

以 Kirchhoff 薄板理论解狭长矩形 截面杆的约束扭转

张 福 范

(清华大学, 1982年1月6日收到)

摘 要

本文以 Kirchhoff 的薄板理论, 解狭长矩形截面杆的约束扭转. 这扭转问题, 相当于在自由端作用扭矩的悬臂矩形板的弯曲. 得到的结果, 不仅证实了 Timoshenko 教授以能量法所得的扭转角, 并且也给出应力的值.

一、引 言

Saint-Venant 的扭转理论对变形有两个前提. 一是与圆轴的情形相同, 横截面各转了一角度; 一是所有横截面有相同的翘曲. 于是在横截面内只产生剪应力, 形成一力扭以平衡杆端的扭矩. 但正如常发生的, 由于某些约束, 不能产生均匀翘曲. 例如杆的一端固定, 而在自由端作用一扭矩 (图 1). 因而不仅固定端截面不可能有翘曲, 并且邻近的截面亦不能自由翘曲. 因此, 除剪应力外, 不均匀的翘曲将在横截面内形成自相平衡的正应力. 这种扭转称为约束扭转.

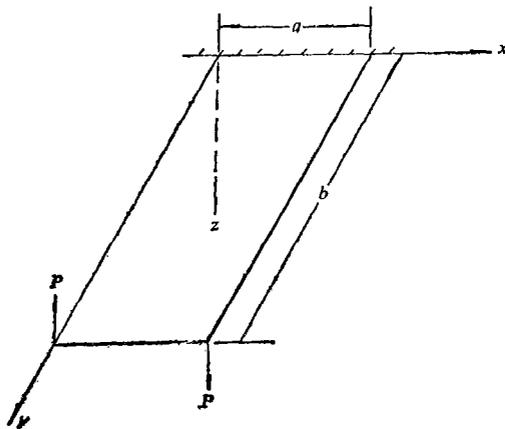


图 1

在弹性理论中, 约束扭转是个难题, 并无精确的解. Timoshenko 教授曾以能量法解狭长矩形截面这问题, 并得到自由端的扭转角.

在弹性理论中, 约束扭转是个难题, 并无精确的解. Timoshenko 教授曾以能量法解狭长矩形截面这问题, 并得到自由端的扭转角.

A. Fopple 亦以能量法作出狭长椭圆截面的解, 并以此对狭长矩形截面这情形作估算.

在 Kirchhoff 薄板理论与 Saint-Venant 的扭转之间, 看来并无明显的联系. 但我们可以用 Kirchhoff 的薄板理论, 解狭长矩形截面杆的约束扭转. 因这扭转问题, 相当于一悬臂矩形板在自由端作用一扭矩的弯曲问题. 所得的结果, 不仅证实了 Timoshenko 教授得到的扭转角, 并对几个横截面给出剪应力, 以及在固定端截面内的自相平衡的正应力. 同时也证明: 固定端的约束的影响消失很快; 离固定端较远的截面, 各自转一角度, 只对较近的

横截面,才稍微发生弯曲.并且,对于离固定端较远的横截面,其剪应力的分布与 Saint Venant 的解相同.

二、叠加的几个部份

我们用叠加法解悬臂矩形板的弯曲,从而获得狭长矩形截面杆的约束扭转的解.叠加的组成部分为:

(1) 一矩形板,三边为简支边,而 $y=b$ 这为广义简支边,沿边的挠度为(图 2):

$$(W)_{y=b} = \sum_{m=2,4,\dots} a_m \sin \frac{m\pi x}{a}$$

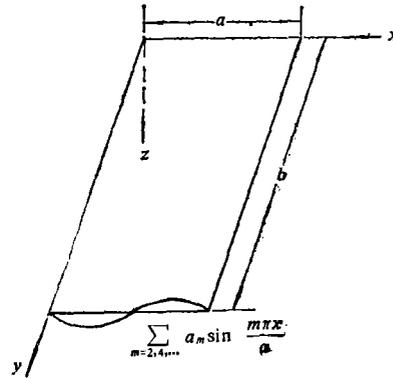


图 2

式中的 a_m 为待定常数,并且挠度曲线与边的中点为反对称.板的弯曲面为:

$$W = \frac{1-\mu}{2} \sum_{m=2,4,\dots} \frac{a_m}{\sinh \alpha_m} \left\{ \left(\frac{2}{1-\mu} + \alpha_m \coth \alpha_m \right) \sinh \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a} \right\} \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (2.1)$$

式中的 $\alpha_m = \frac{m\pi b}{a}$.

由上式,得沿 $y=b$ 这边的剪力 V_y 为:

$$(V_y)_{y=b} = \frac{D}{2} (1-\mu^2) \sum_{m=2,4,\dots} \frac{m^3 \pi^3}{a^3} a_m \left(\frac{\alpha_m}{\sinh^2 \alpha_m} + \frac{3+\mu}{1-\mu} \coth \alpha_m \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (2.2)$$

沿 $x=a$ 这边的剪力 V_x 为:

$$(V_x)_{x=a} = -2D(1-\mu)^2 \frac{\pi^2}{a^3} \sum_{i=1} \sum_{m=2,4,\dots} \frac{a_m}{m} \cdot \frac{i^3 \cos i\pi}{\left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{i^2}{m^2} \right)^2} \sin \frac{i\pi y}{b} \quad (2.3)$$

