

一类含幅、相等式的非线性方程组的 线性化及其应用*

胡 锡 恒

(重庆大学自动化系, 1981年12月15日收到)

摘 要

一类有理分式复函数 $G(j\omega) = \frac{1+a_1j\omega+a_2(j\omega)^2+\dots+a_m(j\omega)^m}{b_0+b_1j\omega+b_2(j\omega)^2+\dots+b_n(j\omega)^n}$ 常被用来描述系统的性能. 当其有关的幅值(模)和相角(幅角)的数据能获取时, 可以对 $G(j\omega)$ 进行综合. 诸未知系数 a_i 及 $b_i (i=0, 1, \dots, m, \dots, n)$ 将通过解一类含幅、相等式的非线性代数方程组

$$\left. \begin{aligned} |G(j\omega_i)| &= g_i \\ \angle G(j\omega_i) &= \theta_i \end{aligned} \right\} \quad i=1, 2, \dots, r.$$

求取. 然而, 迄今为止, 解这类方程组被认为是十分困难的, 只能依赖计算机专用程序软件求数值解, 而且事先必须用复杂的方法确定一组充分接近精确解的初值^[1]. 本文通过简单的数学处理, 将这类非线性方程组完全线性化为同维的线性方程组, 从而得以直接解. 此法还可以推广到分母含纯 $(j\omega)$ 因子和 $e^{-j\omega\tau}$ 因子的系统. 文章最后通过例子简介了这种方法在控制工程领域的应用.

一、引 言

动态系统数学模型的建模方法, 在控制理论和工程应用上占有重要地位. 在能源、生物工程、化工等领域, 对于一个系统, 往往可以通过实验或其他手段获得一组系统的频率响应数据(频率 ω_i , 幅值 g_i 、相角 θ_i , $i=1, 2, \dots, r$), 即系统的幅相特性. 如何从这些数据综合出系统的数学模型

$$G(s) = \frac{1+a_1s+a_2s^2+\dots+a_ms^m}{b_0+b_1s+b_2s^2+\dots+b_ns^n} \quad (1.1)$$

或
$$G(j\omega) = \frac{1+a_1(j\omega)+a_2(j\omega)^2+\dots+a_m(j\omega)^m}{b_0+b_1(j\omega)+b_2(j\omega)^2+\dots+b_n(j\omega)^n} \quad (1.2)$$

$$m \leq n, \quad m+n+1=2r$$

* 杨绪灿推荐.

这是建模工作的核心问题之一。以往,对这个问题已经进行了大量富有成果的研究,提出了众多的方法。但这些方法都大多无法摆脱繁琐的数学运算,这不仅仅增加了计算工作量,而且,更重要的是,复杂的运算往往容易掩盖系统的物理本质,给进一步分析造成困难。是否存在一种既有鲜明的物理概念,能灵活地在所需的点(频段)精确拟合,而又简明易行的建模方法呢?这正是本文所要探讨的问题。

如果我们能从系统的幅相特性出发,按需要有选择地进行多点拟合,就能综合出一个较为满意的数学模型。然而,这就必须解一类含复函数(1.2)的幅、相等式的方程组

$$|G(j\omega_i)| = g_i \quad (1.3a)$$

$$\angle G(j\omega_i) = \theta_i \quad i=1, 2, \dots, r \quad (1.3b)$$

这是一类电子、电工理论,控制理论中常用的非线性代数方程组。近年来所提出的一些新的系统简化方法^[8,9,10]中都多要用到它们。

迄今为止,虽然对非线性代数方程组的可解性分析和有效解法的研究方面作了大量有意义的工作^[1,2],但从理论和解法的实用性上看,仍远不如线性方程组那么成熟和有效。以往,正如文献[9]中所指出的,解这类方程组是十分困难的,只能依赖计算机专用程序软件^[6]求数值解。如各种 Newton 迭代法、最速下降法^[1,2,4]等。较常用的是 Newton 法。但这种方法收敛域很小,必须事先选取一组充分接近精确解的初值。[9]用了大量篇幅来讨论初值的选取问题。可见,仅仅是选初值本身,就是十分复杂的计算。当方程组的维数升高时,其困难程度将成倍地增加。

