

一条奇形四叶玫瑰花曲线的性态 及其两例应用

刘先志

(济南山东工学院, 1980年5月30日收到)

摘 要

本文汇报作者在科研中所发现的应是一条新型曲线, 因为迄今在作者所触及到的数学资料里尚未遇到它, 虽然一个人确实不可能接触全部资料. 文中论辩了新曲线的一些主要性态. 在触及的资料中也发现两处出现了这种曲线, 但那里并未按数学要求作过应有的分析.

一、新曲线的公式及其形成

设想有两条曲线, 其结构由下列方程代表

$$\rho_1 = b \cos \theta \quad (1.1)$$

$$\rho_2 = -b \cos 3\theta \quad (1.2)$$

其中 b 是个参数, ρ_1 和 ρ_2 是向量半径, 在 (1.1) 式里 θ 是向量角.

用 (1.1) 式去除 (1.2) 式, 再乘以 $b > 0$, 就得到所谓的新曲线的方程.

$$\rho = -b \frac{\cos 3\theta}{\cos \theta} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi) \quad (1.3)$$

其中 ρ 是向量半径.

二、 ρ_1 、 ρ_2 和 ρ 的图解

如图 1 所示, (1.1) 式的图解是个圆, 在图中也绘上了狄卡儿坐标 (x, y) . 该圆是以 y 轴作为切线, 其直径之一是落在 x 轴上.

(1.2) 式的图解是个三叶玫瑰花曲线, 在一般解析几何^[1]和初级微积分学^[2]中都有收集. 图 1 显示, 一叶落在负 x 轴上, 一叶落在 60° 的正向量半径上, 一叶则落在 120° 的负向量半径上.

(1.3) 式的图解有两个小叶和两个大叶, 因此我们不妨参照 $\rho = a \cos 2\theta$ 四叶玫瑰花曲线而命名 (1.3) 式为奇形四叶玫瑰花曲线 (a degenerated four-leaved rose curve).

对于 (1.3) 式, 我们可利用 $\cos 3\theta = 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta$ 把它化成

$$\rho = b(3 - 4 \cos^2 \theta) \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi) \quad (2.1)$$

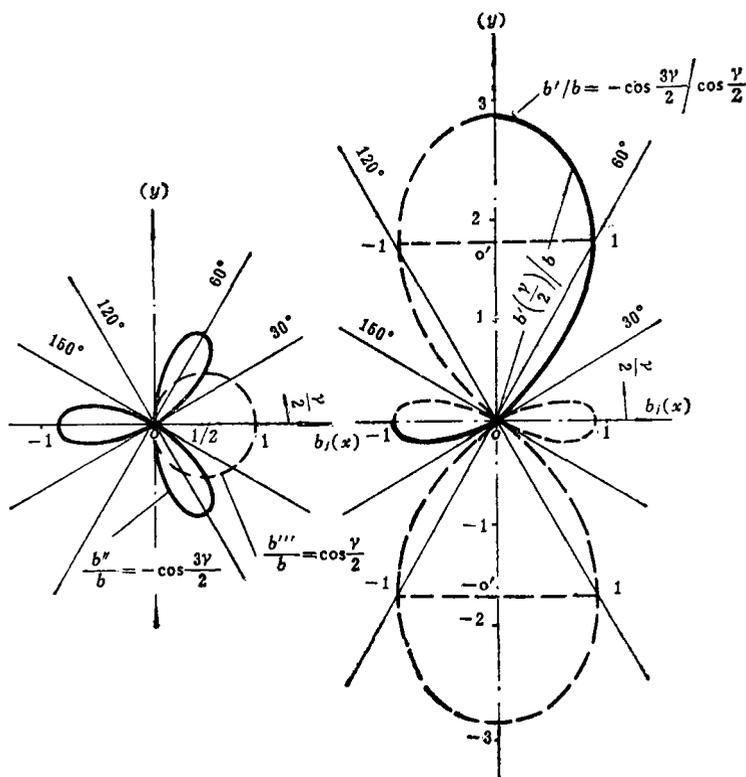


图 1 圆、三叶玫瑰花、奇形四叶玫瑰花曲线。

以区间 $0 \leq \theta \leq 2\pi$, 可算出数表 1, 从而得到图 1 里的应有曲线。

表 1 ρ/b 依向量角 θ 的数值

$\theta [^\circ]$	0	15	30	45	60	75	90
$\cos \theta$	1	0.966	0.866	0.707	0.5	0.259	0
$\cos^2 \theta$	1	0.931	0.75	0.5	0.25	0.067	0
$4\cos^2 \theta$	4	3.724	3	2	1	0.268	0
$\rho/b = 3 - 4\cos^2 \theta$	-1	-0.724	0	1	2	2.732	3
$\theta [^\circ]$	105	120	135	150	165	180	
$\cos \theta$	-0.259	-0.5	-0.707	-0.866	-0.966	-1	
$\cos^2 \theta$	0.067	0.25	0.5	0.75	0.931	1	
$4\cos^2 \theta$	0.268	1	2	3	3.724	4	
$\rho/b = 3 - 4\cos^2 \theta$	2.732	2	1	0	-0.724	-1	