沿 $y=0$ 这边的斜率为:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{1-\mu}{2a} \pi \sum_{m=2,4,\dots} \frac{m a_m}{\sinh \alpha_m} \left(\frac{1+\mu}{1-\mu} + \alpha_m \coth \alpha_m \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (2.4)$$

作用于板角点 (a,b) 的集中力为:

$$(R)_{a,b} = D(1-\mu)^2 \frac{\pi^2}{a^2} \sum_{m=2,4,\dots} m^2 a_m \left(\frac{1+\mu}{1-\mu} \coth \alpha_m + \frac{\alpha_m}{\sinh^2 \alpha_m} \right) \quad (2.5)$$

(2) 叠加的第二部分为:

有一矩形板,沿 $y=0$, $y=b$ 这两边为简支边. $x=0$, $x=a$ 这两边为广义简支边.它们的挠度为反对称(图 3) $(W)_{x=0} = \pm \sum_{i=1} C_i \sin \frac{i\pi y}{b}$.

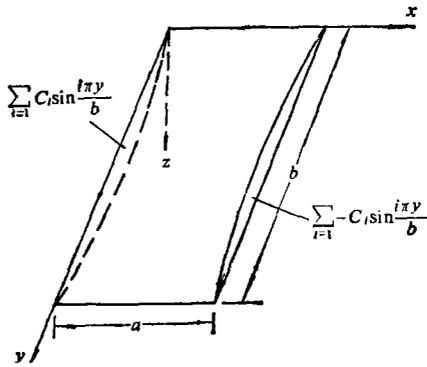


图 3

板弯曲面的方程为:

$$W = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \left\{ \frac{1 + \cosh \beta_i}{\sinh \beta_i} \left[\frac{1 - \mu}{2} \frac{i\pi x}{b} \cosh \frac{i\pi x}{b} - \left(1 + \frac{1 - \mu}{2} \frac{\beta_i}{\sinh \beta_i} \right) \sinh \frac{i\pi x}{b} \right] + \cosh \frac{i\pi x}{b} - \frac{1 - \mu}{2} \cdot \frac{i\pi x}{b} \sinh \frac{i\pi x}{b} \right\} \sin \frac{i\pi y}{b} \quad (2.6)$$

式中的 $\beta_i = \frac{i\pi a}{b}$. 并得以下诸算式:

$$(V_x)_{x=a} = -D(1-\mu)^2 \frac{\pi^3}{2b^3} \sum_{i=1}^{\infty} i^3 C_i \frac{1 + \cosh \beta_i}{\sinh \beta_i} \left(\frac{3 + \mu}{1 - \mu} + \frac{\beta_i}{\sinh \beta_i} \right) \sin \frac{i\pi y}{b} \quad (2.7)$$

$$(V_y)_{y=b} = \frac{4D(1-\mu)^2}{b^3} \pi^2 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{m=2,4,\dots} \frac{m^3 C_i \cos i\pi}{i \left(\frac{m^2}{i^2} + \frac{a^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (2.8)$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{4}{b} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{m=2,4,\dots} C_i \frac{m \left[\frac{m^2}{i^2} + (2-\mu) \frac{a^2}{b^2} \right]}{i \left(\frac{m^2}{i^2} + \frac{a^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (2.9)$$

$$(R)_{y=b} = -D(1-\mu^2) \frac{\pi^2}{b^2} \sum_{i=1}^{\infty} i^2 C_i \cos i\pi \left(\frac{1 + \mu}{1 - \mu} + \frac{\beta_i}{\sinh \beta_i} \right) \left(\frac{1}{\sinh \beta_i} + \coth \beta_i \right) \quad (2.10)$$

(3) 叠加的第三部分为:

有一四边简支边的矩形板, 在 $y=0$ 这边作用反对称的分布弯矩(图 4).

$$M(x) = \sum_{m=2,4,\dots} E_m \sin \frac{m\pi x}{a}$$

有以下几个有用的算式:

$$W = \frac{a^2}{2D\pi^2} \sum_{m=2,4,\dots} \frac{E_m}{m^2} \left[-\frac{\alpha_m}{\sinh^2 \alpha_m} \cdot \sinh \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} \right]$$

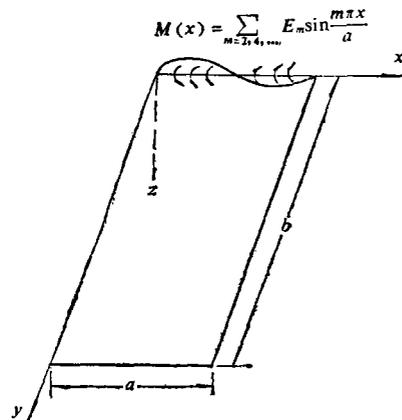


图 4

$$+\coth \alpha_m \frac{m\pi y}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a} \Big] \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (2.11)$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{a}{2D\pi} \sum_{m=2,4,\dots} \frac{E_m}{m} \left(\coth \alpha_m - \frac{\alpha_m}{\sinh^2 \alpha_m}\right) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (2.12)$$

$$(V_y)_{y=b} = -\frac{\pi}{2a}(1+\mu) \sum_{m=2,4,\dots} \frac{mE_m}{\sinh \alpha_m} \left(1 + \frac{1-\mu}{1+\mu} \alpha_m \coth \alpha_m\right) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (2.13)$$

$$(V_x)_{x=0} = \frac{2}{a} \sum_{m=2,4,\dots} \sum_{i=1} \frac{E_m i \left[\frac{b^2}{a^2} + (2-\mu) \frac{i^2}{m^2} \right]}{m \left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{i^2}{m^2} \right)^2} \sin \frac{i\pi y}{b} \quad (2.14)$$

$$(R)_{y,b} = -(1-\mu) \sum_{m=2,4,\dots} \frac{E_m}{\sinh \alpha_m} (\alpha_m \coth \alpha_m - 1) \quad (2.15)$$

