

文章编号: 1000-0887(2004) 12-1299_06

多频激励软弹簧型 Duffing 系统中的混沌^{*}

楼京俊, 何其伟, 朱石坚

(海军工程大学 振动与噪声研究所, 武汉 430033)

(陈予恕推荐)

摘要: 研究了多频激励下的软弹簧型 Duffing 系统的混沌动力学, 发现混沌产生的根本原因是系统相空间中横截异宿环面的存在. 建立了双频激励情况下二维环面上的 Poincaré 映射、稳定流形和不稳定流形, 应用 Melnikov 方法给出了稳定流形和不稳定流形横截相交的条件, 并将此方法推广到激励包含有限多个频率的情形. 推广了 Melnikov 方法在高维系统中的应用, 给出了 Smale 马蹄意义下混沌存在的判据. 同时证明, 激励频率数目的增加扩大了参数空间上的混沌区域.

关键词: 多频激励; 软弹簧 Duffing 系统; 混沌; 异宿环面

中图分类号: O322 **文献标识码:** A

引 言

20 世纪 80 年代以来, 谐波激励下的单自由度非线性振动系统能够出现混沌已成为百颠不破的事实. 分析这类系统的常用方法是 Poincaré 截面法, 由此产生的 Poincaré 映射能够揭示出常规分析方法所不能反映的许多本质性的全局结构和分形特征, 因而使非线性系统受迫振动的分析容易得多. 许多系统中出现混沌是双曲不动点的稳定流形与不稳定流形横截相交的结果, 如受屈曲的杆的横向受迫振动. 这种横截相交产生横截同宿轨(或异宿轨), 进而导致具有 Smale 马蹄属性的混沌. 对于一大类谐波激励单自由度系统, Melnikov 发展了关于双曲周期轨的稳定流形与不稳定流形间距离的一种可计算的量度, 这种量度可以用来判断横截同宿轨(或异宿轨)的出现, 因此也可以作为存在混沌的判据^[1].

虽然在简谐激励单自由度非线性系统中有关混沌本质的研究已经取得了实质性进展, 但是多频激励非线性系统的研究很少, 尽管实验和数值仿真已经证实这类系统的确存在混沌运动. 主要原因是没有将多频强迫激励非线性系统简化为二维 Poincaré 映射的直接方法. 双 Poincaré 截面法的发现为高维系统应用 Melnikov 方法打开了大门. Moon 和 Holmes^[2]通过实验观测到两个不可通约频率激励下的 Holmes 型 Duffing 系统的混沌运动, 并用双 Poincaré 截面法揭示了该系统具有分形特征的奇怪吸引子. Wiggins^[3-4]研究发现准周期激励下 Holmes 型 Duffing 系统产生混沌的机理在于横截同宿环面, 该文将 Melnikov 全局摄动法推广到了四维相空间, 给出了混沌存在的判别式, 并论证了激励频率数目对参数空间上混沌区域的影响. Kayo

* 收稿日期: 2002_12_30; 修订日期: 2004_05_31

作者简介: 楼京俊(1976—), 男, 浙江义乌人, 博士研究生(E-mail: jingjun_lou@hotmail.com);

朱石坚, 教授, 硕士(联系人, Tel: + 86_27_83443991; Fax: + 86_27_83443990; E-mail: zhushj@public.wh.hb.cn).

和 Wiggins^[5] 研究了准周期激励下 Holmes 型 Duffing 系统的同宿环分岔, 揭示了同宿环是如何引起混沌的, 并给出了双频激励下 Holmes 型 Duffing 系统在五维参数空间上的分岔集。

此外, Heagy 和 Ditto^[6] 研究了两项参数激励 Duffing 振子从准周期运动到混沌的演变。陆启韶等人^[7,8] 研究了两项参数激励作用下的局部分岔和 Hopf 分岔问题。Yagasaki^[9-11] 研究了参数激励和外激励联合作用下的混沌。陈予恕和王德石^[12] 通过计算 Melnikov 函数研究了参数激励和外激励联合作用下由准周期解通向混沌的道路。Kapitaniak^[13] 研究了多频激励非线性项 Duffing 振子的组合分岔, 并借用 FPK 方程^[14-15] 研究了噪声对系统的动力学特性的影响。毕勤胜等^[16] 通过引入非线性频率, 利用 Floquet 理论及 Leung 等在研究 Duffing 方程参数平面上定常解分布时提出的思想^[17], 研究了硬弹簧 Duffing 系统在一次近似下的各种分岔模式及其转迁集, 并指出了其通向混沌的可能途径。

