

# 土壤和多孔介质静力和动力特性的基本公式\*

O. C. 辛克维奇

(英国斯旺西威尔士大学, 1981年11月10日收到)

## 摘 要

本文把土壤和岩石或混凝土等多孔性介质当作“固体骨架”和填隙流体所组成的二相介质。对于填充得不饱和的材料而言, 还考虑了第三相问题。本文研究了这类介质的本构方程和动力以及运动方程式。也研究它们的各种近似以及其适用范围, 包括像固结压实和不排水状态等极有工程价值的特殊情况。最后还研究了有限元离散化, 以及各种涉及时间问题的土壤问题的解。

## 符 号

为了方便, 本文全文将采用“矢量式”张量符号来进行有限元的运算, 如应变和应力增量可以写成

$$(d\epsilon)^T = [d\epsilon_x, d\epsilon_y, d\epsilon_z, d\gamma_{xy}, d\gamma_{yz}, d\gamma_{zx}]$$

$$(d\sigma)^T = [d\sigma_x, d\sigma_y, d\sigma_z, d\tau_{xy}, d\tau_{yz}, d\tau_{zx}]$$

与克氏 $\delta$ 相当的符号为

$$m^T = [1, 1, 1, 0, 0, 0]$$

各种符号将随文说明。

## 引 论

土壤或其它各种多孔介质如岩石或混凝土等都可以当作是由“固体骨架”和填隙流体所组成的二相介质。见图1。我们将探讨饱和材料的问题, 这种材料在近海结构、水坝等的基础中肯定是存在的。当在未饱和的条件下, 我们还应考虑第三相, 这就增加了复杂性, 为此, 还将引入严峻的各种假设。

为了处理本问题, 我们将探讨

(1) 本构方程

(2) 动力的和运动的方程

通过这些关系, 问题就可以用公式表示了。

\* 钱伟长推荐。

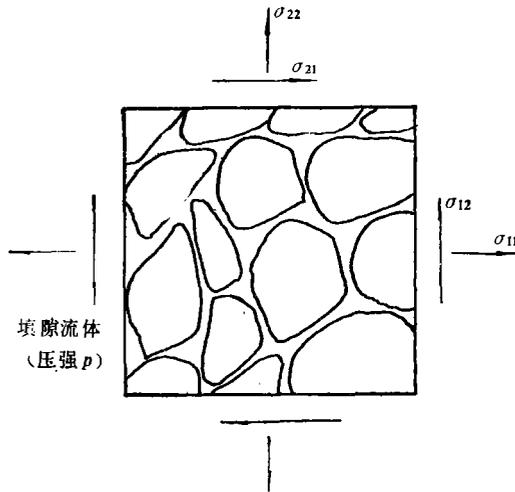


图1 多孔介质单元内的总应力 $\sigma$ 和孔隙流体压强 $p$

接着还研讨了

(3) 各种近似以及它们的适用限度。在这里，我们将对一些最实用的工程处境列出方程，而且研讨像固结压实以及非排水环境这类特殊处境。对于固结压实问题而言，我们和通常处理一样，略去动力项。对非排水问题而言，我们把它看成是一种合适的极限状态。

在本文的第二部份，我们将研究有限元离散化以及各种类型的土壤问题的涉及时间的解。

## 第 一 部 分

### 1. 多孔二相介质本构关系的普遍形状

为了方便起见，我们把这种材料的总应力 $\sigma$ 分解为‘有效应力’ $\sigma'$ ，以及与孔隙压强相等的静水压强分量 $p$ 。

$$\sigma = \sigma' - mp \quad (1)$$

(为了适应标准程序，我们使用拉伸为正的惯例)。

如果取固体骨架的位移为 $u$ ，则应变增量 $d\varepsilon$ 应为

$$d\varepsilon = Ldu \quad (2)$$

其中 $L$ 为线性小应变算子。

孔隙压强的均匀增量 $dp$ （其有关 $d\sigma' = 0$ ）只能达到固体的基体产生均匀压缩的效果，它就产生容积应变变化。

$$de_{vol}^p = -dp/K_s \quad (3)$$

其中 $K_s$ 为固体基体的体积弹性模量，它给出一种均匀应变

$$d\varepsilon^p = -mdp/3K_s \quad (4)$$

虽然这一应变相对于土壤的总应变时，可以略去，但对岩石一样的材料时，还是重要

的, 应予以保留.