因此,如果能将这类常用的非线性代数方程组直接求解,无论对建模的计算工作还是理论分析,无疑是很有意义的。

作者正是基于这一点,通过简单的数学处理,将相位条件(1.3b)引入幅值条件(1.3a),进而将这 $2r$ 维非线性代数方程组(1.3)变换为同维线性方程组,从而得以直接解。文章还推广了其他一些派生形式。最后简介了这种建模方法在控制工程领域的应用。

二、基本公式推导

在电子、自动控制工程领域,动态系统的特性,常常用传递函数描述。所谓传递函数,就是初始条件为零时,系统输出量(响应函数)的拉普拉斯变换,与输入量(驱动函数)的拉普拉斯变换之比。一般可表为一个含复变数 s 的有理分式复函数

$$G(s) = \frac{1 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_m s^m}{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_n s^n} = \frac{P(s)}{Q(s)} \quad (2.1)$$

用纯虚数 $j\omega$ 来代替式(2.1)中的 s 时,就是系统的频率特性。工程上, ω 代表角频率,系实数,而 $j = \sqrt{-1}$ 。这时有

$$G(j\omega) = \frac{1 + a_1(j\omega) + a_2(j\omega)^2 + \dots + a_m(j\omega)^m}{b_0 + b_1(j\omega) + b_2(j\omega)^2 + \dots + b_n(j\omega)^n} = \frac{P(j\omega)}{Q(j\omega)} \quad (2.2)$$

$$m \leq n$$

其中 $a_1, a_2, \dots, a_m, b_0, b_1, \dots, b_n$ 均系实数,且 $m+n+1=2r$ 。

当 $G(s)$ 或 $(j\omega)$ 的诸系数未知,而要通过系统在 r 个频率点 (ω_i) 的频率响应数据(幅值

g 和相角 θ_i) 来建立系统的数学模型(2.1)时, 这 $m+n+1=2r$ 个未知系数可由非线性代数方程组(1.3)求取. 即

$$|G(j\omega_i)| = g, \quad g_i \neq 0 \quad (2.3)$$

$$\angle G(j\omega_i) = \theta_i, \quad i=1, 2, \dots, r. \quad (2.4)$$

式(2.3)可表为

$$|G(j\omega_i)| = \frac{|P(j\omega_i)|}{|Q(j\omega_i)|} = \frac{\text{Im}[P(j\omega_i)]/\sin\angle P(j\omega_i)}{\text{Im}[Q(j\omega_i)]/\sin\angle Q(j\omega_i)} = g_i, \quad i=1, 2, \dots, r \quad (2.5)$$

式中 $\text{Im}[P(j\omega_i)]$, $\angle P(j\omega_i)$, $\text{Im}[Q(j\omega_i)]$, $\angle Q(j\omega_i)$ 等分别是 $G(j\omega)$ 分子、分母复多项式在频率 ω_i 处的虚部和幅角. 为简明起见, 这类符号以下表为 $\text{Im}[P_i]$ 、 $\angle P_i$ 等.

注意到 $\angle G_i = \angle P_i - \angle Q_i = \theta_i$, 即

$$\angle Q_i = \angle P_i - \theta_i \quad (2.6)$$

以及

$$\text{ctg}\angle P_i = \text{Re}[P_i]/\text{Im}[P_i] \quad (2.7)$$

将(2.6)、(2.7)代入(2.5):

$$\begin{aligned} |G(j\omega_i)| &= \frac{\text{Im}[P_i]\sin(\angle P_i - \theta_i)}{\text{Im}[Q_i]\sin\angle P_i} \\ &= \frac{\text{Im}[P_i]}{\text{Im}[Q_i]} (\cos\theta_i - \text{ctg}\angle P_i \sin\theta_i) \\ &= \frac{\text{Im}[P_i]}{\text{Im}[Q_i]} \left(\cos\theta_i - \frac{\text{Re}[P_i]}{\text{Im}[P_i]} \sin\theta_i \right) = g_i \end{aligned}$$