若不用代换 $\cos 3\theta = 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta$, 就须用极值

$$\left(\frac{\cos 3\theta}{\cos \theta} \right)_{\theta=\pi/2} = \frac{3\sin 3\theta}{\sin \theta} \Big|_{\theta=\pi/2} = -3 \tag{2.2}$$

因为 (2.1) 式里有 $\cos^2 \theta$, 所以 (2.1) 式的图解曲线既对称于 x 轴, 而又对称于 y 轴。

三、把三个向量式化成狄卡儿坐标式

有时我们需要知道在狄卡儿坐标系中的各曲线的结构; 为此, 可用代换式 $\rho^2 = x^2 + y^2$,

$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$, $\sin \theta = \frac{y}{\pm \sqrt{x^2 + y^2}}$ 和 $\cos \theta = \frac{x}{\pm \sqrt{x^2 + y^2}}$ 来把 (1.1)、(1.2) 和 (1.3) 诸式化为

$$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{b^2}{4} \quad (3.1)$$

$$(x^2 + y^2)^2 = b(3xy^2 - x^3) \quad (3.2)$$

$$(x^2 + y^2)^3 = b^2(3y^2 - x^2)^2 \quad (3.3)$$

用上列三式也可绘制图 1 里的曲线, 对称性和非对称性均易于从 x 和 y 的指数的情况来判断. 文中可称“大小花瓣”或称“大小叶片”.

四、在坐标原点处, 大小叶片尖端的夹角

奇形曲线的四个叶片以其尖端会聚在坐标原点; 夹角系指在每个叶片尖端处其两切线所夹之角. 在以后的分析中, 我们需要这两小夹角, 因此先在这节中预先推导. 自 (3.3) 式可推得

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{[2b^2(3y^2 - x^2) + 3(x^2 + y^2)^2]x}{[6b^2(3y^2 - x^2) - 3(x^2 + y^2)^2]y}, \quad \left(x' = \frac{dx}{dy}\right) \quad (4.1)$$

由于 $(y')_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 0/0$, 所以须把 (4.1) 式先进行改造: 用自 (3.3) 式得出的 $3y^2 - x^2 = (x^2 + y^2)^{3/2}/b$ 把 (4.1) 式改写成

$$y' = \frac{2b + 3\sqrt{x^2 + y^2}}{6b - 3\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{x/\sqrt{x^2 + y^2}}{y/\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (4.2)$$

按曲线的结构, 应当理解, 在 $(0, 0)$ 处, 两相邻切线的情况有两个解, 其一解只对小叶有效, 另一解则只对大叶有效; 两相邻夹角之和等于 π , 因为有两对叶片, 从而四个相邻夹角之和是 2π .

再用关系 $\sin \theta = \pm y/\sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos \theta = \pm x/\sqrt{x^2 + y^2}$ 和 $y' = \tan \theta$, 可把 (4.2) 式写成

$$\tan^2 \theta = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{2b + 3\sqrt{x^2 + y^2}}{6b - 3\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (4.3)$$

从而得

$$(y')_{\substack{x=0 \\ y=0}} = \lim_{\substack{x=0 \\ y=0}} \left(\pm \sqrt{\frac{2b + 3\sqrt{x^2 + y^2}}{6b - 3\sqrt{x^2 + y^2}}}\right) = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (4.4)$$

意即, $(y')_{\substack{x=0 \\ y=0}} = \pm 30^\circ$ 与 $(y')_{\substack{x=0 \\ y=0}} = \pm 150^\circ$, 换言之, 在原点处得到两个夹角

$$\left. \begin{aligned} \delta_s &= 2|(y')_{\substack{x=0 \\ y=0}}| = 60^\circ \\ \delta_l &= \frac{2\pi - 2\delta_s}{2} = 120^\circ \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

其中下指标 s 和 l 各表示“小”与“大”, 即对小叶与大叶而言.

另外, 何必这样迂曲地自找麻烦而不适用 $\rho = 0$, 从而自 $\rho = b(3 - 4\cos^2 \theta)$ 更简便地导得

$\cos \theta = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$; 致使得出两条切线与 x 轴所成之角

$$\theta_1 = \pm 30^\circ, \quad \theta_2 = \pm 150^\circ \quad (4.6)$$

这两条切线在 $(0, 0)$ 点上密合, 也就得出跟上边相同的结果.