$d\epsilon$ 的其余部份是负责有效应力的变化的. 在具有初始应变 $d\epsilon^0$  (如由于热效应, 蠕变等所引起的)下, 我们可以写成

$$d\sigma' = \mathbf{D}(d\epsilon - d\epsilon^0 - d\epsilon^p) \quad (5)$$

其中 $\mathbf{D}$ 为切线模量矩阵 (它在一般非线性情况下和应变/应力以及历史有关).

从(1), (4), (5)中, 我们可以相当一般地写成

$$d\sigma = \mathbf{D}(d\epsilon - d\epsilon^0) - \alpha m dp + d\sigma_R \quad (6)$$

其中

$$\alpha m = m - (\mathbf{D}m) / (3K_s)$$

不过 $m^T m = 3$ , 而且 $m^T \mathbf{D}m / q = K_T =$ 各向同性的固体骨架的体积弹性模量. 我们在该式上前乘了 $m^T$ 以后, 即得

$$\alpha = 1 - K_T / K_s \quad (7)$$

这里的 $\alpha$ 显然永远小于1, 而且它也一定大于孔隙率 $n$ . 在零孔隙率的情况下,  $K_T \rightarrow K_s$ , 它只能接近于零.

对于大多数的土壤而言, 典型的 $\alpha$ 值都很接近于1, 以至测不出来有什么区别. 对于岩石或混凝土而言,  $\alpha$ 值可以降至0.5甚或小于0.5, 它对于岩石或混凝土的影响很显著.

但我们必须记得, 所有多孔材料的破坏只由有效应力 $\sigma'$ 决定, 和 $\alpha$ 无关. 所以, 一般讲来,  $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\sigma')$ .

在小位移情况下, 而且假如 $\|\sigma\| \ll \|\mathbf{D}\|$ 时, (6)式的末项可以略去. 这一项涉及刚体转动, 是没有应变的应力, 所以是 $\sigma$ 和 $du$ 的函数. 对于大位移和大应变问题而言, 这一项的计及是很重要的.

为了建立本构关系, 决定固体骨架单位容积中流体容积的变化 $d\theta$ 是必要的.

固体骨架中流体容积的变化涉及四种原因:

- (a) 在固体基体假设不可压缩的条件下由于总应变所引起的流体容积的变化  $m^T d\epsilon$ .
- (b) 由于固体基体受  $dp$  压力变化所引起的压缩变形所引起的流体容积变化. 假如  $n$  为孔率, 则它就是  $(1-n)dp/K_s$ .
- (c) 设流体的体积压缩模量为  $K_f$ , 当流体在压缩下所引起的流体容积变化  $ndp/K_f$ .
- (d) 和有效应力变化  $d\sigma'$  有关的固体晶粒压缩变形所引起的流体容积变化. 设有效应力中值的平均变化可以用基体应力来表示如  $\frac{1}{3} m^T d\sigma'$ . 这一部份变形所引起的流体容积变化为

$$-\frac{1}{3} m^T [\mathbf{D}(d\epsilon - d\epsilon^0) + (1-\alpha)mdp] / K_s$$

把所有这些部份加在一起, 利用方程(7), 并整理后得[注]

$$d\theta = \alpha m^T d\epsilon + \frac{1}{Q} dp + (m^T \mathbf{D} d\epsilon^0) / (3K_s) \quad (8)$$

注: 方程(6)和(8)是Biot首先用不同的方法导得的, 本文作者感谢Bruce Simon 博士 (美国Tucson的Arizona大学) 指出本文和Biot的结果相同. 方程(7)和(9)给出了Biot的参量和 $Q$ 在物理学上有意义的用微结构观点的解释.

其中

$$\frac{1}{Q} = \left[ \frac{n}{K_f} + \frac{1-n}{K_s} - (1-\alpha) \frac{1}{K_s} \right] \quad (9)$$

基本方程(6)和(8)决定了材料所受 $\epsilon$ 和 $p$ 有变化时,所产生的总应力变化和所贮流体的容积变化。

我们从此即可求得材料在不排水条件下的性能。在不排水条件下,  $d\theta=0$ , 而且从(8)和(6) (略去 $d\epsilon^0$ )

$$dp = -Q\alpha m^T d\epsilon \quad (10)$$

$$d\sigma = Dd\epsilon - \alpha m dp = (D + \alpha^2 m Q m^T) d\epsilon = \bar{D} d\epsilon \quad (11)$$