本文推广了 Wiggins 等人的工作, 应用 Melnikov 全局摄动法于多频激励下的软弹簧型 Duffing 系统, 通过计算 Melnikov 函数给出了混沌阈值, 并分析了激励频率数目对参数空间上混沌区域的影响。

1 双频激励软弹簧 Duffing 系统

双频激励下的软弹簧型 Duffing 系统存在周期运动、准周期运动与混沌运动。其无量纲化的微分方程为:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, & \dot{y} = -x + x^3 + \varepsilon(f \cos \theta_1 + f \cos \theta_2 - \gamma y), \\ \dot{\theta}_1 = \omega_1, & \dot{\theta}_2 = \omega_2, \end{cases} \quad (1)$$

式中: ε 是个小量; γ 是阻尼因子, f 是激励力幅值, f 和 γ 均为正; ω_1 和 ω_2 是激励频率, 均为正实数; x, y 分别表示被激振质量的位移和速度。式(1)表示增广相空间 $R^2 \times S^1 \times S^1$ 上准周期激励下的软弹簧型 Duffing 系统。 $S^1 \times S^1$ 为由变量 $\omega_1 t, \omega_2 t$ 所定义的二维环面, 因此该系统可视为发生在此二维环面上的微分动力系统。简单地改变激励频率 ω_1, ω_2 间的比值能改变系统运动的拓扑性质, 设 ω_1, ω_2 满足

$$n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2 = 0, \quad (2)$$

当 n_1 和 n_2 都是非零整数时, ω_1, ω_2 称为可通约的, 或称频率比 ω_1/ω_2 为有理数; 相反, 式(2)仅有零解即 $n_1 = n_2 = 0$ 时, ω_1, ω_2 称为不可通约的, 或称 ω_1/ω_2 为无理数。

激励频率 ω_1, ω_2 可通约时, 系统(1)的解为二维环面上的闭合曲线, 如图 1 所示。然而, 当 ω_1, ω_2 不可通约时, 系统(1)具有更复杂的动力学特性, 此时不仅可以有 $(n_1/n_2) \omega_1, (n_1/n_2) \omega_2$ 的响应频率, 还可能存在 $|(n_1/n_2)(\omega_1 \pm \omega_2)|$ 的响应频率^[17], 在该系统中必将产生准周期解^[18], 准周期解进一步失稳, 则容易导致混沌^[19]。

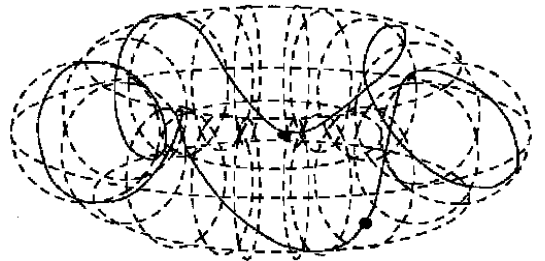


图 1 二维环面上的封闭轨线

通过固定增广相空间 $R^2 \times S^1 \times S^1$ 上任一角变量, 定义一个三维横截面, 这样就把系统(1)简化为相应的三维 Poincaré 映射, 并允许剩下的 3 个变量在系统(1)产生的流的作用下从横截面开始随时间演变, 直到它们回归到横截面。经过被固定的角变量的一个周期发生一次回归。更

准确地说, 该横截面 Σ 由下式给出

$$\Sigma = \left\{ (x, y, \theta_1, \theta_2) \in R^2 \times S^1 \times S^1 \mid \theta_2 = \theta_{20} \right\}, \quad (3)$$

为了确定性, 式中固定了角变量 θ_2 . 定义 Poincaré 映射 $P_\varepsilon: \Sigma \rightarrow \Sigma$ 为

$$(x(0), y(0), \theta_1(0) \equiv \theta_{10}) \rightarrow \left[x \left(\frac{2\pi}{\omega_2} \right), y \left(\frac{2\pi}{\omega_2} \right), \theta_1 \left(\frac{2\pi}{\omega_2} \right) = \frac{2\pi\omega_1}{\omega_2} + \theta_{10} \right]. \quad (4)$$