五、大、小花瓣的边长

利用 $\rho = b(3 - 4\cos^2 \theta)$ 和 $\Psi(\theta) = \sqrt{9 + 40\cos^2 \theta - 48\cos^4 \theta}$, 可成立核算弧长的积式

$$S = \int \left[\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} d\theta = b \int \Psi(\theta) d\theta$$

从而得小花瓣边长的积式

$$S_s = 2b \int_0^{\pi/6} \Psi(\theta) d\theta \quad (5.1)$$

和大花瓣边长的积式

$$S_l = 2b \int_{\pi/6}^{\pi/2} \Psi(\theta) d\theta \quad (5.2)$$

以及两花瓣边长的比例

$$S_l/S_s = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \Psi(\theta) d\theta / \int_0^{\pi/6} \Psi(\theta) d\theta \quad (5.3)$$

象一般计算弧长一样, 寻求其闭合解是有困难的. 但把 $\Psi(\theta)$ 绘成图解, 并利用平面积分仪, 曾获得下列数值以作个数量级性质的参考.

$$\left. \begin{aligned} S_s &= 2.71b, \quad S_l = 7.83b, \quad S_l/S_s = 2.88 \\ S &= S_s + S_l = 10.29b, \quad 2S = 20.58b \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

这里曾只列出小数点后两位的精度, 虽然计算曾更精细.

六、大、小两花瓣的面积

推算面积的一般积式是

$$A = \frac{1}{2} \int \rho^2 d\theta = \frac{1}{2} b^2 \int (3 - \cos 2\theta + 2 \cos 4\theta) d\theta \quad (6.1)$$

从而对于小花瓣

$$A_s = b^2 \int_0^{\pi/6} (3 - \cos 2\theta + 2 \cos 4\theta) d\theta = b^2 \left(3\theta - 2 \sin 2\theta + \frac{1}{2} \sin 4\theta \right) \Big|_0^{\pi/6} = b^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{3}{4} \sqrt{3} \right) \quad (6.2)$$

而对于大花瓣则得

$$A_l = b^2 \int_{\pi/6}^{\pi/2} (3 - \cos 2\theta + 2 \cos 4\theta) d\theta = b^2 \left(\pi + \frac{3}{4} \sqrt{3} \right) \quad (6.3)$$

于是得

$$\frac{A_l}{A_s} = \frac{2\pi + \frac{3}{2} \sqrt{3}}{\pi - \frac{3}{2} \sqrt{3}} \approx 16.35 \quad (6.4)$$

更由于

$$A_i = A_s + A_l = \frac{3}{2} \pi b^2 \quad (6.5)$$

所以推得

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{b_1^2}{b_2^2} \quad (6.6)$$

奇形四叶玫瑰花的总面积是

$$F = 2(A_s + A_l) = 3\pi b^2 \quad (6.7)$$

这是一个相当整齐的关系.

七、大、小花瓣面积对主轴的重心距

关于花瓣面积的重心距, 小花瓣只有对 y 轴有其重心距

$$\bar{x}_s = M_{ys} / A_s \quad (7.1)$$

而大花瓣则只有其对 x 轴的重心距

$$\bar{y}_l = M_{xl} / A_l \quad (7.2)$$

其中 A_s 和 A_l 可取自 (6.2) 式和 (6.3) 式.

关于两个面积矩, 则有

$$\begin{aligned} M_{ys} &= \mp 2 \int_0^{\pi/6} \int_0^{\rho} \rho^2 \cos \theta d\rho d\theta = \mp \frac{2}{3} \int_0^{\pi/6} \rho^3 \cos \theta d\theta \\ &= \mp \frac{2}{3} b^3 \int_0^{\pi/6} (4 \sin^2 \theta - 1)^3 \cos \theta d\theta \\ &= \mp \frac{2}{3} b^3 \left(\frac{64}{7} \sin^7 \theta - \frac{48}{5} \sin^5 \theta + \frac{12}{3} \sin^3 \theta - \sin \theta \right) \Big|_0^{\pi/6} \\ &= \mp \frac{16}{105} b^3 \end{aligned} \quad (7.3)$$

于是得

$$\bar{x}_s = \mp \frac{16b^3/105}{b^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{3}{4} \sqrt{3} \right)} = \mp \frac{64b}{105(2\pi - 3\sqrt{3})} \approx \mp 0.61b \quad (7.4)$$

