应用数学和力学，第3卷第5期（1982年9月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

有激发和衰减的有限长裂缝Ⅱ型破裂过程研究

范家参　　徐　平

（云南省地震局）（云南大学地球物理系）

（钱伟长推荐，1981年12月25日收到）

摘　要

本文考虑在Rayleigh阻尼作用时，沿裂缝长的边界上有剪应力作用，使裂缝一端失稳而产生快速扩展（即Ⅱ型破裂）问题.应用奇异摄动理论[1]及广义富氏级数，给出这个非线性断裂动力学问题的逐次逼近解.较之已有成果，本文考虑了非线性阻尼并给出各级近似解的显式.

一、引　言

断裂力学是六十年代才蓬勃发展起来的一门固体力学的新学科，由于它在实践中有广泛应用，因而表现出强大的生命力，引起了大家的重视.而断裂动力学则是断裂力学中较困难也是更有用的一个分枝，这方面的工作可谓处于初创开始阶段.有的文献假定裂缝以匀速破裂[2]，有的用平均破裂速度这个常速度值考虑问题[3]，即使用变速度研究扩展破裂的工作[4],[5]，也没有考虑阻尼的作用.但在裂缝失稳后快速扩展的破裂过程中，阻尼的重要作用不容忽略，例如摩擦力就是一种阻尼.

从断裂力学分析[6]，裂缝失稳后的快速扩展过程是破裂速度从零迅速增长至极大值（超过空气中的音速，约为1.5～3公里/秒）又迅速衰减至零.在此过程中，刚开始的低速破裂扩展，激发力（负阻尼力）将激发它加速扩展，而在破裂速度加快达一定值后，阻尼力就促使破裂速度衰减直至运动停止.因此破裂扩展过程包括了激发和衰减，不能用通常的线性阻尼项来描述这一过程.为此我们引用文献[1]介绍的Rayleigh阻尼来讨论问题，Rayleigh阻尼的阻尼系数λ为：

$$\lambda=-A+B\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \tag{1.1}$$

在(1.1)式中，A和B为正的常数，须通过实验而求得各种介质中的A和B之值 $\frac{\partial u}{\partial t}$为质点的运动速度.此式表明：在运动速度较小时$-A$为主会激发运动加速，当速度等于和大于某定值后，$B\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2$为主又会使运动衰减.(1.1)式表达了低速时线性速度激发力加速运动和高

速运动时速度立方项的阻尼力会使运动衰减.在高速空气动力学中已证实，超音速飞行器与空气间的摩阻力是与运动速度立方正比的.

二、基 本 原 理

本文考虑有限长裂缝只有一端失稳破裂，只考虑它的瞬时效应，因此可以不考虑两端点之间动力反射效应的相互影响.

裂缝处于平面应变状态如图1所示，介质是匀质、各向同性的线弹性体，裂缝表面只受剪应力作用. 图中所示的直角坐标已规范化即无量纲化，x坐标为普通坐标值除以半条裂缝长度，y坐标为普通坐标值除以半个裂缝宽度，故裂缝表面的初值定义 在$-1\leqslant x\leqslant 1$，$y=0\pm$.

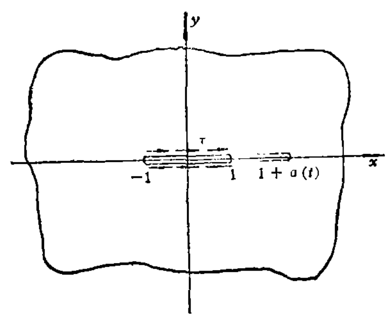

图 1

以下我们只考虑裂缝右端的失稳扩展破裂.本文里时间变量t为普通时间除以纵波通过半条裂缝长所需的时间而规范化.裂缝右端的位移用$a(t)$表示，故在$t>0$时，裂缝右尖端的位置为$x=1+a(t)$，$y=0\pm$，破裂速度为$\dot{a}(t)=\dfrac{da(t)}{dt}$，$0<\dot{a}(t)<c_s$，$c_s$为横波速度. 当$t\leqslant 0$时$\dot{a}(t)=0$.用$K$表示横波速度和纵波速度的比例，$K<1$.用$u$和$v$分别表示在规范化坐标里$x$和$y$方向质点的位移.考虑Rayleigh阻尼的作用，则问题为求解下列微分方程组[2]：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+K^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+(1-K^2)\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\left[-A+B\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]\frac{\partial u}{\partial t} \tag{2.1a}$$

$$K^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+(1-K^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+\left[-A+B\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2\right]\frac{\partial v}{\partial t} \tag{2.1b}$$

用位移表示的应力分量公式是：

$$\sigma_x=\frac{1}{K^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\left(\frac{1}{K^2}-2\right)\frac{\partial v}{\partial y} \tag{2.2a}$$

$$\sigma_y=\left(\frac{1}{K^2}-2\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{K^2}\frac{\partial v}{\partial y} \tag{2.2b}$$

$$\tau_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x} \tag{2.2c}$$

以上三式中的应力值为普通应力值除以介质的剪切模数而无量纲化.

破裂面的边界条件是：

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_y(x,0\pm,t)=0 &(2.3\text{a})\\ &\tau_{xy}(x,0\pm,t)=\tau(x,t)\text{已知} &(2.3\text{b})\end{aligned}\right\}x<1+a(t)$$

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_y(x,0\pm,t)=0 &(2.3\text{c})\\ &\tau_{xy}(x,0\pm,t)=0 &(2.3\text{d})\end{aligned}\right\}x>1+a(t)$$

初始条件是：

$$u(x,y,0)=0\,,\qquad v(x,y,0)=0 \tag{2.4a,b}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0\,,\qquad \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0}=0 \tag{2.4c,d}$$

三、用摄动法推导出逐次逼近的线性化方程组

由(1.1)式可知，B比A小两个速度数量级，而破裂速度很快，因此B值很小，在附录中我们证明$B<1$，因此B是小参数，可把v和v依此小参数展成收敛的幂级数：

$$u(x,y,t)=u_0(x,y,t)+Bu_1(x,y,t)+B^2u_2(x,y,t)+\cdots+B^nu_n(x,y,t)+\cdots \tag{3.1a}$$

$$v(x,y,t)=v_0(x,y,t)+Bv_1(x,y,t)+B^2v_2(x,y,t)+\cdots+B^nv_n(x,y,t)+\cdots \tag{3.1b}$$