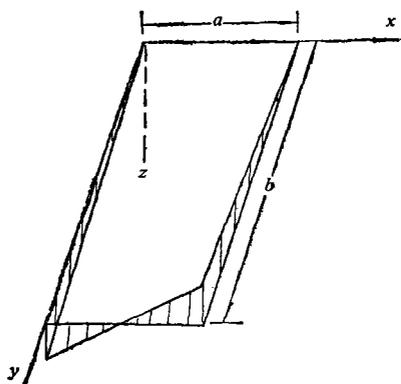


图 5

(4) 叠加的第四部分.

由于以上这三部分仍保持板的角点 (a, b) , $(0, b)$ 无位移, 为了适合扭转所产生的变形, 叠加图 5 所示这部分:

$$W = ky \left(-\frac{a}{2} - x \right) \quad (2.16)$$

式中的 k 为一待定常数, 并得到:

$$\frac{\partial W}{\partial y} = k \left(\frac{a}{2} - x \right) = \frac{2ka}{\pi} \sum_{m=2,4,\dots} \frac{1}{m} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (2.17)$$

$$R = 2D(1-\mu) \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = -2D(1-\mu)k \quad (2.18)$$

由于以上这四部分均满足薄板弯曲的微分方程, 将它们叠加而能满足所有的边界条件与自由角点条件, 则所得的解应是 Kirchhoff 薄板理论的精确解.

三、以 Kirchhoff 薄板理论解狭长矩形截面杆的约束扭转

设有一狭长矩形截面杆, $y=0$ 这端为固定, 而在自由端作用一力偶, 使杆扭转. 这相当于一悬臂矩形板的弯曲(图 1). 这板的边界条件, 应满足 $y=0$ 这边为固定边的 $\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)=0$, 而其他各边为自由边, 剪力与弯矩均为零. 同时, 两角点 (a, b) 与 $(0, b)$ 为自由角点. 由于叠加的各部分, 沿边的弯矩均为零, 故只须消去剪力即得自由边.

由于沿固定边 $\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_{y=0}=0$, 叠加算式(2.4), (2.9), (2.12), (2.17), 并使它们的和等于零, 得到:

$$\begin{aligned} & \frac{\pi}{4}(1-\mu) \frac{a_m}{\sinh \alpha_m} \left(\frac{1+\mu}{1-\mu} + \alpha_m \coth \alpha_m \right) + \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{a^2 E_m}{D m^2} \left(\coth \alpha_m - \frac{\alpha_m}{\sinh^2 \alpha_m} \right) \\ & + 2 \frac{a}{b} \sum_{i=1} C_i \frac{\frac{m^2}{i^2} + (2-\mu) \frac{a^2}{b^2}}{i \left(\frac{m^2}{i^2} + \frac{a^2}{b^2} \right)^2} + \frac{k a^2}{\pi} \cdot \frac{1}{m^2} = 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

式中的 $m=2, 4, 6, \dots$, $i=1, 2, 3, \dots$.

由于沿自由边 $y=b$, 各点的剪力为零, 即 $(V_y)_{y=b}=0$, 叠加算式(2.2), (2.8), (2.13), 并使它们的和为零, 得到:

$$\begin{aligned} & (1-\mu)^2 \pi \frac{a_m}{2} \left(\frac{3+\mu}{1-\mu} \coth \alpha_m + \frac{\alpha_m}{\sinh^2 \alpha_m} \right) - \frac{1+\mu}{2\pi} \cdot \frac{a^2 E_m}{D} \cdot \frac{1}{m^2 \sinh \alpha_m} \\ & \cdot \left(1 + \frac{1-\mu}{1+\mu} \alpha_m \coth \alpha_m \right) + 4(1-\mu)^2 \frac{a^3}{b^3} \sum_{i=1} C_i \frac{\cos i\pi}{i \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{m^2}{i^2} \right)^2} = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

由于沿自由边 $x=a$ 各点的剪力为零, 即 $(V_x)_{x=a}=0$, 叠加算式(2.3), (2.7), (2.14), 并使它们的和为零, 得到:

$$\begin{aligned} & -\frac{\pi}{4}(1-\mu)^2 \frac{a^3}{b^3} C_i \left(\frac{3+\mu}{1-\mu} + \frac{\beta_i}{\sinh \beta_i} \right) \left(\frac{1}{\sinh \beta_i} + \coth \beta_i \right) - (1-\mu)^2 \cos i\pi \\ & \cdot \sum_{m=2,4,\dots} \frac{a_m}{m \left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{i^2}{m^2} \right)^2} + \frac{1}{i^2 \pi^2} \cdot \frac{a^2}{D} \sum_{m=2,4,\dots} \frac{E_m \left[\frac{b^2}{a^2} + (2-\mu) \frac{i^2}{m^2} \right]}{m \left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{i^2}{m^2} \right)^2} = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