当 $\varepsilon = 0$ 时, 系统(1) 是完全可积的, 且具有二维正规双曲不变环面 T

$$\left\{ (x, y, \theta_1, \theta_2) \in R^2 \times S^1 \times S^1 \mid x = y = 0, \theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi] \right\}, \quad (5)$$

环面上的轨线为

$$(x(t), y(t), \theta_1(t), \theta_2(t)) = (0, 0, \omega_1 t + \theta_{10}, \omega_2 t + \theta_{20}). \quad (6)$$

大家都知道, 自由振动的软弹簧 Duffing 系统在二维相平面 (x, y) 上存在两个鞍点 $(1, 0)$ 和 $(-1, 0)$, 以及连结 $(\pm 1, 0)$ 的两条异宿轨道, 形成一个异宿圈. 且两条异宿轨道的参数方程为^[11]

$$x^\pm(t) = \pm \operatorname{th} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} t \right], \quad y^\pm(t) = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{\sqrt{2}}{2} t \right]. \quad (7)$$

所以在双曲不变环面 T 上, 鞍点 $(\pm 1, 0)$ 变成了两个一维正规双曲不变环面(即圆周) τ_{10} 、 τ_{20} , 且 τ_{10} 、 τ_{20} 的稳定流形和不稳定流形的轨线为

$$(x(t), y(t), \theta_1(t), \theta_2(t)) = \left[\pm \operatorname{th} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} t \right], \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{\sqrt{2}}{2} t \right], \omega_1 t + \theta_{10}, \omega_2 t + \theta_{20} \right]. \quad (8)$$

利用这些信息可以获得无扰动 Poincaré 映射 P_0 的全局可积动力系统的完整图像. 特别地, P_0 有两个一维正规双曲不变环面 τ_{10} 、 τ_{20} 和 τ_{10} 的二维稳定流形 $W^s(\tau_{10})$ 、 τ_{10} 的二维不稳定流形 $W^u(\tau_{20})$ 、 τ_{10} 的二维不稳定流形 $W^u(\tau_{10})$ 以及 τ_{20} 的二维稳定流形 $W^s(\tau_{20})$, 其中 $W^s(\tau_{10})$ 和 $W^u(\tau_{20})$ 是重合的, $W^u(\tau_{10})$ 和 $W^s(\tau_{20})$ 也重合, 如图 2 所示. 此时(即 $\varepsilon = 0$), 因为 P_0 可积, 系统(1) 不可能出现混沌.

当 $\varepsilon \neq 0$ 且不大时, 微扰 Poincaré 映射 P_ε 仍有两个一维正规双曲不变环面 $\tau_{1\varepsilon}$ 、 $\tau_{2\varepsilon}$, 和 $\tau_{1\varepsilon}$ 的二维稳定流形 $W^s(\tau_{1\varepsilon})$ 、 $\tau_{2\varepsilon}$ 的二维不稳定流形 $W^u(\tau_{2\varepsilon})$, 以及 $\tau_{1\varepsilon}$ 的二维不稳定流形 $W^u(\tau_{1\varepsilon})$ 、 $\tau_{2\varepsilon}$ 的二维稳定流形 $W^s(\tau_{2\varepsilon})$, 现在 $W^s(\tau_{1\varepsilon})$ 和 $W^u(\tau_{2\varepsilon})$ 、 $W^u(\tau_{1\varepsilon})$ 和 $W^s(\tau_{2\varepsilon})$ 能够分别横截相交产生横截异宿轨. $W^s(\tau_{1\varepsilon})$ 和 $W^u(\tau_{2\varepsilon})$ (或 $W^u(\tau_{1\varepsilon})$ 和 $W^s(\tau_{2\varepsilon})$) 的运动可以通过计算双频激励系统的 Melnikov 函数确定. $W^s(\tau_{1\varepsilon})$ 和 $W^u(\tau_{2\varepsilon})$ (或 $W^u(\tau_{1\varepsilon})$ 和 $W^s(\tau_{2\varepsilon})$) 之间的距离对 ε 进行幂级数展开, Melnikov 函数是幂级数展开中 ε 的高阶小量 $O(\varepsilon)$. 因此, 如果该 Melnikov 函数存在简单零点, 则 $W^s(\tau_{1\varepsilon})$ 和 $W^u(\tau_{2\varepsilon})$ (或 $W^u(\tau_{1\varepsilon})$ 和 $W^s(\tau_{2\varepsilon})$) 横截相交. 稳定、不稳定流形的任一分支的 Melnikov 函数为