将(3.1)代入(2.1)可得：

零级近似：

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+K^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}+(1-K^2)\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}-A\frac{\partial u_0}{\partial t} \tag{3.2a}$$

$$K^2\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}+(1-K^2)\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}-A\frac{\partial v_0}{\partial t} \tag{3.2b}$$

一级近似：

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+K^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}+(1-K^2)\frac{\partial^2 v_1}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}-A\frac{\partial u_1}{\partial t}+\left(\frac{\partial u_0}{\partial t}\right)^3 \tag{3.3a}$$

$$K^2\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}+(1-K^2)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2}-A\frac{\partial v_1}{\partial t}+\left(\frac{\partial v_0}{\partial t}\right)^3 \tag{3.3b}$$

二级近似：

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+K^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}+(1-K^2)\frac{\partial^2 v_2}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}-A\frac{\partial u_2}{\partial t}+3\left(\frac{\partial u_0}{\partial t}\right)^2\frac{\partial u_1}{\partial t} \tag{3.4a}$$

$$K^2\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2}+(1-K^2)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2}-A\frac{\partial v_2}{\partial t}+3\left(\frac{\partial v_0}{\partial t}\right)^2\frac{\partial v_1}{\partial t} \tag{3.4b}$$

三级近似：

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2}+K^2\frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2}+(1-K^2)\frac{\partial^2 v_3}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}-A\frac{\partial u_3}{\partial t}+3\left(\frac{\partial u_0}{\partial t}\right)^2\frac{\partial u_2}{\partial t}$$
$$+3\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)^2\frac{\partial u_0}{\partial t} \tag{3.5a}$$

$$K^2\frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_3}{\partial y^2}+(1-K^2)\frac{\partial^2 u_3}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2}-A\frac{\partial v_3}{\partial t}+3\left(\frac{\partial v_0}{\partial t}\right)^2\frac{\partial v_2}{\partial t}$$
$$+3\left(\frac{\partial v_1}{\partial t}\right)^2\frac{\partial v_0}{\partial t} \tag{3.5b}$$

………………………

将(3.2)和(2.2)代入边界条件(2.3)及初始条件(2.4)而有:

$$\sigma_y(x,0\pm,t)=\left[\frac{1}{K^2}\frac{\partial u_0}{\partial x}+\left(\frac{1}{K^2}-2\right)\frac{\partial v_0}{\partial y}\right]_{y=0\pm}=0 \tag{3.6a}$$

$$\tau_{xy}(x,0\pm,t)=\left[\frac{\partial u_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial x}\right]_{y=0\pm}=\begin{cases}\tau(x,t)\text{已知}, & x\leqslant 1+a(t)\\ 0, & x>1+a(t)\end{cases} \tag{3.6b}$$

$$u_0(x,y,0)=0 \qquad v_0(x,y,0)=0 \tag{3.6c,d}$$

$$\left.\frac{\partial u_0}{\partial t}\right|_{t=0}=0 \qquad \left.\frac{\partial v_0}{\partial t}\right|_{t=0}=0 \tag{3.6c,f}$$

对一级近似及以后各级近似，均为零边界条件和零初始条件.

四、求解逐次逼近方程组

Ⅱ型破裂是沿裂缝长有剪应力τ_{xy}作用而产生的倾向滑动破裂.我们用伽利略变换将静坐标系(x,y,t)变换为动坐标系(ξ,y',t')，它们之间的关系为:

$$x=\xi+a(t),\quad y=y',\quad t=t' \tag{4.1}$$

上式中$a(t)$是裂缝右端的位移，因为是非匀速破裂，故$\dot a(t)$不是常数而是t的函数，其具体形式将在后面给出.将(4.1)代入(3.2)并注意到关系式:

$$\frac{\partial u_0}{\partial t}=\frac{\partial u_0}{\partial t'}-\dot a\frac{\partial u_0}{\partial \xi} \tag{4.2a}$$

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u_0}{\partial t'^2}+\dot a^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial \xi^2}-2\dot a\frac{\partial^2 u_0}{\partial \xi\partial t'}-\ddot a\frac{\partial u_0}{\partial \xi} \tag{4.2b}$$

可得到零级近似解在动坐标系的方程:

$$\begin{aligned}(1-\dot a^2)\frac{\partial^2 u_0}{\partial \xi^2}+(\ddot a-A\dot a)\frac{\partial u_0}{\partial \xi}+K^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}+(1-K^2)\frac{\partial^2 v_0}{\partial \xi\partial y}\\ =\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}-2\dot a\frac{\partial^2 u_0}{\partial t\partial \xi}-A\frac{\partial u_0}{\partial t}\end{aligned} \tag{4.3a}$$

$$\begin{aligned}(K^2-\dot a^2)\frac{\partial^2 v_0}{\partial \xi^2}+(\ddot a-A\dot a)\frac{\partial v_0}{\partial \xi}+\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}+(1-K^2)\frac{\partial^2 u_0}{\partial \xi\partial y}\\ =\frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}-2\dot a\frac{\partial^2 v_0}{\partial t\partial \xi}-A\frac{\partial v_0}{\partial t}\end{aligned} \tag{4.3b}$$

上两式中$\dot a(t)=\dfrac{da(t)}{dt}$，$\ddot a(t)=\dfrac{d^2a(t)}{dt^2}$；设$u_0$及$v_0$的解为:

$$u_0(x,y,t)=u_0(\xi,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}^{(0)}(t)H(1-\xi)\cos m\pi\xi\sin n\pi y \tag{4.4a}$$

$$v_0(x,y,t)=v_0(\xi,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}B_{mn}^{(0)}(t)H(1-\xi)\sin m\pi\xi\cos n\pi y \tag{4.4b}$$

上两式中 $H(\xi)=\begin{cases}1,\xi\geqslant 0\\0,\xi<0\end{cases}$ 为单位跃阶函数，$A_{mn}^{(0)}(t)$ 及 $B_{mn}^{(0)}(t)$ 为待定的时间 t 的函数.代(4.4)式入初始条件并应用富氏级数正交性，可得：

$$A_{0n}^{(0)}(t)=0,\quad B_{m0}^{(0)}(t)=0,\quad (m,n=1,2,3,\cdots) \tag{4.4$'$}$$

故在(4.4a)及(4.4b)两式中，m及n取和均从1开始.