整理得

$$\cos\theta_i \text{Im}[P_i] - \sin\theta_i (\text{Re}[P_i] - \text{Im}[Q_i]) - g_i \text{Im}[Q_i] = \sin\theta_i \text{Im}[Q_i], \quad i=1, 2, \dots, r \quad (2.8)$$

同理, 式(2.3)又可表为

$$|G_i| = \frac{|P_i|}{|Q_i|} = \frac{\text{Im}[P_i]/\sin\angle P_i}{\text{Re}[Q_i]/\cos\angle Q_i} = g_i \quad (2.9)$$

和式(2.6)、(2.7)联立并整理得

$$\sin\theta_i \text{Im}[P_i] + \cos\theta_i (\text{Re}[P_i] - \text{Im}[Q_i]) - g_i \text{Re}[Q_i] = -\cos\theta_i \text{Re}[Q_i], \quad i=1, 2, \dots, r \quad (2.10)$$

这里, $\text{Im}[P_i]$, $\text{Re}[P_i]$, $\text{Im}[Q_i]$, $\text{Re}[Q_i]$ 均为未知系数 $a_1, a_2, \dots, a_m, b_0, b_1, \dots, b_n$ 的线性组合. 不妨设 m 为奇数, n 为偶数 ($\because m+n+1=2r$), 则

$$\left. \begin{aligned} \text{Im}[P_i] &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2k}}^m (-1)^{\frac{j-1}{2}} \omega^j a_j \\ \text{Re}[P_i] &= \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq 2k+1}}^{m-1} (-1)^{\frac{j}{2}} \omega^j a_{j+1} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Im}[Q_i] &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2k}}^{n-1} (-1)^{\frac{j-1}{2}} \omega_i^j b_j \\ \operatorname{Re}[\theta_i] &= \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq 2k+1}}^n (-1)^{\frac{j}{2}} \omega_i^j b_j \\ i &= 1, 2, \dots, r. \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

至此, 式(2.8), (2.10)实际上已经成功地将 $2r$ 维非线性方程组(2.3), (2.4)完全线性化. 将式(2.11)代入(2.8), (2.10)并展开, 得

$$\left. \begin{aligned} \cos\theta_i(\omega_i a_1 - \omega_i^3 a_3 + \dots) - \sin\theta_i(-\omega_i^2 a_2 + \omega_i^4 a_4 + \dots) \\ - g_i(\omega_i b_1 - \omega_i^3 b_3 + \dots) = \sin\theta_i \\ \sin\theta_i(\omega_i a_1 - \omega_i^3 a_3 + \dots) + \cos\theta_i(-\omega_i^2 a_2 + \omega_i^4 a_4 + \dots) \\ - g_i(b_0 - \omega_i^2 b_2 + \omega_i^4 b_4 + \dots) = -\cos\theta_i \\ i = 1, 2, \dots, r \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