依同理, 则有

$$\begin{aligned} M_{xl} &= 2 \int_{\pi/6}^{\pi/2} \int_0^{\rho} \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta \\ M_{xl} &= \pm \frac{2}{3} b^3 \left(27 \cos \theta - \frac{108}{3} \cos^3 \theta + \frac{144}{5} \cos^5 \theta - \frac{64}{7} \cos^7 \theta \right) \Big|_{\pi/6}^{\pi/2} \\ &= \pm \frac{144\sqrt{3}}{35} b^3 \end{aligned} \quad (7.5)$$

从而得

$$\bar{y}_l = \pm \frac{144\sqrt{3} b^3/35}{b^2(\pi + 3\sqrt{3}/4)} = \pm \frac{144\sqrt{3}}{35(\pi + 3\sqrt{3}/4)} b \approx \pm 1.61b \quad (7.6)$$

上列诸式中士号自然是对两对大、小花瓣而言.

八、曲线上横、竖切线切点的位置

对于寻找曲线的曲率半径, 我们有时需要先知道横、竖切线切点的位置. 首先在 (3.3) 式中依次使 $x=0$ 和 $y=0$, 即得出 $y=\pm 3b$ 和 $x=\pm b$. 这就规定了大、小两叶片的顶点坐标.

此外, 条件 $y'=0$ 使 (4.1) 式给出大叶顶点坐标 $x=0$ 和小叶最高和最低点的条件式 $3(x^2+y^2)^2=2b^2(x^2-3y^2)$ 或写成

$$(x^2+y^2)^3=\left(\sqrt{\frac{2}{3}}b^2(x^2-3y^2)\right)^3 \quad (8.1)$$

把 (8.1) 式代进 (3.3) 式, 就简化出

$$x^2+y^2=4y^2+\frac{8}{27}b^2 \quad (8.2)$$

再把上式代进 (3.3) 式, 则得小叶横切线切点的竖坐标

$$y=\pm\frac{b}{3\sqrt{3}}\approx\pm 0.1922b \quad (8.3)$$

再把上式代进 (8.2) 式, 则得小叶横切线切点的横坐标

$$x=\pm\frac{\sqrt{11}}{3\sqrt{3}}b\approx\pm 0.6381b. \quad (8.4)$$

从而得
$$\theta_s=\tan^{-1}\frac{y}{x}=\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{11}}\approx 16.8^\circ \quad (8.5)$$

条件 $x'=0$ 给出小叶顶点所在地点的条件 $y=0$ 和大叶竖切线切点所在地点的条件

$$(x^2+y^2)^2=2b^2(3y^2-x^2) \quad (8.6)$$

把 (8.6) 式代进 (3.3) 式, 则得

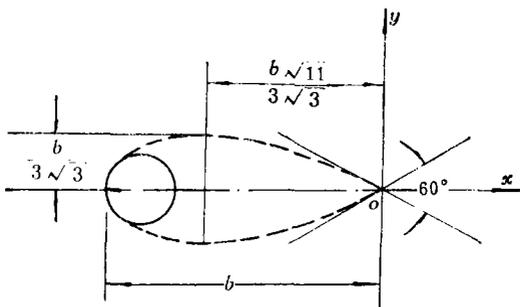


图 2 小叶片上横切线切点的位置.

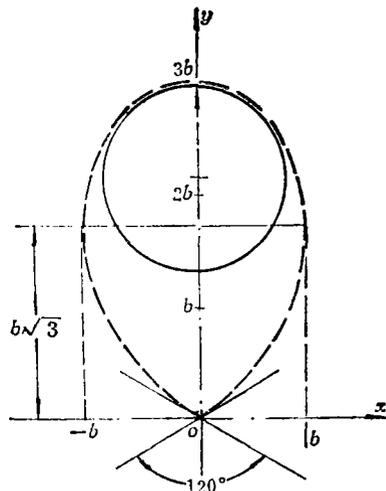


图 3 曲线竖切线切点的位置.

$$x^2+y^2=4y^2-8b^2 \quad (8.7)$$

使 (8.7) 式与 (3.3) 式联合, 则给出大叶切线切点的坐标

$$y=\pm\sqrt{3}b, x=\pm b \quad (8.8)$$

$$\theta_l=\tan^{-1}\sqrt{3}=\pi/3 \quad (8.9)$$

在下面的分析中, 当推求曲线的渐屈线时, 我们需要这些横、竖切线切点的准确位置.