将(4.4)两式代入(4.3)两式并应用富氏级数的正交性，可得如下四式：

$$\frac{d^2A_{mn}^{(0)}(t)}{dt^2}-A\frac{dA_{mn}^{(0)}(t)}{dt}+[(1-\dot{a}^2)m^2+K^2n^2]\pi^2A_{mn}^{(0)}(t)$$

$$=-(1-K^2)mn\pi^2B_{mn}^{(0)}(t) \tag{4.5a}$$

$$\frac{dA_{mn}^{(0)}(t)}{dt}+\frac{1}{2}\left(\frac{\ddot{a}}{\dot{a}}-A\right)A_{mn}^{(0)}(t)=0 \tag{4.5b}$$

$$\frac{d^2B_{mn}^{(0)}(t)}{dt^2}-A\frac{dB_{mn}^{(0)}(t)}{dt}+[(K^2-\dot{a}^2)m^2+n^2]\pi^2B_{mn}^{(0)}(t)$$

$$=-(1-K^2)mn\pi^2A_{mn}^{(0)}(t) \tag{4.5a$'$}$$

$$\frac{dB_{mn}^{(0)}(t)}{dt}+\frac{1}{2}\left(\frac{\ddot{a}}{\dot{a}}-A\right)B_{mn}^{(0)}(t)=0 \tag{4.5b$'$}$$

为了求解上面四式，我们取：

$$\dot{a}(t)=\dot{a}_M\sin\frac{\pi}{2\tau}t \tag{4.6}$$

上式中$\dot{a}_M<1$为规范化的最大破裂速度，τ为达到最大破裂速度所需的时间，$\dot{a}_M$和τ均为常数.代(4.6)入(4.5b)及(4.5b)′得到：

$$\frac{dA_{mn}^{(0)}(t)}{dt}+\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2\tau}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2\tau}t-A\right]A_{mn}^{(0)}(t)=0 \tag{4.7a}$$

$$\frac{dB_{mn}^{(0)}(t)}{dt}+\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2\tau}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2\tau}t-A\right]B_{mn}^{(0)}(t)=0 \tag{4.7b}$$

以上两式的解为：

$$A_{mn}^{(0)}(t)=F_1e^{\frac{A}{2}t}\Big/\sqrt{\sin\frac{\pi}{2\tau}t} \tag{4.8a}$$

$$B_{mn}^{(0)}(t)=F_2e^{\frac{A}{2}t}\Big/\sqrt{\sin\frac{\pi}{2\tau}t} \tag{4.8b}$$

上两式中F_1及F_2为积分常数.从上两式可看出，在时间定义区间内有$t=0$及$t=2\tau$处出现奇异值，不符合定解条件，所以(4.8a)及(4.8b)为奇异摄动理论中出现的永年项(secular term)[1] 而必须消除，因此取 $F_1=F_2=0$，于是只须求解 (4.5a)及 (4.5a)′两式即可，为求解这两式，进行下列变换：

$$A_{mn}^{(0)}(t)=e^{\frac{A}{2}t}\,\alpha_{mn}^{(0)}(t) \tag{4.9a}$$

$$B_{mn}^{(0)}(t)=e^{\frac{A}{2}t}\,\beta_{mn}^{(0)}(t) \tag{4.9b}$$

再令：

$$T=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{t}{\tau}\right) \tag{4.10}$$

将(4.9)及(4.10)代入(4.5a)及(4.5a)′对应的齐次方程，可得下列的标准Mathieu 方程[7],[8]：

$$\frac{d^2\alpha_{mn}^{(0)}(T)}{dT^2}+(\lambda_{mn}-2q_m\cos 2T)\alpha_{mn}^{(0)}(T)=0 \tag{4.11a}$$

$$\frac{d^2\beta_{mn}^{(0)}(T)}{dT^2}+(\bar{\lambda}_{mn}-2q_m\cos 2T)\beta_{mn}^{(0)}(T)=0 \tag{4.11b}$$

上两式中：

$$\left.\begin{aligned}
&q_m=\dot{a}_M^2\ m^2\ \tau^2\\
&\lambda_{mn}=4\tau^2K^2n^2+4\tau^2m^2-2\dot{a}_M^2\tau^2m^2-\frac{A^2\tau^2}{\pi^2}\\
&\bar{\lambda}_{mn}=4\tau^2n^2+4\tau^2K^2m^2-2\dot{a}_M^2\tau^2m^2-\frac{A^2\tau^2}{\pi^2}
\end{aligned}\right\} \tag{4.11c}$$

在本文中我们不取Mathieu 方程以se_n，ce_n无穷级数表示的完备解，而用 WKBJ 法在稳定区域内的近似解[8]，它比前者更适用.例如(4.11a)的两个基本解可表之为：

$$W_1(T)=\sum_{r=-\infty}^{\infty}J_r\left(\frac{q_m}{2\sqrt{\lambda_{mn}}}\right)\cos\left(\sqrt{\lambda_{mn}}-2r\right)T \tag{4.12a}$$

$$W_2(T)=\sum_{r=-\infty}^{\infty}J_r\left(\frac{q_m}{2\sqrt{\lambda_{mn}}}\right)\sin\left(\sqrt{\lambda_{mn}}-2r\right)T \tag{4.12b}$$

显然由(4.11c)可以看到，$\lambda_{mn}>q_m>0$，因此贝塞尔函数$J_r\left(\frac{q_m}{2\sqrt{\lambda_{mn}}}\right)$随$r$之增加而下降很快，故以上两式的无穷级数收敛迅速，可以取有限项即可.

$$W_1(T)=\sum_{r=-r_0}^{r_0}J_r\left(\frac{q_m}{2\sqrt{\lambda_{mn}}}\right)\cos\left(\sqrt{\lambda_{mn}}-2r\right)T \tag{4.12a$'$}$$

$$W_2(T)=\sum_{r=-r_0}^{r_0}J_r\left(\frac{q_m}{2\sqrt{\lambda_{mn}}}\right)\sin\left(\sqrt{\lambda_{mn}}-2r\right)T \tag{4.12b$'$}$$

上两式中r_0为某一正整数且适合条件 $r_0<\sqrt{\lambda_{mn}}$.