对于自由边 $x=0$, 将得一相同的方程。

由于在自由角点 (a, b) 作用一向上的集中力 P , 故 $(R)_{(a,b)} = -P$. 叠加算式(2.5), (2.10), (2.15), (2.18)并使它们的和等于 $-P$, 得到:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\pi^2(1-\mu)} \cdot \frac{a^2}{D} \sum_{m=2,4,\dots} \frac{E_m}{\sinh \alpha_m} (\alpha_m \coth \alpha_m - 1) + \sum_{m=2,4,\dots} m^2 a_m \left(\frac{1+\mu}{1-\mu} \coth \alpha_m \right. \\ & \left. + \frac{\alpha_m}{\sinh^2 \alpha_m} \right) - \frac{a^2}{b^2} \sum_{i=1} i^2 C_i \cos i\pi \left(\frac{1+\mu}{1-\mu} + \frac{\beta_i}{\sinh \beta_i} \right) \left(\frac{1}{\sinh \beta_i} + \coth \beta_i \right) \\ & - \frac{k a^2}{\pi} \cdot \frac{2}{\pi(1-\mu)} = -\frac{P a^2}{\pi^2 D (1-\mu)^2} \end{aligned} \quad (3.4)$$

方程(3.1), (3.2), (3.3)为三个无穷联立方程, 方程(3.4)为一个单独的方程. 方程中的未

知量为 a_m , C_i , $\frac{a^2 E_m}{D}$, $\frac{k a^2}{\pi}$, 已知量为 $\frac{P a^2}{D \pi^2}$.

四、数 值 例 子

设有一狭长矩形截面杆, $\frac{b}{a}=4$, $\mu=0.3$. 对未知量 a_m , C_i , $\frac{a^2 E_m}{D}$ 各取50项. 连同未知量 $\frac{ka^2}{\pi}$ 共有 151 个未知量. 已知量为 $\frac{Pa^2}{D\pi^2}$. 所得的解为 $a_2, a_4, \dots, C_1, C_2, \dots, \frac{a^2 E_2}{D}, \frac{a^2 E_4}{D}, \dots$ 及 $\frac{ka^2}{\pi}$. 由计算机计算得到:

$a_m \quad m=2, 4, 6, \dots$

0.32317×10^{-5}	$\frac{Pa^2}{D\pi^2}$, 0.27599×10^{-5} ,	0.22081×10^{-5} ,	0.16842×10^{-5} ,
0.12471×10^{-5} ,	0.91087×10^{-6} ,	0.66345×10^{-6} ,	0.48546×10^{-6} ,
0.35839×10^{-6} ,	0.26757×10^{-6} ,	0.20223×10^{-6} ,	0.15478×10^{-6} ,
0.11993×10^{-6} ,	0.94039×10^{-7} ,	0.74568×10^{-7} ,	0.59757×10^{-7} ,
0.49363×10^{-7} ,	0.39505×10^{-7} ,	0.32547×10^{-7} ,	0.27031×10^{-7} ,
0.22517×10^{-7} ,	0.19056×10^{-7} ,	0.16160×10^{-7} ,	0.13787×10^{-7} ,
0.11830×10^{-7} ,	0.10204×10^{-7} ,	0.88458×10^{-8} ,	0.77041×10^{-8} ,
0.67392×10^{-8} ,	0.59196×10^{-8} ,	0.52200×10^{-8} ,	0.46200×10^{-8} ,
0.41032×10^{-8} ,	0.36563×10^{-8} ,	0.32682×10^{-8} ,	0.29300×10^{-8} ,
0.26343×10^{-8} ,	0.23747×10^{-8} ,	0.21461×10^{-8} ,	0.19443×10^{-8} ,
0.17656×10^{-8} ,	0.16068×10^{-8} ,	0.14655×10^{-8} ,	0.13392×10^{-8} ,
0.12263×10^{-8} ,	0.11249×10^{-8} ,	0.10338×10^{-8} ,	0.95174×10^{-9} ,
0.87760×10^{-9} ,	0.81051×10^{-9} .		

$C_i \quad i=1, 2, 3, \dots$

$-0.53511 \frac{Pa^2}{D\pi^2}$,	-0.24212	-0.13936 ,	-0.087785
-0.058302 ,	-0.040297	-0.028799	-0.021187
-0.015987 ,	-0.012334	-0.97025×10^{-2} ,	-0.77641×10^{-2} ,
-0.63069×10^{-2} ,	-0.51920×10^{-2} ,	-0.43249×10^{-2} ,	-0.36410×10^{-2} ,
-0.30942×10^{-2} ,	-0.26522×10^{-2} ,	-0.22908×10^{-2} ,	-0.19926×10^{-2} ,
-0.17443×10^{-2} ,	-0.15360×10^{-2} ,	-0.13597×10^{-2} ,	-0.12097×10^{-2} ,
-0.10811×10^{-2} ,	-0.97040×10^{-3} ,	-0.87434×10^{-3} ,	-0.79079×10^{-3} ,
-0.71758×10^{-3} ,	-0.65331×10^{-3} ,	-0.59653×10^{-3} ,	-0.54629×10^{-3} ,
-0.50154×10^{-3} ,	-0.46168×10^{-3} ,	-0.42592×10^{-3} ,	-0.39388×10^{-3} ,
-0.36496×10^{-3} ,	-0.33890×10^{-3} ,	-0.31524×10^{-3} ,	-0.29382×10^{-3} ,
-0.27428×10^{-3} ,	-0.25651×10^{-3} ,	-0.24022×10^{-3} ,	-0.22534×10^{-3} ,
-0.21165×10^{-3} ,	-0.19910×10^{-3} ,	-0.18750×10^{-3} ,	-0.17684×10^{-3} ,
-0.16695×10^{-3} ,	-0.15783×10^{-3} .		