九、曲线的主要曲率半径

关于分析一个曲线的性质，曲率半径和渐屈线 (evolute) 是两个重要元素。为此，极坐标曲率半径的一般公式是

$$R = \frac{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''} \quad (9.1)$$

对于本课题，则用

$$\left. \begin{aligned} \rho &= b(3 - 4 \cos^2 \theta), \quad \rho' = 8b \sin \theta \cos \theta \\ \rho'' &= -8b(1 - 2 \cos^2 \theta) \end{aligned} \right\} \quad (9.2)$$

此外，对于本节以后的分析，还用到简化关系

$$\rho'' = 4(b - \rho), \quad \rho'' = -4\rho' \quad (9.3)$$

下面我们分三部分进行推演，几何关系应逐步参照图 4。

(i) 小叶端点处的曲率半径是以 $\theta=0$ ，而得

$$R_{\theta=0} = \frac{1}{9}b \quad (9.4)$$

(ii) 大叶顶点处的曲率半径是以 $\theta=\pi/2$ ，而算得

$$R_{\theta=\pi/2} = \frac{9}{11}b \quad (9.5)$$

(iii) 核算曲率半径的极端值。

虽然 (9.4) 和 (9.5) 两式也代表了两个曲率半径极端值，我们这里要进行概括的讨论，因此它们也会包括这项讨论之内。

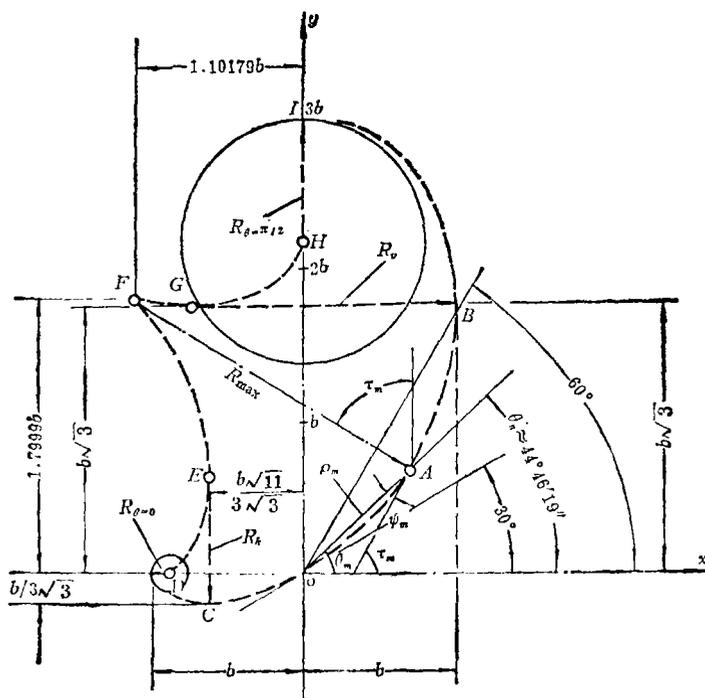


图 4 关于确定新曲线的渐屈线。

由于有了 $R_{\theta=0}$ 和 $R_{\theta=\pi/2}$, 若能再找到最大的曲率半径及其端点的地点, 我们就已确定了每条渐屈线的三个点. 为此, 可以检证

$$\frac{dR}{d\theta} = \frac{\rho' \{ 2(\rho^2 + \rho'^2)(2b - \rho) - (5\rho^2 + 2\rho'^2 - 4b\rho)(4b - 3\rho) \}}{(\rho^2 + \rho'^2)^{5/2}}, \quad (9.6)$$

其中分母 $(\rho^2 + \rho'^2)^{5/2} > 0$; 以 $\Phi(\theta)$ 代表上式的分子, 则

$$\Phi(\theta) = 8b \sin \theta \cos \theta \{ -192 \cos^6 \theta + 112 \cos^4 \theta + 284 \cos^2 \theta - 147 \} \quad (9.7)$$

设有微量 $\delta > 0$, 则得因果关系能确定的三个极端曲率半径

$$\left. \begin{array}{l} \text{由于 } \frac{dR}{d\theta} \Big|_{\theta=\delta} \leq 0, \text{ 所以 } R_{\theta=0} = R_{\min_1} \\ \text{由于 } \frac{dR}{d\theta} \Big|_{\theta=\theta_m \mp \delta} \geq 0, \text{ 所以 } R_{\theta=\theta_m} = R_{\max} \\ \text{由于 } \frac{dR}{d\theta} \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2} \mp \delta} \leq 0, \text{ 所以 } R_{\theta=\pi/2} = R_{\min_2} \end{array} \right\} \quad (9.8)$$

其中 θ_m 是相应于 R_{\max} 的曲线向量角. 以 $dR/d\theta = 0$, 就可把 (9.7) 式拆成下列两式

$$\left. \begin{array}{l} \rho'' = 8b \sin \theta \cos \theta = 0 \\ (5\rho^2 + 2\rho'^2 - 4b\rho)(4b - 3\rho) - 2(\rho^2 + \rho'^2)(2b - \rho) = 0 \end{array} \right\} \quad (9.9)$$