应用"常数变更法"求(4.5a)及(4.5a)′两式以变量T表示的非齐次方程的特解，表之如下：

$$\bar{\alpha}_{mn}^{(0)}(T)=C_1(T)W_1(T)+C_2(T)W_2(T) \tag{4.13a}$$

$$\bar{\beta}_{mn}^{(0)}(T)=f_1(T)Y_1(T)+f_2(T)Y_2(T) \tag{4.13b}$$

上两式中，$C_1(T)$，$C_2(T)$，$f_1(T)$及$f_2(T)$都是待定的函数．$Y_1(T)$和$Y_2(T)$是$\beta_{mn}^{(0)}(T)$的两个基本解，只要把$W_1(T)$和$W_2(T)$表达式(4.12a)和(4.12b)里的λ_{mn}换为Λ_{mn}即得$Y_1(T)$和$Y_2(T)$的表达式．

由"常数变更法"，有以下四式来决定上述四个待定函数：

$$\frac{dC_1(T)}{dT}W_1(T)+\frac{dC_2(T)}{dT}W_2(T)=0 \tag{4.14a}$$

$$\frac{dC_1(T)}{dT}\frac{dW_1(T)}{dT}+\frac{dC_2(T)}{dT}\frac{dW_2(T)}{dT}=-4(1-K^2)mn\tau^2\beta_{mn}^{(0)}(T) \tag{4.14b}$$

$$\frac{df_1(T)}{dT}Y_1(T)+\frac{df_2(T)}{dT}Y_2(T)=0 \tag{4.14a)'$$

$$\frac{df_1(T)}{dT}\frac{dY_1(T)}{dT}+\frac{df_2(T)}{dT}\frac{dY_2(T)}{dT}=-4(1-K^2)mn\tau^2\alpha_{mn}^{(0)}(T) \tag{4.14b)'$$

由初始条件$C_1\left(\frac{\pi}{2}\right)=C_2\left(\frac{\pi}{2}\right)=f_1\left(\frac{\pi}{2}\right)=f_2\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$，可以得到：

$$C_1(T)=4(1-K^2)mn\tau^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{T}\frac{W_2(T)\bar{\beta}_{mn}^{(0)}(T)}{\frac{dW_1(T)}{dT}W_2(T)-W_1(T)\frac{dW_2(T)}{dT}}dT \tag{4.15a}$$

$$C_2(T)=-4(1-K^2)mn\tau^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{T}\frac{W_1(T)\bar{\beta}_{mn}^{(0)}(T)}{\frac{dW_1(T)}{dT}W_2(T)-W_1(T)\frac{dW_2(T)}{dT}}dT \tag{4.15b}$$

$$f_1(T)=4(1-K^2)mn\tau^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{T}\frac{Y_2(T)\bar{\alpha}_{mn}^{(0)}(T)}{\frac{dY_1(T)}{dT}Y_2(T)-Y_1(T)\frac{dY_2(T)}{dT}}dT \tag{4.15a)'$$

$$f_2(T)=-4(1-K^2)mn\tau^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{T}\frac{Y_1(T)\bar{\alpha}_{mn}^{(0)}(T)}{\frac{dY_1(T)}{dT}Y_2(T)-Y_1(T)\frac{dY_2(T)}{dT}}dT \tag{4.15b)'$$

以上四式都是伏尔特拉型积分方程，它们两个组合成为一对偶积分方程，相当于断裂静力学里的对偶积分方程．由于上面四式求解不如下述方法方便，故我们只写出这四式而不具体求解．

我们取：

$$C_1(T)=\sum_{r=-r_0}^{r_0} a_r^{(0)}\cos\left(\sqrt{\lambda_{mn}}-2r\right)T \tag{4.16a}$$

$$C_2(T)=\sum_{r=-r_0}^{r_0} a_r^{(0)}\sin\left(\sqrt{\lambda_{mn}}-2r\right)T \tag{4.16b}$$

$$f_1(T)=\sum_{r=-r_0}^{r_0} b_r^{(0)}\cos\left(\sqrt{\lambda_{mn}}-2r\right)T \tag{4.16a$'$}$$

$$f_2(T)=\sum_{r=-r_0}^{r_0} b_r^{(0)}\sin\left(\sqrt{\lambda_{mn}}-2r\right)T \tag{4.16b$'$}$$

以上四式中 $a_r^{(0)}$和 $b_r^{(0)}$为待定常数，易知此四式已满足“常数变更法”的第一式，即满足(4.14a)和(4.14a)$'$，故(4.15a)以变量T表示的特解是：

$$\bar{\alpha}_{mn}^{(0)}=\sum_{r=-r_0}^{r_0}\sum_{s=-r_0}^{r_0} a_r^{(0)}J_s\left(\frac{q_m}{2\sqrt{\lambda_{mn}}}\right)\cos 2(r-s)T \tag{4.17}$$

于是我们得到(4.15a)和(4.15a)$'$以T表示的解：

$$\alpha_{mn}^{(0)}(T)=\sum_{r=-r_0}^{r_0} C_r^{(0)}J_r\left(\frac{q_m}{2\sqrt{\lambda_{mn}}}\right)\cos\left(\sqrt{\lambda_{mn}}-2r\right)T+\sum_{r=-r_0}^{r_0} f_r^{(0)}J_r\left(\frac{q_m}{2\sqrt{\lambda_{mn}}}\right)$$
$$\cdot\sin\left(\sqrt{\lambda_{mn}}-2r\right)T+\sum_{r=-r_0}^{r_0}\sum_{s=-r_0}^{r_0} a_r^{(0)}J_s\left(\frac{q_m}{2\sqrt{\lambda_{mn}}}\right)\cos 2(r-s)T \tag{4.18a}$$

$$\beta_{mn}^{(0)}(T)=\sum_{r=-r_0}^{r_0} g_r^{(0)}J_r\left(\frac{q_m}{2\sqrt{\lambda_{mn}}}\right)\cos\left(\sqrt{\lambda_{mn}}-2r\right)T+\sum_{r=-r_0}^{r_0} h_r^{(0)}J_r\left(\frac{q_m}{2\sqrt{\lambda_{mn}}}\right)$$
$$\cdot\sin\left(\sqrt{\lambda_{mn}}-2r\right)T+\sum_{r=-r_0}^{r_0}\sum_{s=-r_0}^{r_0} b_r^{(0)}J_s\left(\frac{q_m}{2\sqrt{\lambda_{mn}}}\right)\cos 2(r-s)T \tag{4.18b}$$