E_m	$m=2,$	$4,$	$6,$	\dots
$-8.6411\frac{P}{\pi^2},$	$-4.7383,$	$-3.1426,$	$-2.3238,$	$-1.8555,$
$-1.5688,$	$-1.3843,$	$-1.2604,$	$-1.1743,$	$-1.1125,$
$-1.0669,$	$-1.0324,$	$-1.0059,$	$-0.98500,$	$-0.96827,$
$-0.95470,$	$-0.94355,$	$-0.93427,$	$-0.92647,$	$-0.91986,$
$-0.91420,$	$-0.90933,$	$-0.90509,$	$-0.90139,$	$-0.89814,$
$-0.89527,$	$-0.89272,$	$-0.89044,$	$-0.88841,$	$-0.88657,$
$-0.88492,$	$-0.88342,$	$-0.88206,$	$-0.88082,$	$-0.87968,$
$-0.87865,$	$-0.87769,$	$-0.87681,$	$-0.87600,$	$-0.87525,$
$-0.87456,$	$-0.87391,$	$-0.87331,$	$-0.87275,$	$-0.87223,$
$-0.87174,$	$-0.87129,$	$-0.87086,$	$-0.87046,$	$-0.87008.$

$$k=2.1349\frac{P}{D\pi}.$$

现将以上所得的解，讨论这狭长矩形截面杆约束扭转的变形与应力。

(A) 自由端的扭转角

对于自由端这横截面的水平中线，其各点的位移，应由叠加四个部分得到。叠加的第一部分，由于系数 a_m 非常小可以不计。叠加的二、三两部分，对这截面不产生位移。叠加的第四部分，由方程 (2.16) 得到：

$$(W)_{y=b} = kb \left(\frac{a}{2} - x \right) \quad (a)$$

因 $k=2.1349\frac{P}{D\pi},$

$$(W)_{y=b} = 2.1349 \frac{Pb}{D\pi} \left(\frac{a}{2} - x \right) \quad (b)$$

最大挠度在角点 $(b, 0)$ 与 (a, b) ，其值为：

$$(W)_{\max} = \pm 2.1349 \frac{Pb}{D\pi} \cdot \frac{a}{2} = \pm 1.3591 \frac{Pa^2}{D} = \pm 0.084945 \frac{Pb^2}{D}$$

由 (b) 式可知，自由端横截面的水平中心线，经杆变形后仍保持直线，只是倾斜了一角度。这符合 Saint-Venant 对杆扭转变形的前提，即横截面作了一刚体转动。由 (b) 式所得的斜率，就是杆自由端的扭转角 ψ 。

$$\psi = \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)_{y=b} = -2.1349 \frac{Pb}{D\pi} = -0.67956 \frac{Pb}{D}$$

式中的 $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ ，而 h 为狭长矩形截面的高度， ah 为截面面积。于是

$$\psi = \frac{-2.1349Pb}{\pi \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}} = -\frac{2.1349Pb \times 12(1-\mu^2)}{\pi h^3 2G(1+\mu)} = -\frac{6 \times 2.1349(1-0.3)}{\pi G h^3} Pb$$

$$= -2.8542 \frac{Pab}{Gh^3a} \quad (c)$$

Timoshenko 教授对本文这例题，以弹性力学的能量法所得的扭转角 ψ 为：

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{3M,l}{16Gab^3} \left[1 - \frac{a}{l} \cdot \frac{\sqrt{5(1+\mu)}}{6} \right] = \frac{3M,l}{16Gab^3} \left[1 - \frac{1}{8} \cdot \frac{\sqrt{5(1+0.3)}}{6} \right] \\ &= 2.8407 \frac{M,l}{16Gab^3} \end{aligned}$$

在以上这算式中， l 为杆长度，而狭长矩形截面的底为 $2a$ ，高为 $2b$ 。于是算式 (c) 中的 h 相当于 $2b$ ， a 应改为 $2a$ ， b 相当于 l 。于是对于我们所计算的问题， $\frac{a}{l} = \frac{1}{8}$ 。并且，以 M 代替 Pa ，则算式 (c) 成为：

$$\psi = -\frac{M,l}{16Gab^3} 2.8542$$

结果证实：用 Kirchhoff 薄板理论所得的扭转角 ψ ，与 Timoshenko 教授以能量法所得的结果相同。式中的负号表示角度的转向在图 1 的坐标系中为负。

(B) 横截面的变形

由于固定端约束的影响，在固定端附近的横截面，它的水平中线在绕其中点转动以后，将不再保持直线，而发生弯曲。这表明横截面不再是简单地作一刚体转动，并且发生弯曲变形。这是可以预料到的。

现以叠加法计算横截面的水平中线的变形。叠加的第一部份 (图 2) 由方程 (2.1) 所给。因非常小而被忽略。表 1，表 2 列出由方程 (2.16)，(2.6)，(2.11) 所给的，沿 $y = \frac{a}{4}$ ， $\frac{a}{2}$ 这两横截面的水平中线上几个点的挠度。然后，再计算离固定端较远的横截面的水平中线的挠度。