其中

$$\bar{D} = D + \alpha^2 m Q m^T$$

给出了排水切线矩阵和不排水切线矩阵之间的唯一关系。让我们研究由于单位容积应变 $d\epsilon = m/3$ 所引起的孔隙压强变化和应力中值 $-m^T d\sigma/3$ 之比。它是

$$\begin{aligned} B &= -\frac{3 dp}{m^T d\sigma} = \frac{Q\alpha m^T m}{m^T (D + \alpha^2 m Q m^T) m/3} \\ &= \frac{3Q\alpha}{3K_T + 3\alpha^2 Q} = \frac{\alpha}{K_T/Q + \alpha^2} \end{aligned} \quad (12)$$

我们立刻可以看到, 在土壤中,  $K_s \gg K_T$ ,  $B \rightarrow \frac{1}{\alpha} \rightarrow 1$ , 但对岩石一类材料而言, 却并不如此。

$B$  是一个众所周知的土壤参量, 对于混凝土而言, 它在0.3至0.5之间, 对沙土和粘土而言, 它接近于1 (见William和Whitman著土壤力学395页)

## 2. 动力学的和运动学的关系

为了解这类问题, 除了本构关系(6)或(8), 应变率/位移速度关系(2)式之外, 我们尚需补充一个方程。

为此, 我们应增添一个变量 $w$ , 它是填隙流体相对于土壤骨架的排水量。它是用排液总量被总截面所得商来量度的。于是孔隙中的实际排水量是 $w/n$ , 其中 $n$ 为孔率。

增添的动力学方程中的力项, 是从单位土壤+流体容积的总体平衡得到的。明确地写来, 这个关系式是

$$\text{在 } x\text{-方向,} \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho g_x = \rho \ddot{u}_x + \rho_f \ddot{w}_x \quad (13)$$

对其方向而言, 可以简单地写成

$$L^T \sigma + \rho g = \rho \ddot{u} + \rho \ddot{w} \quad (14)$$

其中 $L$ 是方程(2)中定义的应变率的同一算子。在上式中

$\rho$  = 总流体的密度/固体混合物

$\rho_f$  = 流体密度

$g$  = 地球引力加速度分量的矢量

应该注意到, 由于流体质量为  $\rho n$ , 而相对于固体的加速度为  $\dot{w}/n$ , 所以在上式末项中, 孔率并不出现.

第二个方程是液相单独平衡方程. 在这个方程中, 主要的驱动力是压力梯度, 而主要的阻力 (或粘性力) 只和流体速度成正比 (Darcy 关系). 除此而外, 还有加速度有关的项. 于是, 我们有

$$-\nabla p + \rho_f \mathbf{g} = \rho_f \ddot{u} + \rho_f \dot{w}/n + (\rho_f g/K) \dot{w} \quad (15)$$

上式中,  $K$  为众所周知的渗透系数, 对于各向异性而言, 我们有一渗透矩阵  $\mathbf{K}$ , 而用  $\mathbf{K}^{-1}$  替代  $\frac{1}{K}$ . 符号  $\nabla$  为

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)^T \quad (16)$$

最后一个关系是一个运动学关系, 它和流入骨架间孔贮存量  $\theta$  有关. 所以, 它是

$$\nabla^T \dot{w} + \dot{\theta} = 0 \quad (17)$$

其中  $\nabla^T \dot{w} \equiv \text{div} \dot{w}$

### 3. 基本方程总结

#### 3.1 全部使用 $u/w$ 的公式

土壤问题的全部公式为(2), (6), (8), (14), (15), (17), 它们总起来可以列出如下:

$$\left. \begin{aligned} d\boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{L} d\mathbf{u} & (a) \\ d\boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{D}(d\boldsymbol{\varepsilon} - d\boldsymbol{\varepsilon}^0) - a m d p + (d\boldsymbol{\sigma}_R) & (b) \\ d\theta &= a m^T d\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{Q} d p + m^T \mathbf{D} d\boldsymbol{\varepsilon}^0 / (3K_s) & (c) \\ \mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g} &= \rho \ddot{u} + \rho \ddot{w} & (d) \\ -\nabla p + \rho_f \mathbf{g} &= \rho_f \ddot{u} + \rho_f \dot{w}/n + (\rho_f g/K) \dot{w} & (e) \\ \nabla^T \dot{w} + \dot{\theta} &= 0 & (f) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

还应附加像下述的边界条件和初始条件

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} \text{ 在 } \Gamma_u \text{ (已给位移) 上}$$

$$\mathbf{t} = \hat{\mathbf{t}} \text{ 在 } \Gamma_t \text{ (已给外力) 上}$$

$$K(\partial p / \partial n) = \hat{q} \text{ 在 } \Gamma_q \text{ (已给流速) 上}$$

$$p = \hat{p} \text{ 在 } \Gamma_p \text{ (已给压强) 上}$$

对于大多数问题而言, 可以按增量过程求解.