将(4.18a)和(4.18b)代入初始条件(3.6c)至(3.6f)，而得：

$$\sum_{r=-r_0}^{r_0} c_r^{(0)}J_r\left(\frac{q_m}{2\sqrt{\lambda_{mn}}}\right)+\sum_{r=-r_0}^{r_0}\sum_{s=-r_0}^{r_0} a_r^{(0)}J_s\left(\frac{q_m}{2\sqrt{\lambda_{mn}}}\right)=0 \tag{4.19a}$$

$$\sum_{r=-r_0}^{r_0} g_r^{(0)}J_r\left(\frac{q_m}{2\sqrt{\lambda_{mn}}}\right)+\sum_{r=-r_0}^{r_0}\sum_{s=-r_0}^{r_0} b_r^{(0)}J_s\left(\frac{q_m}{2\sqrt{\lambda_{mn}}}\right)=0 \tag{4.19b}$$

$$\sum_{r=-r_0}^{r_0} f_r^{(0)}\left(\sqrt{\lambda_{mn}}-2r\right)J_r\left(\frac{q_m}{2\sqrt{\lambda_{mn}}}\right)=0 \tag{4.19c}$$

$$\sum_{r=-r_0}^{r_0} h_r^{(0)}\left(\sqrt{\bar{\lambda}_{mn}}-2r\right)J_r\left(\frac{q_m}{2\sqrt{\bar{\lambda}_{mn}}}\right)=0 \tag{4.19d}$$

当$m\neq n$时，$\lambda_{mn}\neq\lambda_{nm}$和$\bar{\lambda}_{mn}\neq\bar{\lambda}_{nm}$，故(4.19c)及(4.19d)两式不可能产生特征值而使待定系数$f_r^{(0)}$和$h_r^{(0)}$有非零解，故必须取：

$$f_r^{(0)}=h_r^{(0)}=0 \tag{4.20}$$

于是(4.18)式变成：

$$\alpha_{mn}^{(0)}(T)=\sum_{r=-r_0}^{r_0} c_r^{(0)}J_r\left(\frac{q_m}{2\sqrt{\bar{\lambda}_{mn}}}\right)\cos\left(\sqrt{\bar{\lambda}_{mn}}-2r\right)T$$

$$+\sum_{r=-r_0}^{r_0}\sum_{s=-r_0}^{r_0} a_r^{(0)}J_s\left(\frac{q_m}{2\sqrt{\lambda_{mn}}}\right)\cos 2(r-s)T \tag{4.21a}$$

$$\beta_{mn}^{(0)}(T)=\sum_{r=-r_0}^{r_0} g_r^{(0)}J_r\left(\frac{q_m}{2\sqrt{\bar{\lambda}_{mn}}}\right)\cos\left(\sqrt{\bar{\lambda}_{mn}}-2r\right)T$$

$$+\sum_{r=-r_0}^{r_0}\sum_{s=-r_0}^{r_0} b_r^{(0)}J_s\left(\frac{q_m}{2\sqrt{\lambda_{mn}}}\right)\cos 2(r-s)T \tag{4.21b}$$

把上两式代入u_0和v_0的表达式(4.9)和(4.4)再代入边界条件(3.6)而得：

$$\pi e^{\frac{A\tau}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-T\right)}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[n\alpha_{mn}^{(0)}(T)+m\beta_{mn}^{(0)}(T)\right]\cos m\pi\xi=\tau(x,T) \tag{4.22}$$

在上式里，边界条件中动坐标ξ必须用静坐标$x-a(t)$代替，且：

$$a(t)=a(T)=\frac{2\tau}{\pi}\dot{a}_M(1-\sin T) \tag{4.23}$$

将(4.23)代入(4.22)并利用富氏级数的正交性，而得以下两式决定待定系数：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[n\alpha_{mn}^{(0)}(T)+m\beta_{mn}^{(0)}(T)\right]\cos^2[m\pi a(T)]dT$$

$$=\int_0^1\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{\pi}e^{-\frac{A\tau}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-T\right)}\cos m\pi x\cos[m\pi a(T)]\tau(x,T)dxdT \tag{4.24a}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[n\alpha_{mn}^{(0)}(T)+m\beta_{mn}^{(0)}(T)\right]\sin^2[m\pi a(T)]dT$$

$$=\int_0^1\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{\pi}e^{-\frac{A\tau}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-T\right)}\tau(x,T)\sin m\pi x\sin[m\pi a(T)]dxdT \tag{4.24b}$$

$$(m=1,2,3,\cdots\cdots)$$

由方程(4.19a)、(4.19b)、(4.24a)和(4.24b)四式即可决定系数$a_r^{(0)},b_r^{(0)},c_r^{(0)}$及$g_r^{(0)}$。

下面我们就稳态匀布剪应力$\tau(x,T)=\tau_0=\cos nt$的简单情况，把(4.24a)和(4.24b)的积分算出来．

由文献[10]有：

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos qT\cos(l\sin T)\,dT=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos qT[J_0(l)+2\sum_{k=1}^{\infty}J_{2k}(l)\cos 2kT]dT$$

$$=\frac{2}{q}\sin\frac{q\pi}{2}J_0(l)+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{q}{q^2-(2k)^2}J_{2k}(l)\sin\frac{q\pi}{2}$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 2(r-s)T\cos(l\sin T)dT=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j+r-s}}{(2j)!}\left(\frac{l}{2}\right)^{2j}\binom{2j}{j+s-r}$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}e^{pT}\cos(\bar{l}\sin T)dT=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(2j)!}\bar{l}^{2j}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(e^{pT}-e^{-pT})\sin^{2j}TdT$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j\bar{l}^{-2j}}{p(p^2+2^2)(p^2+4^2)\cdots[p^2+(2j)^2]}\left(e^{\frac{p\pi}{2}}-e^{-\frac{p\pi}{2}}\right)\left\{1+\frac{p^2}{2!}\right.$$

$$\left.+\frac{p^2(p^2+2^2)}{4!}+\cdots+\frac{p^2(p^2+2^2)\cdots[p^2+(2j-2)^2]}{(2j)!}\right\}$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}e^{pT}\sin(\bar{l}\sin T)dT=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(2j+1)!}\bar{l}^{2j+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(e^{pT}-e^{-pT})\sin^{2j+1}TdT$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j\bar{l}^{2j+1}\cdot p}{(p^2+1^2)(p^2+3^2)\cdots[p^2+(2j+1)^2]}\left(e^{\frac{p\pi}{2}}+e^{-\frac{p\pi}{2}}-2\right)\left\{1+\frac{p^2+1}{3!}\right.$$

$$\left.+\cdots\cdots+\frac{(p^2+1^2)(p^2+3^2)\cdots[p^2+(2j-1)^2]}{(2j+1)!}\right\}$$