上式也可写成

$$\left. \begin{array}{l} \sin \theta = 0, \theta = n\pi, (n=0, 1, 2, 3, \dots) \\ \cos \theta = 0, \theta = n\pi/2, (n=1, 3, 5, \dots) \\ 192 \cos^6 \theta - 112 \cos^4 \theta - 284 \cos^2 \theta + 147 = 0 \end{array} \right\} \quad (9.10)$$

上式的几何意义是: $\theta=0, \pi, 3\pi, \dots$ 表示左端点 $(-b, 0)$; $\theta=2\pi, 4\pi, \dots$ 表示右端点 $(b, 0)$; $\theta=\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$ 表示上端点 $(0, 3b)$; 而 $\theta=\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \dots$ 表示下端点 $(0, -3b)$.

把这些角值代进 (9.1) 式, 就可算出该四端处曲线的曲率半径.

于是得

$$R_{\theta=0, \pi, \dots} = \frac{1}{9}b \quad (9.4)$$

$$R_{\theta=\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots} = \frac{9}{11}b \quad (9.5)$$

现在可自 (9.10) 式的末式推算跟最大曲率半径 R_{\max} 相对应的角 θ_m . 为此, 可以验证

$$\theta_m = 44.772^\circ \approx 44^\circ 46' 19'' \quad (9.11)$$

其核算的精度是

$$24.57759308 - 28.44745613 - 143.1301237 + 147 = 0.00001325 \quad (9.12)$$

现在用 $\sin^2 \theta_m = 0.4960206912$, $\cos^2 \theta_m = 0.5039793091$ 以及公式

$$R = \frac{b[(3 - 4 \cos^2 \theta)^2 + 64 \sin^2 \theta \cos^2 \theta]^{3/2}}{(3 - 4 \cos^2 \theta)^2 + 128 \sin^2 \theta \cos^2 \theta - 8(3 - 4 \cos^2 \theta)(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)} \quad (9.13)$$

算得

$$R_{\max} \approx 2.124114537b \quad (9.14)$$

及

$$\rho_m = b(3 - 4 \cos^2 \theta) \Big|_{\theta=\theta_m} = 0.984082764b \quad (9.15)$$

以 $\theta_s = \pi/3$, 就从而自 (9.13) 式算出距离 $R_s = BG$:

$$R_v = \frac{16}{9}b \tag{9.16}$$

再以 $\sin^2 \theta_h = \frac{1}{12}$, $\cos^2 \theta_h = \frac{11}{12}$, 则从 (9.13) 式算得距离 $R_h = CE$:

$$R_h = \frac{16}{11\sqrt{3}}b = 0.8397822098b \tag{9.17}$$

于是推出

$$R_h - \frac{b}{3\sqrt{3}} = \frac{37}{33\sqrt{3}}b \tag{9.18}$$

从而获得点 E 和点 G 的坐标距

$$E = E\left(-\frac{\sqrt{11}}{3\sqrt{3}}b, \frac{37}{33\sqrt{3}}b\right), \quad G = G\left(-\frac{7}{9}b, \sqrt{3}b\right) \tag{9.19}$$

对于最大曲率半径 R_{\max} 的端点 F 的坐标, 我们需要先推求曲线的切线角

$$\tau_m = \theta_m + \psi_m = \theta_m + \tan^{-1} \frac{3 - 4 \cos^2 \theta_m}{8 \sin \theta_m \cos \theta_m} \tag{9.20}$$

以 $\sin \theta_m = 0.7042873641$ 和 $\cos \theta_m = 0.709915001$, 则算出 $\psi_m = 13.82149948^\circ$, 从而

$$\tau_m \approx 58.593^\circ \tag{9.21}$$

从而得

$$\alpha_m = -\{R_{\max} \sin(\theta_m + \psi_m) - \rho_m \cos \theta_m\} \tag{9.22}$$

$$= -1.101789319b$$

$$\beta_m = \rho_m \sin \theta_m + R_{\max} \cos(\theta_m + \psi_m) \tag{9.23}$$

$$= 1.799983342b$$

于是点 F 的坐标是 $F(\alpha_m, \beta_m) \approx F(-1.10179b, 1.79998b)$ (9.24)

本节算出的数据均可自图 4 查寻. 图中绘出了两条渐屈线, 全曲线应有八条渐屈线, 其余六条的位置可根据对称性以镜像映射推定.