表 1 横截面 $y = \frac{1}{4} a$

x	0	$\frac{1}{6} a$	$\frac{1}{3} a$	$\frac{1}{2} a$
$W_{(2.16)}$	$0.084945 \frac{Pa^2}{D}$	$0.05663 \frac{Pa^2}{D}$	$0.028315 \frac{Pa^2}{D}$	0
$W_{(2.6)}$	-0.051172	-0.031015	-0.014491	0
$W_{(2.11)}$	0	-0.003314	-0.002957	0
叠 加 结 果	0.033773	0.022301	0.010867	0
	0.033773	0.022515	0.011258	0

表 1 内的最后一行，为当中线变形后成一斜直线 (联结 $x=0$ ， $x = \frac{a}{2}$ 的挠度) 时应有的挠度。

对于 $x = \frac{1}{3} a$ 这点的挠度，可以看出它相应地小了 3.5%。对于 $\frac{1}{6} a$ 这点，相应地小了 1%。这表明这水平中线的左段，在中心附近将成为稍微向下凹进的曲线。对于右段，变形将是反对称。因而这横截面除倾斜一角度外，发生稍微弯曲。对于 $y = \frac{a}{2}$ 这横截面，其水平

中线亦有些弯曲, 但程度更小.

表 2 横截面 $y = \frac{1}{2} a$

x	0	$\frac{1}{6} a$	$\frac{1}{3} a$	$\frac{a}{2}$
$W_{(2.16)}$	$0.16989 \frac{Pa^2}{D}$	$0.11326 \frac{Pa^2}{D}$	$0.05663 \frac{Pa^2}{D}$	0
$W_{(2.6)}$	-0.065833	-0.042862	-0.021042	0
$W_{(2.11)}$	0	-0.001304	-0.001304	0
叠加结果	0.10406	0.069094	0.034284	0
	0.10406	0.069373	0.034687	0

表内的最后一行, 仍为当中线变形后成为一斜直线时的挠度值. 可以看出, 横截面的弯曲是十分微小的.

对于横截面 $y = a, 1.5a, 2a, 2.5a, 3a, 3.5a$, 方程(2.11)所产生的挠度可以忽略. 表 3 中列出由方程(2.16)与(2.6)所计算的结果.

表 3

x	0	$\frac{1}{6} a$	$\frac{1}{3} a$	$\frac{1}{2} a$	
$y = a$	$W_{(2.16)}$	$0.33978 \frac{Pa^2}{D}$	$0.22652 \frac{Pa^2}{D}$	$0.11326 \frac{Pa^2}{D}$	0
	$W_{(2.6)}$	-0.06473	-0.04313	-0.02156	0
	叠加结果	0.27505	0.18339	0.09170	0
$y = 1.5a$	$W_{(2.16)}$	0.50967	0.33978	0.16989	0
	$W_{(2.6)}$	-0.05499	-0.03666	-0.01834	0
	叠加结果	0.45467	0.30312	0.15155	0
$y = 2a$	$W_{(2.16)}$	0.67956	0.45304	0.22652	0
	$W_{(2.6)}$	-0.04414	-0.02941	-0.01470	0
	叠加结果	0.63542	0.42363	0.21182	0
$y = 2.5a$	$W_{(2.16)}$	0.84945	0.56630	0.28315	0
	$W_{(2.6)}$	-0.03313	-0.02207	-0.01103	0
	叠加结果	0.81632	0.54423	0.27212	0
$y = 3a$	$W_{(2.16)}$	1.0193	0.67956	0.33978	0
	$W_{(2.6)}$	-0.0221	-0.01471	-0.00736	0
	叠加结果	0.9972	0.66485	0.33242	0
$y = 3.5a$	$W_{(2.16)}$	1.1892	0.79282	0.39641	0
	$W_{(2.6)}$	-0.0110	-0.00735	-0.00368	0
	叠加结果	1.1782	0.78547	0.39273	0

很容易校核, 对于以上离固定端较远的横截面, 它们的水平中线经倾斜后, 仍保持为一直线. 换言之, 以上这些横截面均各自作了一刚体转动. 例如对于 $y = 2a$ 这横截面, 它的扭转角为:

$$(\psi)_{y=2a} = -0.63542 \frac{Pa^2}{D} / \frac{1}{2} a = -1.2708 \frac{Pa}{D} = -0.3177 \frac{Pb}{D}$$

这截面的扭转角等于自由端的扭转角的 46.8%.

从以上的分析可知, 对于 $\frac{b}{a}=4$ 这情形, 在离自由端略大于75%的长度内, 正如 Saint-Venant 所设的, 横截面各自作了一刚体转动。

至于在扭转问题中的翘曲, 亦可以由薄板弯曲面的方程得到。例如由方程(2.16), 所得的翘曲方程为:

$$z \frac{\partial W}{\partial y} = z \left(\frac{a}{2} - x \right) k$$

坐标轴 z 垂直于板的中间面, 并向下为正。从上式可知, 翘曲所形成的体积为零。对于叠加的其它三部分, 可以同样地计算横截面的翘曲。将这四部分叠加, 就得到横截面的总翘曲。