以上各式中，$l=4m\tau\dot{a}_M$，$q=\sqrt{\lambda_{mn}}-2r$，$p=\frac{A\tau}{\pi}$以及有$\bar{l}=2m\tau\dot{a}_M$，$\bar{q}=\sqrt{\lambda_{mn}}-2r$．

因积分上下限为反对称，若被积函数是奇函数，则定积分值为零而不在此写出．

将以上积分公式及(4.23)式应用于(4.24)，并应用富氏级数的正交性而得：

$$\sum_{n=1}^{2r_0}n\left\{\sum_{r=-r_0}^{r_0}c_r^{(0)}J_r\left(\frac{q_m}{2\sqrt{\lambda_{mn}}}\right)\left[\frac{\sin\frac{q_m}{2}}{q}+\frac{2}{q}\sin\frac{q\pi}{2}\cos lJ_0(l)\right.\right.$$

$$+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{q\cos l}{q^2-(2k)^2}J_{2k}(l)\sin\frac{q\pi}{2}+\sum_{r=-r_0}^{r_0}\sum_{s=-r_0}^{r_0}a_r^{(0)}J_s\left(\frac{q_m}{2\sqrt{\lambda_{mn}}}\right)$$

$$\left.\cdot\cos l\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{(j+r-s)}}{(2j)!}\left(\frac{l}{2}\right)^{2j}\binom{2j}{j+s-r}\right\}+m\sum_{n=1}^{2r_0}\left\{\sum_{r=-r_0}^{r_0}g^{(0)}J_r\left(\frac{q_m}{2\sqrt{\lambda_{mn}}}\right)\right.$$

$$\cdot\left[\frac{\sin\frac{\bar{q}\pi}{2}}{q}+\frac{2}{\bar{q}}J_0(l)\cos l\sin\frac{\bar{q}\pi}{2}+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\bar{q}\cos l}{\bar{q}^2-(2k)^2}J_{2k}(l)\sin\frac{\bar{q}\pi}{2}\right]$$

$$+\sum_{r=-r_0}^{r_0}\sum_{s=-r_0}^{r_0}b_r^{(0)}J_s\left(\frac{q_m}{2\sqrt{\bar{\lambda}_{mn}}}\right)\cos l\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{(r+j-s)}}{(2j)!}\left(\frac{l}{2}\right)^{2j}\binom{2j}{j+s-r}\Bigg\}=0$$

(4.25a)

$$\sum_{n=1}^{2r_0}n\Bigg\{\sum_{r=-r_0}^{r_0}c_r^{(0)}J_r\left(\frac{q_m}{2\sqrt{\bar{\lambda}_{mn}}}\right)\left[\frac{\sin\frac{q\pi}{2}}{q}-\frac{2}{q}\sin\frac{q\pi}{2}\cos lJ_0(l)\right.$$

$$\left.-4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{q\cos l}{q^2-(2k)^2}J_{2k}(l)\sin\frac{q\pi}{2}\right]-\sum_{r=-r_0}^{r_0}\sum_{s=-r_0}^{r_0}a_r^{(0)}J_s\left(\frac{q_m}{2\sqrt{\bar{\lambda}_{mn}}}\right)$$

$$\cdot\cos l\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j+r-s}}{(2j)!}\left(\frac{l}{2}\right)^{2j}\binom{2j}{j+s-r}\Bigg\}+m\sum_{n=1}^{2r_0}\Bigg\{\sum_{r=-r_0}^{r_0}g_r^{(0)}J_r\left(\frac{q_m}{2\sqrt{\bar{\lambda}_{mn}}}\right)$$

$$\cdot\left[\frac{\sin\frac{q\pi}{2}}{\bar{q}}-\frac{2}{q}J_0(l)\cos l\sin\frac{\bar{q}\pi}{2}-4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\bar{q}\cos l}{\bar{q}^2-(2k)^2}J_{2k}(l)\sin\frac{\bar{q}\pi}{2}\right]$$

$$-\sum_{r=-r_0}^{r_0}\sum_{s=-r_0}^{r_0}b_r^{(0)}J_s\left(\frac{q_m}{2\sqrt{\bar{\lambda}_{mn}}}\right)\cos l\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j+r-s}}{(2j)!}\left(\frac{l}{2}\right)^{2j}\binom{2j}{j+s-r}\Bigg\}$$

$$=\left(\frac{2}{\pi}\right)^2\frac{[1-(-1)^m]}{m}\tau_0e^{-\frac{\tau A}{2}}\left\langle\left\{\sin\bar{l}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j\bar{l}^{2j}}{p(p^2+2^2)(p^2+4^2)\cdots[p^2+(2j)^2]}\right.\right.$$

$$\cdot\left(e^{\frac{p\pi}{2}}-e^{-\frac{p\pi}{2}}\right)\left[1+\frac{p^2}{2!}+\frac{p^2(p^2+2^2)}{4!}+\cdots\right.$$

$$\left.\left.+\frac{p^2(p^2+2^2)\cdots[p^2+(2j-2)^2]}{(2j)!}\right\}-\cos\bar{l}\sum_{j=0}^{\infty}\left(e^{\frac{p\pi}{2}}+e^{-\frac{p\pi}{2}}-2\right)\right.$$

$$\cdot\frac{(-1)^j\bar{l}^{2j+1}p}{(p^2+1^2)(p^2+3^2)\cdots[p^2+(2j+1)^2]}$$

$$\left.\cdot\left\{1+\frac{p^2+1}{3!}+\cdots+\frac{(p^2+1^2)(p^2+3^2)\cdots[p^2+(2j-1)^2]}{(2j+1)!}\right\}\right\rangle\tag{4.25b}$$

至此零级近似解的结果已经得出.若把以上有关零级计算各式中的A换为$-A$，就是考虑线性阻尼的Ⅱ型破裂扩展问题的解.据我们所知，即使线性阻尼在断裂动力学的工作中，也很少被考虑过，至于本文考虑的是非线性Rayleigh阻尼，恐怕就更没有人在断裂学力里考虑过.