在这六个方程中, 有六个变量  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{w}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $p$ ,  $\theta$ , 其中前两个变量是基本的, 如果消去其余变量, 则可以用  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{w}$  求得其解, 在消去其它变量的过程中, 并无求导数的运算. 在动力学的全部过程中, 我们将遇到一组大型的有限元系统. 这将在下文讨论.

现在让我们研究可能的各种近似.

#### 3.2 位移—压强 ( $u/p$ ) 的公式 (辛克维奇)

设流体的运动 ( $\dot{w}$ ) 相对较小, 略去有关  $\dot{w}$  诸项, 我们很易从18(e)和18(f)中消去  $\dot{w}$ , 得

一组方程:

$$\left. \begin{aligned}
 d\boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{L}d\mathbf{u} & (a) \\
 d\boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{D}(d\boldsymbol{\varepsilon} - d\boldsymbol{\varepsilon}^0) - \alpha m d p + (\alpha \boldsymbol{\sigma}_R) & (b) \\
 d\theta &= \alpha m^T d\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{Q} d p + m^T \mathbf{D} d\boldsymbol{\varepsilon}^0 / (3K_s) & (c) \\
 \mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g} &= \rho \ddot{\mathbf{u}} & (d) \\
 -\nabla^T \bar{K} \nabla p + \nabla^T \bar{K} \rho_t \mathbf{g} - \nabla^T \rho_t \bar{K} \ddot{\mathbf{u}} + \dot{\theta} &= 0 & (e)
 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

其中  $\mathbf{u}$  和  $p$  是基本的变量, 而  $\bar{K} = K(\rho_t g)$ .

### 3.3 慢速固结压实现象准静力过程— $\mathbf{u}/p$ 形式

如果运动很缓慢, 方程组(19)中所有惯性力如  $\ddot{\mathbf{u}}$  项可以略去, 这就给出了众所周知的耦合固结压实方程, 它常常是用有限元求数值解的. 这个方程是完全的动力形式的方程组(19)的一个特例, 它是隐蔽在这组方程组内的. 而且求解完全的动力学方程组(19)并不比求解准静力的耦合固结压实方程来得复杂, 因此, 我们将不再把这两者分别处理. 在求解(19)式时, 我们需要动力程序, 这个程序应该有能力在缓慢的准静力范围内连续求解. 这就有可能同时处理地震和震后反作用力的问题.

### 3.4 不排水的特性

如果渗透系数  $K$  趋近于零, 流体相对于固体骨架的运动就不能存在, 于是  $\mathbf{w} = \dot{\mathbf{w}} = \ddot{\mathbf{w}} = 0$ . 从(18f)式, 我们找到在任何时间时,  $\dot{\theta} = 0$  或  $d\theta = 0$ .

方程式(18e)恒等地得到满足, 而方程式(18c)导出了  $d\boldsymbol{\varepsilon}$  和  $d p$  之间的一个关系 (参考方程(10)). 这个方程系变成

$$\left. \begin{aligned}
 d\boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{L}d\mathbf{u} \\
 d\boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{D}d\boldsymbol{\varepsilon} - [1 - (\alpha m Q m^T) / (3K_s)] Q d\boldsymbol{\varepsilon}^0 \\
 \mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g} &= \rho \ddot{\mathbf{u}}
 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

这和单相介质特性的动力学方程相同 (除了有一初始应变项外). 其基本变量为  $\mathbf{u}$ , 求解过程将较简单.

### 3.5 静力学 (极限) 解

不排水静力学解:

如果渗透系数很小, 方程组(20)可以适用, 则不排水静力学解实际上就是方程组(20)在  $\ddot{\mathbf{u}} = 0$  时的解. 这类解对粘土上基础的初始分析是重要的. 但必须记得, 它只能代表在固结压实开始出现以前的一个中间过渡效应. 用不排水的解, 无法满足边界上  $p=0$  的条件——这样的条件总是存在的, 因此, 这种解一定略去了一种边界层效应.

