2 若 $a_{ii}<0$ $(i=1,2,\cdots n)$ 矩阵 $B(b_{ij})_{n\times n}$ 负定，则 (4.1) 式平凡解在 Hurwitz 角域 $[0,K]$内绝对稳定. 这里，

$$b_{ij}=b_{ji}=\begin{cases}-a_{ii}^2 & 当\ h_ir_i\leqslant0\\ -a_{ii}^2-a_{ii}h_ir_iK & 当h_ir_i>0\end{cases}\Big\}i=j=1,\ 2\cdots n$$
$$\begin{cases}\max\Big[\frac{1}{2}|a_{ii}a_{ij}+a_{jj}a_{ji}|,\ \frac{1}{2}K|h_ir_ja_{ii}+h_jr_ia_{jj}|\Big] & 当(a_{ii}a_{ij}+a_{jj}a_{ji})(h_ir_ja_{ii}+h_jr_ia_{jj})\leqslant0\ (i\neq j;\ i,\ j=1,2,\cdots,\ n)\\ \frac{1}{2}\Big|\Big[a_{ii}a_{ij}+a_{jj}a_{ji}+K(h_ir_ja_{ii}+h_jr_ia_{jj})\Big]\Big| & 当(a_{ii}a_{ij}+a_{jj}a_{ji})(h_ir_ja_{ii}+h_jr_ia_{jj})>0\ (i\neq j;\ i,j=1,\ 2,\ \cdots n)\end{cases}$$

证：令 $\varphi_i(x_i)=-a_{ii}x_i$，$g(0)=\begin{cases}\dfrac{f(\sigma)}{\sigma} & 当\ \sigma\neq0\\ 0 & \sigma=0\end{cases}$ 则 $\varphi_i(x_i)$满足引理条件1°，2°，且:

$$G(x)\overset{\text{def}}{=}\sum_{i=1}^{n}-a_{ii}x_i\Big[\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+h_if(\sigma)\Big]=\sum_{i=1}^{n}-a_{ii}x_i\Big[\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+(h_ig(\sigma))\ \sigma\Big]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}-a_{ii}x_i\Big[\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+h_i(g(0))r_j)x_j\Big]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}[-a_{ii}^2\ -h_ia_{ii}g(\sigma)r_i]x_i^2+\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}\sum_{j=1}^{n}[-a_{ii}a_{ij}-h_ir_ja_{ii}g(\sigma)]x_ix_j$$

$$=\sum_{i=1}^{n}[-a_{ii}^2-h_ia_{ii}g(\sigma)r_i]x_i^2+\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2}[-a_{ii}a_{ij}-a_{jj}a_{ji}$$
$$-(a_{ii}h_ir_j+a_{jj}h_jr_i)g(\sigma)]x_ix_j$$
$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}b_{ii}x_i^2+\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}|x_i||x_j|<0\quad 当\ x\neq0\ . \tag{4.6}$$

由引理知(4.1)式平凡解在 Hurwitz 角域[0, K]内绝对稳定. □

推论 4.2 若 $a_{ii}<0$ $(i=1,\ 2,\ \cdots n)$ $b_{ij}=b_{ji}\leqslant M_i^{(j)}M_j^{(i)}$ 和

$$\sum_{j=1}^{n}(M_i^{(j)})^2\leqslant b_{ii}\quad\Big(特别地\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}b_{ij}<b_{ii}\Big)$$

则(4.1)式平凡解在 Hurwitz 角域[0, K]内绝对稳定.

证：由(4.6)，我们有：

$$G(x)\leqslant\sum_{i=1}^{n}b_{ii}x_i^2+\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}\sum_{j=1}^{n}M_i^{(j)}M_j^{(i)}|x_i||x_j|$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}b_{ii}x_i^2+\frac{1}{2}\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}\sum_{j=1}^{n}(M_i^{(j)})^2x_i^2+\frac{1}{2}\sum_{\substack{j=1\\i\neq j}}^{n}\sum_{i=1}^{n}(M_j^{(i)})^2x_i^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}b_{ii}x_i^2+\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}\sum_{j=1}^{n}(M_i^{(j)})^2x_i^2=\sum_{i=1}^{n}\Big[b_{ii}+\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}(M_i^{(j)})^2\Big]x_i^2<0\ \text{当}\ x\neq0\,.$$

[特别地 令 $M_i^{(j)}=M_j^{(i)}=\sqrt{|b_{ij}|}$，我们有

$$G(x)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\Big[b_{ii}+\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|b_{ij}|\Big]x_i^2\quad\text{当}\ x\neq0$$

□

下面设 $\tilde{a}_{ii}=\begin{cases}a_{ii} & \text{当}\ h_ir_i\leqslant0\\ a_{ii}+Kh_ir_i & \text{当}\ h_ir_i>0\end{cases}\quad i=1,2\cdots n.$

$\tilde{a}_{ij}=\begin{cases}\max\{|a_{ij}|,\ K|h_ir_j|\} & \text{当}\ a_{ij}h_ir_j\leqslant0\\ |a_{ij}+Kh_ir_j| & \text{当}\ a_{ij}h_ir_j>0\end{cases}\quad i\neq j,\ i,\ j=1,\ 2,\cdots n$

定理 3.3 若能调整方程(4.1)未知函数与方程的编号顺序，使之满足：

1° $\tilde{a}_{ii}<0\quad(i=1,2,\cdots n)\qquad 0\leqslant\left|\dfrac{\tilde{a}_{ij}}{\tilde{a}_{jj}}\right|\leqslant\eta_{ij}$