下面讨论一级近似解.将(3.3)式由静坐标系根据(4.1)式变换为动坐标系，并注意到：

$$\left(\frac{\partial u_0}{\partial t}\right)^3=\left(\frac{\partial u_0}{\partial t'}\right)^3-3\dot{a}\left(\frac{\partial u_0}{\partial t'}\right)^2\frac{\partial u_0}{\partial \xi}+3\dot{a}^2\frac{\partial u_0}{\partial t'}\left(\frac{\partial u_0}{\partial \xi}\right)^2-\dot{a}^3\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^3 \tag{4.26}$$

故(3.3a)及(3.3b)变为：

$$(1-\dot{a}^2)\frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2}+(\ddot{a}-A\dot{a})\frac{\partial u_1}{\partial \xi}+K^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}+(1-K^2)\frac{\partial^2 v_1}{\partial \xi\partial y}=\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}-A\frac{\partial u_1}{\partial t}$$

$$-2\dot{a}\frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi\partial t}+\left(\frac{\partial u_0}{\partial t}\right)^3+3\dot{a}^2\frac{\partial u_0}{\partial t}\left(\frac{\partial u_0}{\partial \xi}\right)^2-3\dot{a}\left(\frac{\partial u_0}{\partial t}\right)^2\frac{\partial u_0}{\partial \xi}-\dot{a}^3\left(\frac{\partial u_0}{\partial \xi}\right)^3 \tag{4.27a}$$

$$(K^2-\dot{a}^2)\frac{\partial^2 v_1}{\partial \xi^2}+(\ddot{a}-A\dot{a})\frac{\partial v_1}{\partial \xi}+\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}+(1-K^2)\frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi\partial y}=\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2}-A\frac{\partial v_1}{\partial t}$$

$$-2\dot{a}\frac{\partial^2 v_1}{\partial \xi\partial t}+\left(\frac{\partial v_0}{\partial t}\right)^3+3\dot{a}^2\frac{\partial v_0}{\partial t}\left(\frac{\partial v_0}{\partial \xi}\right)^2-3\dot{a}\left(\frac{\partial v_0}{\partial t}\right)^2\frac{\partial v_0}{\partial \xi}-\dot{a}^3\left(\frac{\partial v_0}{\partial \xi}\right)^2 \tag{4.27b}$$

类似于零级近似，我们取：

$$u_1(x,y,t)=u_1(\xi,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}^{(1)}(t)H(1-\xi)\cos m\pi\xi\sin n\pi y \tag{4.28a}$$

$$v_1(x,y,t)=v_1(\xi,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}B_{mn}^{(1)}(t)H(1-\xi)\sin m\pi\xi\cos n\pi y \tag{4.28b}$$

代(4.28)入(4.27)，应用富氏级数的正交性，可得：

$$\frac{d^2A_{mn}^{(1)}(t)}{dt^2}-A\frac{dA_{mn}^{(1)}(t)}{dt}+[m^2(1-\dot{a}^2)+n^2K^2]\pi^2A_{mn}^{(1)}(t)+(1-K^2)mn\pi^2B_{mn}^{(1)}(t)$$

$$=\frac{9}{16}\left[\frac{dA_{mn}^{(0)}(t)}{dt}\right]^3+\frac{9}{16}\dot{a}^2\left[m\pi A_{mn}^{(0)}(t)\right]^2\frac{dA_{mn}^{(0)}(t)}{dt} \tag{4.29a}$$

$$\frac{dA_{mn}^{(1)}(t)}{dt}+\frac{1}{2}\left(\frac{\ddot{a}}{\dot{a}}-A\right)A_{mn}^{(1)}(t)=-\frac{9}{32}\left[m\pi A_{mn}^{(0)}(t)\right]\left[\frac{dA_{mn}^{(0)}(t)}{dt}\right]^2$$

$$-\frac{9}{32}\dot{a}^2\left[m\pi A_{mn}^{(0)}(t)\right]^3 \tag{4.29b}$$

$$\frac{d^2B_{mn}^{(1)}(t)}{dt^2}-A\frac{dB_{mn}^{(1)}(t)}{dt}+[m^2(K^2-\dot{a}^2)+n^2]\pi^2B_{mn}^{(1)}(t)+(1-K^2)mn\pi^2A_{mn}^{(1)}(t)$$

$$=\frac{9}{16}\left[\frac{dB_{mn}^{(0)}(t)}{dt}\right]^3+\frac{9}{16}\dot{a}^2\left[m\pi B_{mn}^{(0)}(t)\right]^2\frac{dB_{mn}^{(0)}(t)}{dt} \tag{4.29a$'$}$$

$$\frac{dB_{mn}^{(1)}(t)}{dt}+\frac{1}{2}\left(\frac{\ddot{a}}{\dot{a}}-A\right)B_{mn}^{(1)}(t)=-\frac{9}{32}\left[m\pi B_{mn}^{(0)}(t)\right]\left[\frac{dB_{mn}^{(0)}(t)}{dt}\right]^2$$

$$-\frac{9}{32}\dot{a}^2\left[m\pi B_{mn}^{(0)}(t)\right]^3 \tag{4.29b)'}$$

由(4.29b)及(4.29b)′可得解

$$A_{mn}^{(1)}(t)=F_1(t)e^{\frac{A}{2}t}\Big/\sqrt{\sin\frac{\pi}{2\tau}t} \tag{4.30a}$$

$$B_{mn}^{(1)}(t)=F_2(t)e^{\frac{A}{2}t}\Big/\sqrt{\sin\frac{\pi}{2\tau}t} \tag{4.30b}$$