表为矩阵形式

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} \omega_1 \cos\theta_1 & \omega_1^2 \sin\theta_1 & -\omega_1^3 \cos\theta_1 & -\omega_1^4 \sin\theta_1 & \dots & 0 & -\omega_1 g_1 & 0 & \omega_1^3 g_1 \dots \\ \omega_2 \cos\theta_2 & \omega_2^2 \sin\theta_2 & -\omega_2^3 \cos\theta_2 & -\omega_2^4 \sin\theta_2 & \dots & 0 & -\omega_2 g_2 & 0 & \omega_2^3 g_2 \dots \\ & \dots & & & & & \dots & & \\ \omega_r \cos\theta_r & \omega_r^2 \sin\theta_r & -\omega_r^3 \cos\theta_r & -\omega_r^4 \sin\theta_r & \dots & 0 & -\omega_r g_r & 0 & \omega_r^3 g_r \dots \\ \hline \omega_1 \sin\theta_1 & -\omega_1^2 \cos\theta_1 & -\omega_1^3 \sin\theta_1 & -\omega_1^4 \cos\theta_1 & \dots & -g_1 & 0 & \omega_1^2 g_1 & 0 & \dots \\ \omega_2 \sin\theta_2 & -\omega_2^2 \cos\theta_2 & -\omega_2^3 \sin\theta_2 & \omega_2^4 \cos\theta_2 & \dots & -g_2 & 0 & \omega_2^2 g_2 & 0 & \dots \\ & \dots & & & & \dots & & & & \\ \omega_r \sin\theta_r & -\omega_r^2 \cos\theta_r & -\omega_r^3 \sin\theta_r & \omega_r^4 \cos\theta_r & \dots & -g_r & 0 & \omega_r^2 g_r & 0 & \dots \end{array} \right] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \\ b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta_1 \\ \sin\theta_2 \\ \vdots \\ \sin\theta_r \\ \hline -\cos\theta_1 \\ -\cos\theta_2 \\ \vdots \\ -\cos\theta_r \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

其分块形式为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{A}_2 & \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}_{n+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \end{bmatrix}_r \quad (2.14)$$

系数矩阵 $\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{A}_2 & \mathbf{B}_2 \end{bmatrix}$ 和常数矩阵 $\begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \end{bmatrix}$ 均可由已知条件 ω_i, g_i, θ_i 直接列出, 其原素排

列十分整齐而有规律. 式(2.12)或(2.13)的表达形式已经很易于编程序计算.

最后作几点说明:

1. 由式(2.13)易看出, 除 $\omega_i=0$ 外, 一般情况下系统矩阵是非奇异的, 即(2.13)有唯一解:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{A}_2 & \mathbf{B}_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

2. 在上述推导过程中, 当 $\text{Im}[P_i]=0$ 时, $\text{ctg}\angle P_i=\infty$. 但这时, $\text{Re}[P_i]$ 必不为0, 否则 $|P_i|$ 为0. (这种情况可作特殊处理, 在此不作一般性讨论.) 因此, 这时可用

$$\left. \begin{aligned} |G(j\omega_i)| &= \frac{\text{Re}[P_i]/\cos\angle P_i}{\text{Im}[Q_i]/\sin\angle Q_i} = g_i \\ |G(j\omega_i)| &= \frac{\text{Re}[P_i]/\cos\angle P_i}{\text{Re}[Q_i]/\cos\angle Q_i} = g_i \\ \angle Q_i &= \angle P_i - \theta_i \\ \text{tg}\angle P_i &= \text{Im}[P_i]/\text{Re}[P_i] \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

进行推导. 其结果与(2.12), (2.13)完全相同.

3. 对于非最小相位系统, $|G(j\omega)|$ 与 $\angle G(j\omega)$ 之间存在着一一对应的关系. $G(j\omega)$ 在任意频率 ω_i 下的相角可以由下式决定^[12]:

$$\angle G(j\omega_i) = -\frac{2\omega_i}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\alpha(\omega) - \alpha(\omega_i)}{\omega^2 - \omega_i^2} d\omega \quad (2.17)$$

$$\text{其中} \quad \alpha(\omega) = -\ln|G(j\omega)| \quad (2.18)$$

式(2.17)积分收敛的条件为帕利-维纳(Paley-Wiener)条件成立, 即

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln|G(j\omega)||}{1+\omega^2} d\omega < \infty \quad (2.19)$$

因此, 在最小相位条件下, 如果我们只知道 $|G(j\omega)|$ (或 $\angle G(j\omega)$), 就可以通过式(2.17)导出 $\angle G(j\omega)$ (或 $|G(j\omega)|$), 进而通过式(2.13)综合出 $G(j\omega)$ 来.