2° $\displaystyle\sum_{j=2}^{n}\eta_{1j}^2\overset{\text{def}}{=}\mu_1^2\qquad 2(\eta_{21})^2\mu_1^2+\sum_{j=3}^{n}(\eta_{2j})^2\overset{\text{def}}{=}\mu_2^2$

$\cdots\cdots;\quad \displaystyle n\sum_{j=1}^{n-1}\eta_{nj}^2\mu_j^2\overset{\text{def}}{=}\mu_n^2\qquad\qquad \sum_{i=1}^{n}\mu_i^2\overset{\text{def}}{=}\mu^2<1$

则(4.1)式平凡解在 Hurwitz 角域[0, K]内绝对稳定.

证：考虑未知数 $b_j(j=1,2,\cdots n)$的非齐次线性代数方程组：

$$b_j=\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}\eta_{ij}b_i+\delta_i\qquad(\delta_j=\text{const.}>0)\quad j=1,2,\cdots n\tag{4.7}$$

类似于文[11]定理 1.2 的证明，我们知条件 2° 保证 Gauss-Seidl 迭代：

$$b_j^{(m)}=\sum_{i=1}^{j-1}\eta_{ij}b_i^{(m)}+\sum_{i=j}^{n}\eta_{ij}b_i^{(m-1)}+\delta_j\qquad(j=1,2,\cdots n),\ \delta_j=\text{const.}>0$$

收敛，这样，(4.7)有唯一解，取$b_i^{(0)}\geqslant 0$，因为$\delta_i>0$ $(i=1,2,\cdots n)$，$\eta_{ij}\geqslant 0$ $(i,j=1,2,\cdots n)$

故 $b_i^{(m)}\geqslant\delta_i>0$

因而 $\bar{b}_i=\lim\limits_{m\to\infty} b_i^{(m)}\geqslant\delta_i>0$

$$-\bar{b}_i+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\eta_{ij}\bar{b}_j<0 \qquad \text{即} \qquad -1+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\eta_{ij}\frac{\bar{b}_i}{\bar{b}_j}<0$$

令 $\varphi_i(x_i)=\bar{b}_i\operatorname{sgn}x_i$，显然 $\varphi_i(x_i)$ 满足引理条件1°、2°，

现证 $G(x)\overset{\text{def}}{=}\sum\limits_{i=1}^{n}\varphi_i(x_i)\Big[\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+h_i f(\sigma)\Big]$负定．因为

$$\forall x,\ \text{设}\ \prod_{i=1}^{n}x_i\neq 0 \qquad \sum_{i=n_0+1}^{n}x_i^2=0 \qquad 1\leqslant n_0\leqslant n \quad \text{故}$$

$$G(x)=\sum_{j=1}^{n_0}\varphi_j(x_j)\,[a_{jj}+h_jr_jg(\sigma)]x_j\Bigg[-1+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n_0}\left|\frac{\varphi_i(x_i)(a_{ij}+h_ir_j(g(\sigma))x_j}{\varphi_j(x_j)(a_{jj}+h_jr_j(g(\sigma))x_j}\right|\Bigg]$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{n_0}-\bar{a}_{jj}\bar{b}_j|x_j|\Big[-1+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n_0}\eta_{ij}\frac{\bar{b}_i}{\bar{b}_j}\Big]<0$$

由引理定理得证． □

作者深谢钱伟长教授、秦元勋教授、王联老师的鼓励和帮助．

参 考 文 献

1. Lefschetz, S., *Contrib. Diff. Eq.* 1, (1960), 1—28.
2. Летов. А. М., *Устойчивости Нелинейных Регулируемых Систем Гостехизуиет* М. (1952)，中译本，李惠译，科学出版社，(1959).
3. Reissig R., Sansone, G. and Conti, R., *Non-Linear Differential Equations of Higher Order*, Noordhoff International Publishing House Legden, (1974)
4. Meyer, K. R., *Contrib Diff. Eq.*, 3, (1964), 436—437
5. Айзерман, М. А. и Гангмахер, Ф. Р, Абсолютная усгойчивость нелинейных регулируемых систем Изд-Во АН СССР., М(1963).
6. 赵素霞，数学学报，22，4 (1979)，404-419.
7. 朱思铭，中山大学学报（自然科学），3 (1979)，20-28.
8. Пионтковский, А. А., Ругковская Л. [illegible]. А. И. Т 28: 10. (1967) 23-31.
9. Michel, A. N., *J SIAM Control*, 12 (1974), 554-579.
10. 廖晓昕，中国科学，数学专辑[1]．(1979)，124-134.
11. 廖晓昕，计算数学，2(1979)，164-171.
12. 廖晓昕，数学学报，5 (1981)，641-649.

On the Criterion for the Absolute Stability of the Control System

Liao Xiao-xin

(*Huazhong Teachers College, Wuhan*)

Abstract

In this paper, firstly we give the criterion for the absolute stability of the second canonical form for the control system, including the equation of the longtitudinal motions of a plane as a particular example. The corresponding result in references [8], [9] is a particular example given in this paper. Secondly, we give the criteria for the absolute stability of the first canonical form in the usual case and in the critical case. Finally, we give some criterta for the absolute stability of the general form for the direct control system.

All the results in this paper, merely depend upon the relations between the parameters of the system itself to give an explicit algebraic discriminant.