排水静力学解:

不论在完全的动力学方程(18)或在它的近似方程(19)中, 都有内在的衰减过程, 我们将希望在某一较长的时间后, 到达某一渐近状态. 在这时

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{u}} &= \ddot{\mathbf{u}} = 0 \\
 \ddot{\mathbf{w}} &= 0
 \end{aligned}$$

但  $\mathbf{u} \neq 0$  和  $\dot{\mathbf{w}} \neq 0$ , 而且  $\dot{p} = \dot{\varepsilon} = \dot{\theta} = 0$

于是(19e)解除耦合, 给出了常见的定常 Darcy 流动方程

$$-\nabla^T \bar{K} \nabla p + \nabla^T \bar{K} \rho_t \mathbf{g} = 0 \quad (21)$$

而且从它可以解出  $p$ . 固体相方程为

$$\left. \begin{aligned} L^T \sigma + \rho g &= 0 \\ d\varepsilon &= L du \\ \sigma &= \left[ D(d\varepsilon - d\varepsilon^0) - \alpha m p \right] \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

这些方程还是单相介质的静力学方程, 但  $\alpha m p$  主导了‘初始应力’的规律.

### 3.6 各种近似的适用限度

为了决定各种近似的适用限度, 我们将把完全的动力学方程(18)线性化, 并将就表面受周期力作用下的弹性层的一维问题进行求解(图2). 表面压强的条件就是全负荷排水的条件 (Zienkiewicz 和 Bettess, 1980).

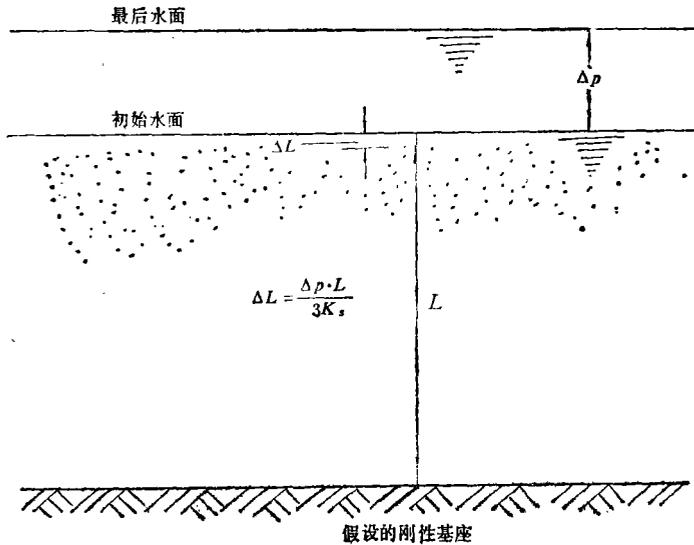


图2 在水库水面变化时的透水层

我们发现, 影响本问题的主要参量可以用两个无量纲量表示

$$\pi_1 = \frac{\bar{K} V_c^2}{(g\beta)\omega L^2}, \quad \pi_2 = \frac{\omega^2 L^2}{V_c^2}$$