十、奇形四叶玫瑰花渐屈线的长度

及时参看图 4; 自 (9.4) 和 (9.5) 两式可以推出

$$\left. \begin{aligned} R_{\theta=\pi/2} / R_{\theta=0} &= \frac{81}{11} \\ R_{\theta=\pi/2} - R_{\theta=0} &= \frac{70}{99}b \end{aligned} \right\} \tag{10.1}$$

另外, 由于 $R_{\theta=0} < R_{\theta=\pi/2}$, 所以肯定 $s_{\theta=0} > s_{\theta=\pi/2}$ (10.2)

其中 $s_{\theta=0}$ 代表渐屈线 DEF , $s_{\theta=\pi/2}$ 代表渐屈线 HGF . 此外, 更可推论出

$$\left. \begin{aligned} s_{\theta=0} &= R_{\max} - R_{\theta=0} = R_{\max} - \frac{1}{9}b \\ &= 2.124b - 0.111b = 2.013b \\ s_{\theta=\pi/2} &= R_{\max} - R_{\theta=\pi/2} = R_{\max} - \frac{9}{11}b \\ &= 2.124b - 0.817b = 1.307b \\ s_{\theta=0} - s_{\theta=\pi/2} &= \frac{70}{99}b \approx 0.706b \end{aligned} \right\} \tag{10.3}$$

十一、用狄卡儿直角坐标方程求曲率半径中心

利用 (3.3) 式也能求出曲率半径中心位置 (α, β) ，有时确实方便。为此，对于具有横切线的曲线一段则适宜用

$$\alpha = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}, \quad \beta = y + \frac{1+y'^2}{y''} \quad (11.1)$$

对于具有竖切线的一段曲线，则适宜于用

$$\alpha = x + \frac{1+x'^2}{x''}, \quad \beta = y - \frac{x'(1+x'^2)}{x''} \quad (11.2)$$

首先可自 $f(x, y) = (x^2 + y^2)^3 - b^2(3y^2 - x^2) = 0$ 依次导出

$$y' \equiv \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x'} \equiv \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \quad (11.3)$$

$$\left. \begin{aligned} y'' &= -\frac{\lambda}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3}, & x'' &= -\frac{\lambda}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^3} \\ \lambda &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (11.4)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2[3(x^2 + y^2)^2 + 2b^2(3y^2 - x^2)]x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 6[(x^2 + y^2)^2 - 2b^2(3y^2 - x^2)]y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 24(x^2 + y^2 + b^2)xy$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6(x^2 + y^2)^2 + 4b^2(3y^2 - x^2) + 8x^2[3(x^2 + y^2) - b^2]$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6(x^2 + y^2)^2 - 12b^2(3y^2 - x^2) + 24y^2[x^2 + y^2 - 3b^2]$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^3 = 8[3(x^2 + y^2)^2 + 2b^2(3y^2 - x^2)]^3 x^3$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3 = 216[(x^2 + y^2)^2 - 2b^2(3y^2 - x^2)]^3 y^3$$

此外，可以验证，在曲线 $y=f(x)$ 上发生最小曲率半径的条件是

$$\left. \begin{aligned} 3 \frac{dx}{dy} \left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2 &= \frac{d^3x}{dy^3} \left[1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right] \\ 3 \frac{dy}{dx} \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 &= \frac{d^3y}{dx^3} \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] \end{aligned} \right\} \quad (11.5)$$

看来, 要想求出渐屈线的公式有如结构 $F(\alpha, \beta) = 0$, 对于此题是不太容易的, 因为 $f(x, y) = 0$ 比较复杂.

十二、曲线的切线、次切线和次法线

仍以 θ 代表极坐标中极向量 ρ 与 x 轴所成之角, τ 是曲线切线与 x 轴所成之角; 从而得 $\tau = \theta + \psi$, 其中 ψ 是极向量 ρ 与切线所成之角; 又从而得切线梯度

$$\tan \tau = \frac{\tan \theta + \rho/\rho'}{1 - \rho \tan \theta / \rho'} \quad (12.1)$$

由于 $\tan \psi = \rho/\rho'$ 与 b 无关, 所以能推论

$$\left(\frac{\tan \tau_1}{\tan \tau_2} \right)_{b_1 \neq b_2} = 1 \quad (12.2)$$

再以 l_{st} 代表次切线长度, 则

$$l_{st} = \rho^2 / \frac{d\rho}{d\theta} = \frac{b(3-4\cos^2\theta)^2}{8\sin\theta\cos\theta} \quad (12.3)$$