(C) 扭矩 M_{xy} 与剪应力

现计算狭长矩形截面约束扭转的扭矩分布, 以及它所引起的剪应力。这剪应力相当于 Saint-Venant 扭转理论的剪应力, 可以互相比较。由方程(2.1), (2.6), (2.11), (2.16) 得到:

$$M_{xy} = D(1-\mu) \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = D(1-\mu)^2 \frac{\pi^2}{2a^2} \sum_{m=2,4,\dots} \frac{\alpha_m m^2}{\sinh \alpha_m} \left\{ \left(\frac{1+\mu}{1-\mu} + \alpha_m \coth \alpha_m \right) \cdot \cosh \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} \right\} \cos \frac{m\pi x}{a} \quad (4.1)$$

$$M_{xy} = D(1-\mu) \frac{\pi^2}{b^2} \sum_{i=1} C_i i^2 \left\{ \frac{1 + \cosh \beta_i}{\sinh \beta_i} \left[\left(-\frac{1+\mu}{2} - \frac{1-\mu}{2} \cdot \frac{\beta_i}{\sinh \beta_i} \right) \cosh \frac{i\pi x}{b} + \frac{1-\mu}{2} \cdot \frac{i\pi x}{b} \sinh \frac{i\pi x}{b} \right] + \frac{1+\mu}{2} \sinh \frac{i\pi x}{b} - \frac{1-\mu}{2} \cdot \frac{i\pi x}{b} \cosh \frac{i\pi x}{b} \right\} \cos \frac{i\pi y}{b} \quad (4.2)$$

$$M_{xy} = \frac{1-\mu}{2} \sum_{m=2,4,\dots} E_m \left\{ \left(-\frac{\alpha_m}{\sinh^2 \alpha_m} + \coth \alpha_m - \frac{m\pi y}{a} \right) \cosh \frac{m\pi y}{a} + \left(\coth \alpha_m \frac{m\pi y}{a} - 1 \right) \sinh \frac{m\pi y}{a} \right\} \cos \frac{m\pi x}{a} \quad (4.3)$$

$$M_{xy} = -D(1-\mu)k \quad (4.4)$$

叠加的第一部分(4.1)所提供的扭矩很小, 可被忽略。将 k 及 $\mu=0.3$ 代入(4.4)式, 得到:

$$M_{xy} = -D(1-0.3)2.1349 \frac{P}{D\pi} = -0.47569P \quad (4.5)$$

方程(4.5)所提供的扭矩起着主要作用。表4列出沿横截面宽度的几个点的扭矩 M_{xy} 。离固定端较近的横截面 ($y < a$), 例如 $y = \frac{1}{4}a$, $\frac{1}{2}a$, 应叠加方程为(4.2), (4.3), (4.5)。对于 $y \geq a$ 的横截面, 则方程(4.3)所提供的扭矩可以忽略。

表 4

x		0	$\frac{a}{6}$	$\frac{a}{3}$	$\frac{a}{2}$
$y = \frac{a}{4}$	$(M_{yx})_{(4.5)}$	0.47569P	0.47569P	0.47569P	0.47569P
	$(M_{yx})_{(4.2)}$	-0.10225	-0.16224	-0.17863	-0.18013
	$(M_{yx})_{(4.3)}$	-0.05563	-0.00669	0.01412	0.02453
	叠加结果	0.31781P	0.30676P	0.3119P	0.32009P
$y = \frac{a}{2}$	$(M_{yx})_{(4.5)}$	0.47569	0.47569	0.47569	0.47569
	$(M_{yx})_{(4.2)}$	0.02371	-0.01503	-0.04588	-0.05655
	$(M_{yx})_{(4.3)}$	-0.02836	-0.01410	0.01418	0.02836
	叠加结果	0.47104	0.44656	0.44399	0.44750
$y = a$	$(M_{yx})_{(4.5)}$	0.47569	0.47569	0.47569	0.47569
	$(M_{yx})_{(4.2)}$	0.04065	0.02806	0.02285	0.02159
	叠加结果	0.51634	0.50375	0.49854	0.49728
$y = 2a$	$(M_{yx})_{(4.5)}$	0.47569	0.47569	0.47569	0.47569
	$(M_{yx})_{(4.2)}$	0.04456	0.03470	0.03162	0.03109
	叠加结果	0.52025	0.51039	0.50731	0.50678
$y = 3a$	$(M_{yx})_{(4.5)}$	0.47569	0.47569	0.47569	0.47569
	$(M_{yx})_{(4.2)}$	0.04447	0.03465	0.03166	0.03115
	叠加结果	0.52061	0.51034	0.50735	0.50684

截面的右半部分的扭矩分布与左半部分对称。在离固定端较远的截面，例如 $y = a, 2a, 3a$ ，约束的影响已消失。扭矩的分布除两端外十分接近于 Saint-Venant 的值 $0.5P$ 。因而剪应力的最大值亦十分接近于 $\frac{3M_t}{ha^2}$ 。这与狭长矩形截面杆的扭转相一致。对于离固定端较近的截

面，例如 $y = \frac{1}{4}a, \frac{a}{2}$ ，由于约束的影响，扭矩的分布与自由扭转有显著的差别。

在扭转理论中，水平剪应力 τ_{yx} 组成的扭矩为 $0.5Pa$ 。另一半的扭矩，由截面两端的垂直剪应力 τ_{yz} 所提供。在薄板理论中，另一半的扭矩将由垂直剪应力所提供。这两者本质相同。