这里

$\bar{K} = K / (\rho_l g)$  为运动学渗透系数

$\omega = 2\pi/T$  为频率

$V_c^2 =$  在饱和材料中的声速 = 水中声速

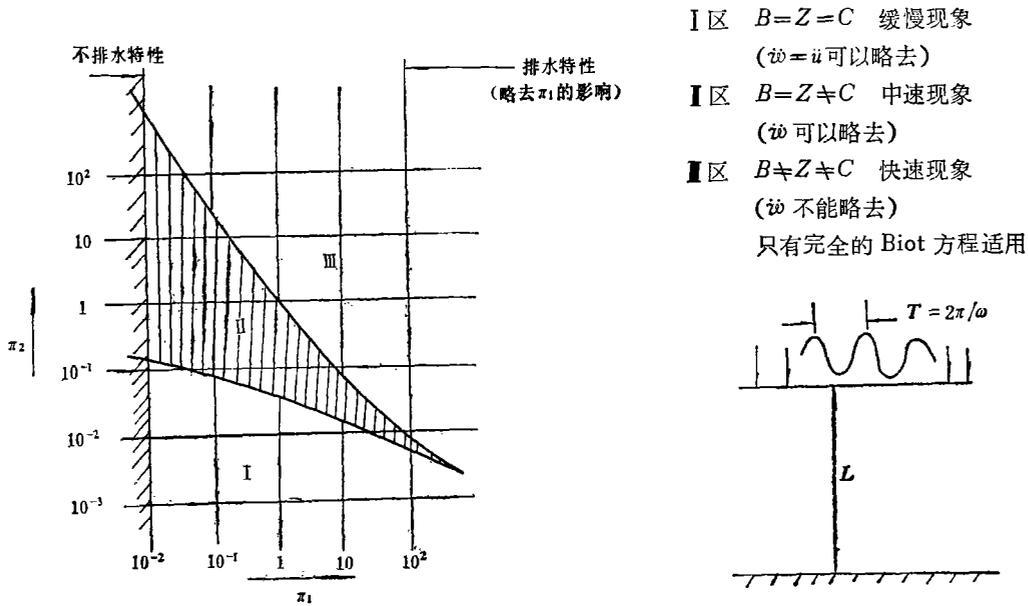
$\beta = \rho_l / \rho$

引入周期  $\hat{T} = 2L/V_c$ , 取  $\beta = \frac{1}{3}$

$$\pi_1 = \frac{2}{g} \frac{\bar{K} T}{\hat{T}^2}, \quad \pi_2 = \pi_1^2 \left( \frac{\hat{T}}{T} \right)^2$$

取  $n$  值为  $\frac{1}{3}$ , 其结果表明各种近似除了靠近表面的边界层外, 都很不差, 见图3.

从简单的单层情况所得结果可以用来估计在实际问题中分析时应该采用什么近似，在这里，我们只要估计实际问题中排水距离的典型尺寸，用它作为  $L$ ，同时规定所研究的实际问



$$\pi_1 = \frac{\hat{K} \rho V_c^2}{\omega L^2} = \frac{2\rho T}{\pi \hat{T}^2}$$

$$\pi_2 = \frac{\omega^2 L^2}{V_c^2} = \pi^2 \left( \frac{\hat{T}}{T} \right)^2$$

$\hat{K} = K/\rho_1 g$   $K$  = 运动学的渗透系数

$$\hat{T} = 2L/V_c \quad V_c^2 = (D + K_1/n)/\rho \approx \beta K_1/\rho_1 n$$

$$\approx K_1/\rho_1 \quad (\text{水中声速})$$

$$\beta = \rho_1/\rho, \quad n \approx 0.33, \quad \beta \approx 0.33$$

图3 各种假定适用的区域

题的近似周期就可以了。在图4中，我们指出将如何在实际问题中估计典型尺寸，读者从下列例子中很易自己得到结论：

在水坝（或地基）的地震影响的研究中，设  $L=50$  米，最长周期为5秒。不排水的特性中只能取  $K < 10^{-4}$  米/秒，不然排水效应当是重要的。

在海底产生的孔隙压强问题中， $L=10$  米， $T=10$  秒。我们发现应属 I 区，这时，动力作用很不重要，用固结压实方程的准静力学分析就足够满意了(Madsen, 1978)。

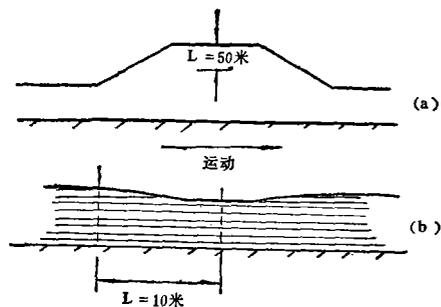


图4 某些结果的外推  
(a)土坝地震运动的典型  $L$  值  
(b)Madsen的波压的典型  $L$  值(1978)

## 第 二 部 分

### 4. 引 论

在第一部份, 我们列出了各种形式的动力学的, 耦合的全部土壤-流体方程, 并发现除了非常高频的现象外, 方程式(19)的近似形式足够用来处理所有现象了. 我们将讨论如何在空间问题中把本系统离散化, 并在时区研究解决过渡过程的问题.

### 5. 流体动力学和静力学的土壤/流体方程的有限元离散化

在下列各式, 我们将

(a) 消去  $d\epsilon$  和  $d\theta$ , 而且

(b) 把应力变化分为有效应力和总应力两部分来决定其总值. 由于  $D$  的非线性只和有效应力有关, 所以这样分开来处理无疑是有益的.