从而推定

$$l_{st_1}/l_{st_2} = b_1/b_2 \quad (12.4)$$

以 l_{sn} 代表次法线长度, 则

$$l_{sn} = d\rho/d\theta = 8b \sin\theta \cos\theta \quad (12.5)$$

从而可推定

$$l_{sn_1}/l_{sn_2} = b_1/b_2 \quad (12.6)$$

其中下指标 st 和 sn 各表示次切线和次法线

依同理而得

$$\frac{l_{st_1} + l_{sn_1}}{l_{st_2} + l_{sn_2}} = b_1/b_2 \quad (12.7)$$

十三、新曲线坐标方向的变换

根据解析几何, 既可平移坐标, 又可转动坐标; 从而能把有关的方程变换成较为简便的结构. 本课题的公式已经有其最简单的形式, 因此勿须再作平移变换; 更由于适应应用, 有时需要转动坐标, 例如可使 x 轴与 y 轴互换, 那就得出方程

$$\left. \begin{aligned} \left(y - \frac{x}{2} \right)^2 + x^2 &= \frac{y^2}{4} \\ (x^2 + y^2)^2 &= b(3yx^3 - y^3) \\ (x^2 + y^2)^3 &= b^2(3x^2 - y^2)^2 \end{aligned} \right\} \quad (13.1)$$

这就相当于使用 $\theta - \frac{\pi}{2}$ 来代替原式中的 θ .

对于一般的转动, 可用 $\theta \pm \Phi$ 来代替原式中的 θ , 其中 $0 < \Phi = \text{const.} < 2\pi$, 从而就得

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 &= b \cos(\theta \pm \Phi) = b[\cos \Phi \cos \theta \mp \sin \Phi \sin \theta] \\ \rho_2 &= -b \cos 3(\theta \pm \Phi) = -b[\cos 3\Phi \cos 3\theta \mp \sin 3\Phi \sin 3\theta] \\ \rho &= b[3 - 4\cos^2(\theta \pm \Phi)] = b[3 - 4(\cos \Phi \cos \theta \mp \sin \Phi \sin \theta)^2] \end{aligned} \right\} \quad (13.2)$$

其中比较简便的是用 $\Phi = \pi/2$.

十四、新曲线的两例应用

作者迄今已发现了本文所分析的新曲线的两处应用, 其中一处是属于定性的; 兹略陈述于此.

i)、在内燃机中的应用

众所共知, 平面曲轴在八缸V型内燃机中有其在制造方面的无比优越之处, 但在机器的运行中却引起多阶性的往复惯性力^{[3][4][5][6]}. 在建立平衡方案中, 我们正好遇到(2.1)式, 其曲线就是“径距 $\pm b'$ 的端线”^[6], 为此可参看[6]里的图10, 在那里只用到了曲线的一枝. 依据内燃机的安装和转动朝向, 曲线的其余三枝也都可用到. 这个曲线在应用中应视为与内燃机固连, 意即, 例如在动体中摇动的内燃机, 其径距端线是随着所属内燃机作同步摇动的.

ii)、在量子力学中的应用

在关于氢原子的波函数及其光谱的讨论中, 出现一种很类似这种曲线的一种曲线^{[7][8][9]}. 在文献[7]里, 可能有绘制错误, 应为漏掉了两个小叶. 作者尚未有机会进行必要的探索, 但初步看去, 起码应有定性的近似.

参 考 文 献

1. Smith, P. F., Gale, A. S. and Neelly, J. H., *New Analytic Geometry*, U. S. A.
2. Granville, W. A., *Elements of the Differential and Integral Calculus*, Ginn and Company, U. S. A.
3. 刘先志, 平面曲轴八缸V型内燃机二阶往复惯性力分析平衡法, 力学, 3 (1976).
4. 刘先志, 平面曲轴八缸V型内燃机二阶往复惯性力分析平衡法的图解, 力学, 4 (1976).
5. 刘先志, 平面曲轴八缸V型内燃机二阶往复惯性力二轴平衡法分析, 力学学报, 2 (1978).
6. 刘先志, 平面曲轴八缸V型内燃机二阶往复惯性力二轴平衡法直接推导及其滑块平衡方案, 应用数学和力学, 1, 2 (1980).
7. Blochinzew, D. I., *Grundlagen der Quantem Mechanik*, Berlin, (1958), 171.
8. Moelwyn-Hughes, *Physical Chemistry*, London, (1961), 171.
9. Slater, John C., *Quantem Theory of Matter*, U. S. A., (1953), 119.

Some Essential Features and Its Several Applications of a Degenerated Four-Leaved Rose Curve

Liu Hsien-chih

(Shandong Institute of Technology, Jinan, Shandong)

Abstract

This paper reports the investigation of possibly a new curve which the author has met in mechanics research, since he has hitherto not yet found it in the most popular mathematical literature, nevertheless the references, which we have read, is rather limited for anybody. Besides some noticeable properties of the curve, we have given only two instances which the author, by chance, has met personally in technical literature although in these cases there still fails a detailed account from a mathematical point of view.