(D) 不均匀翘曲所引起的正应力

约束扭转的一个特点为：由于沿杆长度横截面的不均匀翘曲，在横截面内产生正应力，构成一自相平衡的力系，称为双力矩。固定端截面的翘曲完全被阻止，组成双力矩的正应力为最大。现计算这截面的双力矩与正应力。作用于固定端的弯矩为：

$$M(x) = \sum_{m=2,4,\dots} E_m \sin \frac{m\pi x}{a}$$

系数 E_m 收敛很慢， E_{100} 为 E_2 的 $\frac{1}{10}$ 。并且，当 m 逐渐增大，则收敛更放慢。因 E_{50} 为 E_2 的

$\frac{1.04}{10}$ ，但 E_{100} 为 E_{52} 的 0.972。所以即使继续取很多项，也很难奏效。但可以看出，系数

E_m 有一特点。自 E_{50} 以后，后续系数变化很小。如果将它们分成区间，在每个区间之内

的 E_m 几乎是相等的. 例如自 E_{66} 至 E_{80} 共八个系数, 它仍是从 0.88206 变化至 0.87525, 相差不到 1%. 从 $E_{82}=0.87456$ 至 $E_{96}=0.87086$ 这八个系数, 相差为 0.423%. 因而在这些区间内的 E_m 可以看作常量. 对于后续的系数情况相同. 于是, 在计算沿固定边某一点的弯矩 $M(x)$ 时, 可将几个项集合起来, 而它在该点不仅成周期性, 并且它们之和等于零.

例如对于 $x=\frac{a}{8}$ 这点, 由 E_{66} 这项开始并取每连续的八项, 得到:

$$\text{常数} \{0.70711+1+0.70711+0-0.70711-1-0.70711+0\}=0$$

如果以 E_{66} 至 E_{88} 按原来的系数作计算, 所得的和为 $0.000983P$, 小得可以忽略. 因而, 用 E_2 至 E_{64} 诸项而忽略后续项, 将给出 $M(x)$ 在 $x=\frac{a}{8}$ 这点足够精确的值.

在计算 $x=\frac{a}{16}$ 这点的弯矩时, 我们将集合由 E_{66} 开始的共 16 项. 例如从 E_{66} 至 E_{88} , 得到:

$$\begin{aligned} \text{常数} \{0.38268+0.70711+0.92388+1+0.92388+0.70711+0.38268+0-0.38268 \\ -0.70711-0.92388-1-0.92388-0.70711-0.38268-0\}=0 \end{aligned}$$

故在计算 $x=\frac{a}{16}$ 这点的弯矩时, 用到级数的 E_{64} 项而忽略后续项. 同样的, 要得到 $x=\frac{a}{32}$ 这点的弯矩, 须集合由 E_{66} 至 E_{128} 共 32 项, 而得到它们之和为零. 于是, 所作的计算应到达 E_{64} 这项. 在计算 $x=\frac{a}{4}$ 这点的弯矩, 只须由 E_2 开始相继集合四个项作成一新级数. 对于大的 m 值, 得

$$\text{常数}(1+0-1+0)=0$$

对于在 $x=\frac{3}{8}a$ 这点的弯矩, 从 E_{66} 至 E_{82} 得到:

$$\text{常数}\{-1+0.70711+0-0.70711+1-0.70711+0+0.70711\}=0$$

所以用到 E_{66} 这许多项作计算, 而忽略其余的, 即得足够精确的结果. 现将 $M(x)$ 值列表如下:

表 5

x	0	$a/32$	$a/16$	$a/8$	$a/4$	$3a/8$	$a/2$
$M(x)$	0	$-0.82259P$	$-1.0275P$	$-0.97632P$	$-0.62382P$	$-0.2495P$	0

对于横截面的右半部分, 弯矩的分布与左半边为反对称, 如图 6 所示. 它们形成两相等而相反的力偶. 已得到了弯矩 $M(x)$, 可以很容易得到沿板厚 h 线性分布的正应力. 对于表 5

中 $x=\frac{a}{16}$ 这点的最大弯矩, 其弯曲应力为:

$$\sigma_y = \frac{1.0275Pz}{h^3/12}$$

最大值为:

$$(\sigma_y)_{\max} = \frac{6.165P}{h^2} = 2.055 \frac{3M}{ah^2}$$

这数值为 Saint-Venant 扭转的最大剪应力的 2.055 倍。

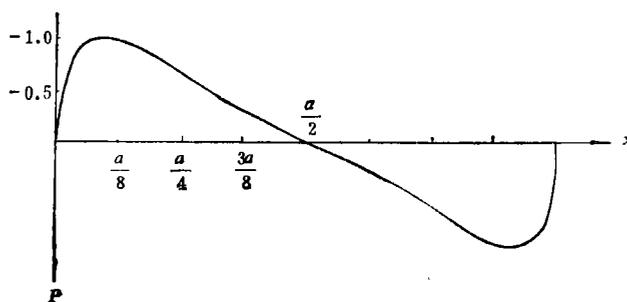


图 6 固定端的双力矩

参 考 文 献

1. Timoshenko, S., *Theory of Elasticity*.
2. Timoshenko, S., On the torsion of a prism, one of the cross section of which remains plane, *Proceedings of the London Mathematical Society*, Ser. 2. (1922).
3. 张福范, 《弹性薄板》, 科学出版社, (1964).
4. 张福范, 均布荷载下悬臂矩形板的弯曲, *应用数学和力学*, 1, 3, (1980).

On the Restricted Torsion of Narrow Rectangular Cross Section by Kirchhoff's Thin Plate Theory

Chang Fo-van

(Qinghua University, Beijing)

Abstract

Kirchhoff's thin plate theory is used to solve the restricted torsion of narrow rectangular cross section. For this problem is equivalent to the bending of a rectangular cantilever plate by a twisting moment at the free end. The results obtained not only prove the angle of twist got by Prof. Timoshenko using the energy method but also give us stresses.