三、其他派生形式

1. 如果系统传递函数分母中含有纯 s 因子, 如

$$G(s) = \frac{1 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_ms^m}{s^l(b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_ns^n)} = \frac{P(s)}{Q(s)} \quad (3.1)$$

即控制理论中的 l 型系统. 这时式(2.12)和(2.13)的形式并不改变, 仅由于 $\text{Im}[Q_i]$, $\text{Re}[Q_i]$ 变化而变动系数子矩阵 \mathbf{B}_1 , \mathbf{B}_2 元素的排列及其 ω_i 的幂次而已.

2. 在化工、能源和生物工程领域, 常常遇到有较大滞后的系统, 其传递函数里, 含有纯延迟因子 $e^{-s\tau_0}$:

$$\begin{aligned} G'(s) &= \frac{1 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_ms^m}{b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_ns^n} e^{-s\tau_0} \\ &= G(s) \cdot e^{-s\tau_0} \end{aligned} \quad (3.2)$$

这时, $\because |e^{-j\omega_i\tau_0}| = 1$

$$\angle e^{-j\omega_i\tau_0} = -\omega_i\tau_0$$

$$\therefore |G'(j\omega_i)| = |G(j\omega_i)| \cdot |e^{-j\omega_i\tau_0}| = |G(j\omega_i)| = g, \quad (3.3)$$

$$\angle G'(j\omega_i) = \angle G(j\omega_i) + \angle e^{-j\omega_i\tau_0} = \theta_i - \omega_i\tau_0 = \theta'_i \quad (3.4)$$

$$\text{或} \quad \theta_i = \theta'_i + \omega_i\tau_0 \quad (3.4)'$$

也就是说, $G'(j\omega)$ 与 $G(j\omega)$ 有相同的幅值, 而相角增加 $-\omega_i\tau_0$. 因此, 对于式(3.2)的 $G'(j\omega)$, 非线性方程组

$$\left. \begin{aligned} |G'(j\omega_i)| &= g, \\ \angle G'(j\omega_i) &= \theta'_i \quad i=1, 2, \dots, r \end{aligned} \right\}$$

的完全线性化解就是式(2.12)和(3.4)', 即

$$\left. \begin{aligned} \cos\theta_i(\omega_i a_1 - \omega_i^3 a_3 + \dots) - \sin\theta_i(-\omega_i^2 a_2 + \omega_i^4 a_4 + \dots) \\ - g_i(\omega_i b_1 - \omega_i^3 b_3 + \dots) &= \sin\theta_i, \\ \sin\theta_i(\omega_i a_1 - \omega_i^3 a_3 + \dots) + \cos\theta_i(-\omega_i^2 a_2 + \omega_i^4 a_4 + \dots) \\ - g_i(b_0 - \omega_i^2 b_2 + \omega_i^4 b_4 + \dots) &= -\cos\theta_i, \\ \theta_i &= \theta'_i + \omega_i \tau_0 \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

$$i=1, 2, \dots, r$$

其中 τ_0 可由系统特性得到

四、应用举例

这一类含幅、相等式的非线性方程组的直接解, 完全摆脱了烦杂的非线性数值计算, 不仅使一些原有的过于复杂而难以工程化的系统建模方法得到新的生命力, 而且, 由于对线性方程组的分析方法远比非线性方程组简单和完善, 就使我们得以从理论上对系统各参数间的相互关系及其对系统性能的影响进行更深入的分析, 可能会导至一些新方法的出现. 例如在控制系统工程方面, 如果所研究的对象是实际系统或其物理模型, 从实验测出数据后建模, 这属于测辨问题; 如果给定的是系统的高阶模型, 要用低阶模型去逼近它, 则属于简化问题; 如果给出了设计的频域指标(或可化为频域指标的时域指标), 需要建立所谓“目标模型”, 则属于设计问题. 本方法在上述各领域都有应用, 我们将专文另述. 在此, 仅以一个简单的系统简化例子作说明.