所以, 我们有

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g} &= \rho \ddot{\mathbf{u}} & \text{(a)} \\ d\boldsymbol{\sigma}' &= \mathbf{D}(\mathbf{L}d\mathbf{u} - d\boldsymbol{\epsilon}^0) + (1-\alpha)m dp + \mathbf{R}d\mathbf{u}\boldsymbol{\sigma}' & \text{(b)} \\ d\boldsymbol{\sigma} &= d\boldsymbol{\sigma}' - m dp & \text{(c)} \\ -\nabla^T \bar{\mathbf{K}} \nabla \rho + \nabla^T \bar{\mathbf{K}} \rho_i \mathbf{g} - \nabla^T \rho_i \bar{\mathbf{K}} \ddot{\mathbf{u}} + \alpha m^T \mathbf{L} \dot{\mathbf{u}} & & \\ + \frac{1}{Q} \dot{p} + (m^T \mathbf{D} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^0) / 3K_s &= 0 & \text{(d)} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

在上式中,  $\mathbf{R}$  为用位移表示转动速度的矩阵.

为了把上述系统离散化, 我们取适当的形函数表达式.

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \bar{\mathbf{u}} \quad \mathbf{p} = \bar{\mathbf{N}} \bar{p} \quad (24)$$

而且用加辽金加权法. 详细情况见参考文献 (辛克维奇 1963, 1971, 1977)

其第一式(23a)导出标准的平衡方程式

$$\left. \begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{f} &= 0 \\ \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}' d\Omega + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{Q} \dot{p} + \mathbf{f} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (25a)$$

其中

$\mathbf{B} = \mathbf{L} \mathbf{N}$  为应变矩阵

$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} d\Omega$  为质量矩阵

$\mathbf{Q} = \int_{\Omega} \alpha \mathbf{B}^T m \bar{\mathbf{N}} d\Omega$

$\mathbf{f} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{g} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma$

辅助方程(23b/c)可以直接用离散化的形式写如下式

$$d\bar{\boldsymbol{\sigma}}' = \mathbf{D}(\mathbf{B}d\bar{\mathbf{u}} - d\boldsymbol{\epsilon}^0) + (\mathbf{R}\bar{\mathbf{N}})d\bar{\mathbf{u}}\boldsymbol{\sigma}' \quad (25b)$$

注意到  $d\boldsymbol{\sigma}' = d\bar{\boldsymbol{\sigma}}' + (1-\alpha)m dp$ , 并可通过推导得到证明.

最后, 耦合渗流方程(23d)变成

$$H\ddot{\bar{p}} + S\dot{\bar{p}} + Q^T\ddot{\bar{u}} - \hat{M}\ddot{\bar{u}} + \bar{q} = 0 \quad (25c)$$

其中

$$H = \int_{\Omega} (\nabla \bar{N})^T \bar{K} (\nabla \bar{N}) d\Omega$$

$$S = \int_{\Omega} \bar{N}^T \frac{1}{Q} \bar{N} d\Omega$$

$$\hat{M} = \int_{\Omega} \bar{N}^T \nabla^T (\rho_i \bar{K} \bar{N}) d\Omega$$

而且  $\bar{q}$  涉及初始应变诸项

一般说来, 常微分方程系统(25)是非常非线性的.

(1)  $D$  和  $\sigma'$  以及过去的应变历史有关.

(2) 这个问题的域  $\Omega$  和有限元的域  $\Omega_e$  是根据当时决定的, 在变形发展中, 它随着时间变化.

(3) 矩阵  $B$  和  $RN$  和当时的几何有关.

(4) 如果像经常遇到的那样,  $K$  依赖于变形, 则渗透矩阵  $H$  是可以改变的.

通过步进求解, 所有非线性特性并不会引起麻烦.

如果问题是过渡性问题, 则方程式(25)不论对动力学的或是静力学的固结压实过程, 都能得到所需要的解.

不排水的过程也可以求解, 这里应注意  $K \rightarrow 0$ ,  $H \rightarrow 0$  和  $\hat{M} \rightarrow 0$ , 于是可以用  $du$  决定  $dp$ . 这个方程对定常的静力学的排水特性也是适用的, 当时, 这一问题不是耦合的.