$$\begin{aligned} M_\pm(\theta_1, \theta_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[-\dot{y}_\pm^0(t) + f \cos \omega_1(t + t_0) + f \cos \omega_2(t + t_0) \right] y_\pm^0(t) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\pm \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{\sqrt{2}}{2} t \right] \right] \left[\pm \frac{\sqrt{2}}{2} (-\dot{y}) \operatorname{sech}^2 \left[\frac{\sqrt{2}}{2} t \right] + \right. \\ &= f \cos \omega_1(t + t_0) + f \cos \omega_2(t + t_0) \left. \right] dt = \\ &= -\frac{2\sqrt{2}}{3} \dot{y} + \sqrt{2\pi} \omega_1 \operatorname{csch} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \pi \omega_1 \right] f \cos \omega_1 t_0 + \sqrt{2\pi} \omega_2 \operatorname{csch} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \pi \omega_2 \right] f \cos \omega_2 t_0 = \end{aligned}$$

$$- I_0 \gamma \pm I_1 f \cos \theta_{10} \pm I_2 f \cos \theta_{20}, \tag{9}$$

式中

$$I_0 = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad I_1 = \sqrt{2\pi} \omega_1 \operatorname{csch} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \pi \omega_1 \right],$$

$$I_2 = \sqrt{2\pi} \omega_2 \operatorname{csch} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \pi \omega_2 \right],$$

$$\theta_{10} = \omega_1 t_0, \quad \theta_{20} = \omega_2 t_0.$$

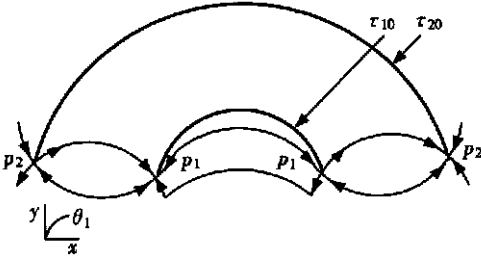


图2 P_0 的相空间的异宿结构(半剖面图)

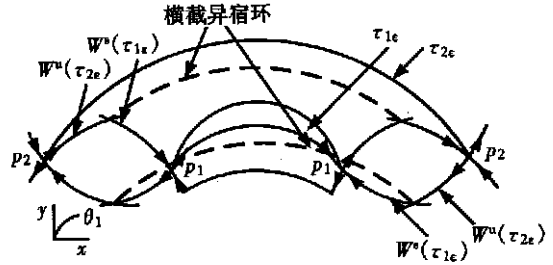


图3 P_ϵ 的横截异宿环面

考察 Melnikov 函数(9)知, 当

$$\frac{f}{\gamma} > \frac{I_0}{I_1 + I_2} \tag{10}$$

时 $W^s(\tau_{1\epsilon})$ 和 $W^u(\tau_{2\epsilon})$ (或 $W^u(\tau_{1\epsilon})$ 和 $W^s(\tau_{2\epsilon})$) 在一点上横截相交, 这些点组成一个一维环面(即圆周), 称为横截异宿环面, 它们分别与 τ_{10} 、 τ_{20} 同伦, 如图3所示。大家都知道, 只要有一个横截异宿点, 就会存在无穷多个横截异宿点, 与此相类似, 存在一横截异宿环面, 则必定有可数无穷多这样的横截异宿环面, 因而具有 Smale 马蹄意义下的混沌。

2 多频激励

增加更多的激励频率, 系统(1)将变为

$$\begin{cases} \dot{x} = y, & \dot{y} = -x + x^3 + \epsilon(f \cos \theta_1 + f \cos \theta_2 + \dots + f \cos \theta_n - \gamma y), \\ \dot{\theta}_1 = \omega_1, & \dots, \quad \dot{\theta}_n = \omega_n. \end{cases} \tag{11}$$