例: 已知系统

$$G(s) = \frac{28s^3 + 496s^2 + 1800s + 2400}{2s^4 + 36s^3 + 204s^2 + 360s + 240} \quad (4.1)$$

求其二阶简化模型.

这是系统简化领域里一个有名的算例. Hutton(1975), Shamash(1975), Appiah(1977), 及文献[8](1980)等在论文中都用到它.

设其二阶简化模型为

$$R_{(1,2)}(s) = \frac{k(1+a_1s)}{1+b_1s+b_2s^2} \quad (4.2)$$

取 $R_{(1,2)}$ 与原模型有相同的稳态增益和等效时滞^[11], 即

$$\left. \begin{aligned} k &= \kappa = 10 \\ D &= b_1 - a_1 = 0.75 \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

使 $R_{(1,2)}(s)$ 与原系统 $G(s)$ 在某频率点拟合, 则得 $R_{(1,2)}$ 的非线性拟合方程组

$$\left. \begin{aligned} |R_{(1,2)}| &= g \\ \angle R_{(1,2)} &= \theta \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

由公式(2.13), 将(4.4)线性化, 且令

$$g' = \frac{g}{k}, \quad \text{得}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \omega \cos \theta & 0 & -\omega g' & 0 \\ \omega \sin \theta & -g' & 0 & \omega^2 g' \end{array} \right] \begin{bmatrix} a_1 \\ b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{bmatrix}$$

这里 $b_0 = 1$

$$\left. \begin{aligned} (\omega \cos \theta) a_1 - \omega g' b_1 &= \sin \theta \\ (\omega \sin \theta) a_1 + \omega^2 g' b_2 &= -g' - \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

与(4.3)联立, 就得出一组形如式(4.2)的低阶模型参数的递推解析公式:

$$\left. \begin{aligned} k &= \kappa \\ a_1 &= \frac{k \sin \theta + D \omega g}{\omega k \cos \theta - \omega g} \\ b_1 &= a_1 + D \\ b_2 &= \frac{1}{\omega^2} - \frac{k}{\omega^2 g} (\cos \theta + \omega \sin \theta \cdot a_1) \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

显然, 这是一组极其简单、方便易行的建模公式.

如果为了适于闭环设计, 使 $R_{(1,2)}$ 与原系统具有相同的相对稳定性, 在增益交界频率 $\omega_c = 14.87 \text{ rad/s}$ 处与原系统拟合. 即 $g_c = 1$, $\theta_c = -83.735^\circ$, 由(4.6)得

$$R_{(1,2)}^c(s) = \frac{10(1 + 0.8932s)}{1 + 1.6432s + 0.5967s^2} \quad (4.7)$$

若在带宽 $\omega_b = 1.25 \text{ rad/s}$ 处拟合, $g_b = 7.06123$, $\theta_b = -47.51857^\circ$, 由(4.6)得

$$R_{(1,2)}^b(s) = \frac{10(1 + 1.9630s)}{1 + 2.7130s + 1.6680s^2} \quad (4.8)$$

Hutton 等应用 Pade' 逼近法或连分式法化简本例, 得到相同的结果

$$R_{(1,2)}^H(s) = \frac{30s + 40}{3s^2 + 6s + 4} \quad (4.9)$$

现将原系统和各种方法简化的结果 $R_{(1,2)}^b(s)$ 及 $R_{(1,2)}^H(s)$ 的 Nyquist 曲线表于图 1.

作者衷心感谢导师周其鉴教授的关怀和鼓励. 整个研究工作始终在周先生指导下进行, 最后, 他又仔细审阅并多次批改了全文.