(25)式的线性形式, 在写出来后是很有意思的. 这时, 辅助的应力增量方程可以得到积分, 而且其系统可以写成为

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ -\hat{M} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\bar{u}} \\ \ddot{\bar{p}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ Q^T & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\bar{u}} \\ \dot{\bar{p}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K & -Q \\ 0 & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f \\ q \end{bmatrix} = 0 \quad (26)$$

其中  $f$  和  $q$  包括了一切初始应力的效应. 我们指出, 上述系统并不对称, 并且不便于用联合求解法求解.

## 6. 时间步进—交错过程

正如我们在前文指出的那样, 即使线性耦合系统也不便于同时求直接的联合解法. 所以, 交错求解过程 (见 Park 和 Felipe, 1980) 将是便于使用的方法.

在这一交错解法中, 我们将用标准时间步长的算法来求解第一方程组 (25a/b), 用这一算法来计算孔隙压强系统的方法是已知的, 我们在这里把施加的响应作为已知力处理的. 即

$$\int_{\Omega} B^T \sigma' d\Omega + M\dot{\bar{u}} + \bar{f} = 0 \quad (27a)$$

$$d\sigma' = D(Bdu - d\epsilon^0) + RN\sigma'$$

它直截了当是一个标准二阶动力学方程. 这里取

$$\bar{f} = f - Q\bar{p} \quad (27b)$$

并认为是已知的. 它可以用 Newmark 或其它方法按时间步长分步求解.

只要增量  $\Delta u$  的计算完成, 我们就可以求解  $\bar{p}$  的一阶微分方程

$$H\dot{\bar{p}} + S\dot{\bar{p}} + \bar{q} = 0 \quad (27c)$$

其中  $q$  是已知的,  $\bar{q}$  为

$$\dot{q} = q + Q^T \ddot{u} - \dot{M} \ddot{u} \quad (27d)$$

在水坝和其它结构物的动力分析的例子中, 我们广泛使用显过程(中心差分)求解(27a), 而用隐过程(向后差分)求解(27d)。

当然, 也可以用其它计算过程。我们应当重视建立一种时间步长可以变化到几个量级的计算步骤, 这样就能处理快速现象(如地震)之后继以较缓慢的固结阶段的那种过程。

### 参 考 文 献

1. Biot, M. A., Theory of three-dimensional consolidation, *J. of Appl. Phys.*, 12, (1941) 155-164.
2. Biot, M. A., Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media, *J. of Appl. Phys.*, 33, (1960) 1483-99.
3. Madsen, O. S., Wave Induced pore pressure and effective stresses in a porous bed, *Geotechnique*, 28, 377-383.
4. Park, K. C. and Felipe, C. A., *Partitioned transient analysis procedures for coupled field problems-accuracy analysis*. (to be published).
5. Terzhagi, K., *Erdboumchanik*, Franz Deuticke, Vienna, (1925).
6. William, T. and Whitman, R. V., *Soil Mechanics*, John Wiley, (1969).
7. Zienkiewicz, O. C., *The Finite Element Method*, Third Edition, McGraw-Hill, (1977).
8. Zienkiewicz, O. C., Humpheson, C. and Lewis, R., A unified approach to soil mechanics problems, Chapter 4 of *Finite Elements in Geomechanics*, ed. G. Gudehus, John Wiley, (1977), 151-178.
9. Zienkiewicz, O. C. and Bettess, P., Soil and other porous material under transient, dynamic condition, general formulation and validity of various simplified assumptions, in *Soils under Cyclic and Transient Loading*, eds. Panade, G. N. and Zienkiewicz, O. C., John Wiley, (to be published).
10. Zienkiewicz, O. C., Leung, K. H., Hinton, E. and Chang, C. T., Earthdam analysis for earthquakes, *Proceedings of Conference on "Design of Dams to Resist Earthquakes"*, Inst. Civ. Eng. London, Oct., (1980), 1-2.

## Basic Formulation of Static and Dynamic Behaviours of Soil and Other Porous Media

O. C. Zienkiewicz

(University of Wales, Swansea, U. K.)

### Abstract

This paper treats the soil and rock or concrete as a two-phase medium composed of a solid skeleton and an interstitial field. Under the unsaturated condition of interstitial fluid, the third-phase is taken into consideration. In this paper, we consider the constitutive relation, dynamic and kinematic relations, and also various approximations with their limits of validity, including those of most practical engineering situations such as the consolidation problem and the undrained behaviour. The finite element discretization and the time dependent solution of various classes of soil problem are also discussed.