对系统(11)的研究可归结于对相应的 $(n-1)$ 维 Poincaré 映射的研究, 该 Poincaré 映射具有两个 $(n-2)$ 维正规双曲不变环面及其 $(n-1)$ 维稳定流形、不稳定流形。稳定流形和不稳定流形横截相交的条件可以通过计算 Melnikov 函数确定。图4中有 $f = m_1 \gamma$, $f = m_2 \gamma$, 以及 $f = m_n \gamma$ 三根直线, 在这些直线之上方分别表示软弹簧 Duffing 系统受到 1、2 和 n 个频率强迫激励时存在横截异宿环的区域。 m_1 、 m_2 和 m_n 由 Melnikov 函数计算得

$$m_1 = \frac{I_0}{I_1}, \quad m_2 = \frac{I_0}{I_1 + I_2}, \quad \dots, \quad m_n = \frac{I_0}{I_1 + I_2 + \dots + I_n}, \tag{12}$$

其中 $I_i = \sqrt{2\pi} \omega_i \operatorname{csch} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \pi \omega_i \right], \quad i = 1, 2, \dots, n$

从图4可以看出, 增加激励频率数扩大了参数空间上能够发生混沌的区域, 因此增加了混沌发生的可能性。这与 Wiggins 关于多频激励 Holmes 型 Duffing 系统的分析结果一致。

3 结 论

1) 当软弹簧型 Duffing 系统的外激励包含有限多个频率时, 其 Poincaré 映射存在两个高维

正规双曲不变环面, 其一环面的稳定流形(不稳定流形)与另一环面的不稳定流形(稳定流形)横截相交产生横截异宿环面, 这是产生混沌的根本原因。而且, 激励频率越多, 系统越容易出现混沌。

2) 当系统(1)中不同激励频率所对应的激励力幅值不同时, Melnikov 函数式(9)变为

$$M_{\pm}(\theta_1, \theta_2) = -I_0 \gamma \pm I_1 f_1 \cos \theta_{10} \pm I_2 f_2 \cos \theta_{20} \quad (13)$$

因此, 当参数 $\gamma, f_i (i = 1, 2)$ 满足

$$\gamma < (I_1 f_1 + I_2 f_2) / I_0 \quad (14)$$

时, 系统(1)的 Poincaré 映射存在横截异宿环面, 即出现 Smale 马蹄变换意义下的混沌。

3) 若系统(1)中的 θ_1, θ_2 非定常时, 则系统(1)的正规双曲不变环面可能会因为锁相而受到影响, 此时系统(1)应为

$$\begin{cases} \dot{x} = y, & \dot{y} = -x + x^3 + \varepsilon(f \cos \theta_1 + f \cos \theta_2 - \gamma y), \\ \dot{\theta}_1 = \omega_1 + \varepsilon \alpha \sin(\theta_1 - \theta_2), & \dot{\theta}_2 = \omega_2 + \varepsilon \alpha \sin(\theta_2 - \theta_1), \end{cases} \quad (15)$$

系统(1)是系统(15) $\alpha = 0$ (即两个激励频率为常数)的特殊情形。

当 $\varepsilon > 0$ 且足够小时, 系统(15)有一个受制于锁相的不变环面。Yagasaki^[20]研究了 Holmes 型 Duffing 系统后指出, 当不变环面受制于锁相时, 稳定流形与不稳定流形横截相交产生的混沌可能被抑制, 并通过鞍结分岔产生两个稳定的周期轨。因此, 软弹簧型 Duffing 系统在受到多个缓变频率激励时的受迫振动是值得研究的。

[参 考 文 献]