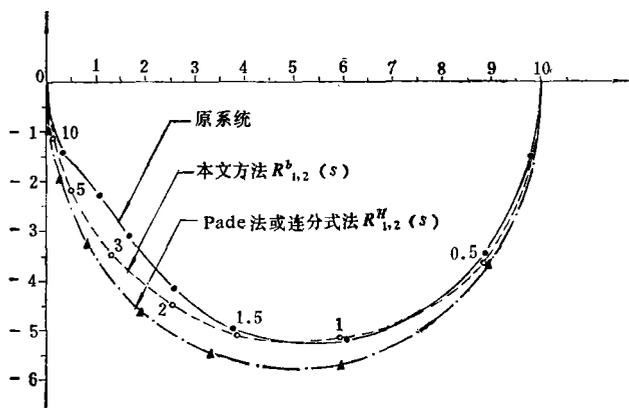


图1 原系统及各种简化模型比较

李祖枢老师也给予了支持，提出了很好的意见。陈今润、张大枢复核了全部推导和公式。在此，作者向他们一并表示感谢。

最后，作者对重庆大学副校长杨绪灿教授在百忙中抽时间仔细审阅并推荐本文表示由衷的感谢。

参 考 文 献

1. Ortega, J. M. and Rheinboldt, W. C., *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*, Academic Press, New York (1970).
2. 王德人, 《非线性方程组解法与最优化方法》, 人民教育出版社, (1979).
3. 冯康等, 《数值计算方法》, 国防工业出版社 (1978), 359—366, 379—389.
4. Broyden, C. G., Dennis, J. E. and More, J. J., On the local superlinear convergence of Quasi-Newton methods, *J. Inst. Maths. Applics.*, 12,13 (1973).
5. Fielding, K., Algorithm 387, Function minimization and linear search, *CACM*, 13 (1970), 509—510.
6. 张启人, 大系统模型降阶理论, 信息与控制, 9, 4 (1980), 2—25.
7. Bosley, M. J. and Lees, F. P., A survey of simple transfer-function derivations from high order state-variable models, *Automatica*, 8 (1972), 765—775.
8. 周其鉴, 李祖枢, 数学模型简化及其在工程系统中的应用, 重庆大学学报, 4 (1980).
9. Shieh, L. S., Datta-Barua, M. and Yates, R. E., A method for modelling transfer function using dominant frequency-response data and its applications, *Int. J. Systems Sci.* 10, 10 (1979), 1097—1114.
10. Marshall, S. A., The design of reduced-order system, *Int. J. Control.*, 31, 4(1980), 677—690.
11. 松原正一, 等価な時間について, 计測と制御, 3, 6 (1964), 440—446.

The Linearization of Certain Class of Nonlinear Simultaneous Equation Set Containing Amplitude and Phase Frequency Characteristics and Application

Hu Xi-heng

(Chongqing University, Chongqing)

Abstract

A class of complex function of rational fraction type

$$G(j\omega) = \frac{1 + a_1 j\omega + a_2 (j\omega)^2 + \dots + a_m (j\omega)^m}{b_0 + b_1 j\omega + b_2 (j\omega)^2 + \dots + b_n (j\omega)^n}$$

is frequently used to describe dynamical properties of systems. It is however quite difficult to establish a mathematical model of this type on the basis of amplitude and phase frequency data collected from experiments conducted on the related physical system. Since the erection of mathematical model $G(j\omega)$ would involve the solution of a set of nonlinear simultaneous equations

$$\left. \begin{aligned} |G(j\omega_i)| &= g_i \\ \angle G(j\omega_i) &= \theta_i \end{aligned} \right\} \quad i=1, 2, \dots, r.$$

with the unknown coefficients a_s and b_s ($s=0, 1, \dots, m, n$) in $G(j\omega)$. Up to now, these nonlinear equations have been considered to be very difficult to solve directly. In spite of the fact there are special computer programmes in certain software packages available to tackle this problem, it is by no means an easy task due to the complex procedures involved in picking up a set of initial values that would be close enough to the exact solutions. This paper proposes a simplified method of linearising these nonlinear equations set so that direct solution is possible. The method can also be applied to systems with factors of $(j\omega)$ and $e^{-j\omega T_0}$ in $G(j\omega)$. An illustration by a worked example is furnished at the end of the paper to show its versatility.