- [1] 刘曾荣. 混沌的微扰判据[M]. 上海: 上海科技教育出版社, 1994: 7—10.
- [2] Moon F C, Holmes W T. Double Poincaré sections of a quasi-periodically forced, chaotic attractor [J]. Physics Letters A, 1985, 111(4): 157—160.
- [3] Wiggins S. Chaos in the quasiperiodically forced Duffing oscillator [J]. Physics Letters A, 1987, 124(3): 138—142.
- [4] Wiggins S. Global Bifurcations and Chaos—Analytical Methods [M]. New York: Springer-Verlag, 1988: 313—333.
- [5] Kayo IDE, Wiggins S. The bifurcation to homoclinic tori in the quasiperiodically forced Duffing oscillator [J]. Physica D, 1989, 34(1): 169—182.
- [6] Heagy J, Ditto W L. Dynamics of a two-frequency parametrically driven Duffing oscillator [J]. Journal of Nonlinear Science, 1991, 1(2): 423—455.
- [7] LU Qi-shao. Principle resonance of a nonlinear system with two-frequency parametric and self-excitations [J]. Nonlinear Dynamics, 1991, 2(6): 419—444.
- [8] 陆启韶、黄克累. 非线性动力学、分岔和混沌[A]. 见: 黄文虎, 陈滨, 王照林 编. 一般力学(动力学、振动与控制)最新进展[C]. 北京: 科学出版社, 1994, 11—18.
- [9] Yagasaki K, Sakata M, Kimura K. Dynamics of weakly nonlinear system subjected to combined parametric and external excitation [J]. Trans ASME, Journal of Applied Mechanics, 1990, 57(1): 209—217.
- [10] Yagasaki K. Chaos in weakly nonlinear oscillator with parametric and external resonance [J]. Trans

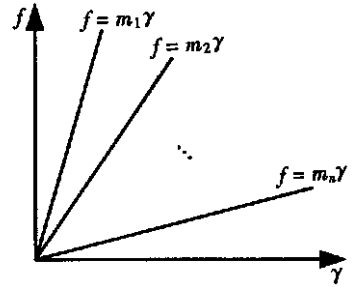


图 4 激励频率数对混沌参数区域的影响

- ASME, Journal of Applied Mechanics, 1991, **58**(1): 244—250.
- [11] Yagasaki K. Chaotic dynamics of a quasi-periodically forced beam[J]. Trans ASME, Journal of Applied Mechanics, 1992, **59**(1): 161—167.
- [12] 陈予恕, 王德石. 轴向激励下梁的混沌运动[J]. 非线性动力学学报, 1993, **1**(2): 124—135.
- [13] Kapitaniak T. Combined bifurcations and transition to chaos in a nonlinear oscillator with two external periodic forces[J]. Journal of Sound and Vibration, 1988, **121**(2): 259—268.
- [14] Kapitaniak T. Chaotic distribution of nonlinear systems perturbed by random noise[J]. Physical Letters A, 1986, **116**(6): 251—254.
- [15] Kapitaniak T. A property of a stochastic response with bifurcation to nonlinear system[J]. Journal of Sound and Vibration, 1986, **107**(1): 177—180.
- [16] 毕勤胜, 陈予恕, 吴志强. 多频激励 Duffing 系统的分岔和混沌[J]. 应用数学和力学, 1998, **19**(2): 113—120.
- [17] Leung A Y T, Fung C. Construction of chaotic regions [J]. Journal of Sound and Vibration, 1989, **131**(3): 445—455.
- [18] Stupnicka S, Bajkowski. The 1/2 subharmonic resonance its transition to chaos motion in a nonlinear oscillator[J]. IFTR Reports, 1986, **4**(1): 67—72.
- [19] Dooren R V. On the transition from regular to chaotic behaviour in the Duffing oscillator[J]. Journal of Sound and Vibration, 1988, **123**(2): 327—339.
- [20] Yagasaki K. Homoclinic tangles, phase locking, and chaos in a two-frequency perturbation of Duffing equation[J]. Journal of Nonlinear Science, 1999, **9**(1): 131—148.

Chaos in the Softening Duffing System Under Multi-Frequency Periodic Forces

LOU Jing_jun, HE Qi_wei, ZHU Shi_jian

(Institute of Noise & Vibration, Naval University of Engineering, Wuhan 430033, P. R. China)

Abstract: The chaotic dynamics of the softening spring Duffing system with multi-frequency external periodic forces is studied. It is found that the mechanism for chaos is the transverse heteroclinic tori. The Poincaré map, the stable and the unstable manifolds of the system under two incommensurate periodic forces were set up on a two-dimensional torus. Utilizing a global perturbation technique of Melnikov the criterion for the transverse interaction of the stable and the unstable manifolds was given. The system under more but finite incommensurate periodic forces was also studied. The Melnikov's global perturbation technique was therefore generalized to higher dimensional systems. The region in parameter space where chaotic dynamics may occur was given. It was also demonstrated that increasing the number of forcing frequencies will increase the area in parameter space where chaotic behavior can occur.

Key words: multi-frequency excitation; softening Duffing system; chaos; heteroclinic torus