上两式中$F_1(t)$及$F_2(t)$为时间t的待定函数，为了消除$A_{mn}^{(1)}(t)$和$B_{mn}^{(1)}(t)$在$t=0$及$t=2\tau$时的奇异性，取：

$$F_1(t)=F_2(t)=0 \tag{4.31}$$

求解(4.29a)和(4.29a)′时，我们仍选取：

$$A_{mn}^{(1)}(t)=e^{\frac{A}{2}t}\ \alpha_{mn}^{(1)}(t) \tag{4.32a}$$

$$B_{mn}^{(1)}(t)=e^{\frac{A}{2}t}\ \beta_{mn}^{(1)}(t) \tag{4.32b}$$

将(4.32)代入(4.29a)和(4.29a)′并利用变换(4.10)式，得到下列非齐次Mathieu方程：

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2\alpha_{mn}^{(1)}(T)}{dT^2}+(\lambda_{mn}-2q_m\cos 2T)\alpha_{mn}^{(1)}(T)=\frac{9\pi}{32\tau}\left[\frac{\tau A}{\pi}\alpha_{mn}^{(0)}(T)-\frac{d\alpha_{mn}^{(0)}(T)}{dT}\right]^3\\
&\cdot e^{\frac{2A\tau}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-T\right)}+\frac{9\tau}{8\pi}\left[m\pi\alpha_{mn}^{(0)}(T)\right]^2\left[\frac{\tau A}{\pi}\alpha_{mn}^{(0)}(T)-\frac{d\alpha_{mn}^{(0)}(T)}{dT}\right]\\
&\cdot e^{\frac{2A\tau}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-T\right)}-4(1-K^2)mn\tau^2\beta_{mn}^{(1)}(T)
\end{aligned} \tag{4.33a}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2\beta_{mn}^{(1)}(T)}{dT^2}+(\lambda_{mn}-2q_m\cos 2T)\beta_{mn}^{(1)}(T)=\frac{9\pi}{32\tau}\left[\frac{\tau A}{\pi}\beta_{mn}^{(0)}(T)-\frac{d\beta_{mn}^{(0)}(T)}{dT}\right]^3\\
&\cdot e^{\frac{2A\tau}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-T\right)}+\frac{9\tau}{8\pi}\left[m\pi\beta_{mn}^{(0)}(T)\right]^2\left[\frac{A\tau}{\pi}\beta_{mn}^{(0)}(T)-\frac{d\beta_{mn}^{(0)}(T)}{dT}\right]\\
&\cdot e^{\frac{2A\tau}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-T\right)}-4(1-K^2)mn\tau^2\alpha_{mn}^{(1)}(T)
\end{aligned} \tag{4.33b}$$

取非齐次方程特解为$\bar{\alpha}_{mn}^{(1)}(T)$和$\bar{\beta}_{mn}^{(1)}(T)$，则有：

$$\bar{\alpha}_{mn}^{(1)}(T)=C_1^{(1)}(T)W_1(T)+C_2^{(1)}(T)W_2(T) \tag{4.34a}$$

$$\bar{\beta}_{mn}^{(1)}(T)=f_1^{(1)}(T)Y_1(T)+f_2^{(1)}(T)Y_2(T) \tag{4.34b}$$

上两式中$C_1^{(1)}(T)$，$C_2^{(1)}(T)$，$f_1^{(1)}(T)$和$f_2^{(1)}(T)$均为待定函数以T为自变量.根据相同于零级

近似的计算而得方程(4.33)的解为：

$$\alpha_{mn}^{(1)}(T)=\sum_{r=-r_0}^{r_0} c_r^{(1)} J_r\left(\frac{q_m}{2\sqrt{\lambda_{mn}}}\right)\cos\left(\sqrt{\lambda_{mn}}-2r\right)T+\sum_{r=-r_0}^{r_0}\sum_{s=-r_0}^{r_0} a_r^{(1)}$$

$$\cdot J_s\left(\frac{q_m}{2\sqrt{\lambda_{mn}}}\right)\cos 2(r-s)T \tag{4.35a}$$

$$\beta_{mn}^{(1)}(T)=\sum_{r=-r_0}^{r_0} g_r^{(1)} J_r\left(\frac{q_m}{2\sqrt{\lambda_{mn}}}\right)\cos\left(\sqrt{\lambda_{mn}}-2r\right)T+\sum_{r=-r_0}^{r_0}\sum_{s=-r_0}^{r_0} b_r^{(1)}$$

$$\cdot J_s\left(\frac{q_m}{2\sqrt{\lambda_{mn}}}\right)\cos 2(r-s)T \tag{4.35b}$$

以(4.35a)及(4.35b)代入零初始条件，可得以下两个方程：

$$\sum_{r=-r_0}^{r_0} c_r^{(1)} J_r\left(\frac{q_m}{2\sqrt{\lambda_{mn}}}\right)+\sum_{r=-r_0}^{r_0}\sum_{s=-r_0}^{r_0} a_r^{(1)} J_s\left(\frac{q_m}{2\sqrt{\lambda_{mn}}}\right)=0 \tag{4.36a}$$

$$\sum_{r=-r_0}^{r_0} g_r^{(1)} J_r\left(\frac{q_m}{2\sqrt{\lambda_{mn}}}\right)+\sum_{r=-r_0}^{r_0}\sum_{s=-r_0}^{r_0} b_r^{(1)} J_s\left(\frac{q_m}{2\sqrt{\lambda_{mn}}}\right)=0 \tag{4.36b}$$

系数 $a_r^{(1)}$和 $b_r^{(1)}$可由以下两式给定：

$$\frac{dC_1^{(1)}(T)}{dT}\frac{dW_1(T)}{dT}+\frac{dC_2^{(1)}(T)}{dT}\frac{dW_2(T)}{dT}=\frac{9\pi}{32\tau}e^{\frac{2A\tau}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-T\right)}$$

$$\cdot\left[\frac{\tau A}{\pi}\alpha_{mn}^{(0)}(T)-\frac{d\alpha_{mn}^{(0)}(T)}{dT}\right]^3+\frac{9\dot{a}^2}{8}\tau m^2\pi e^{\frac{2A\tau}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-T\right)}\left[\alpha_{mn}^{(0)}(T)\right]^2$$

$$\cdot\left[\frac{\tau A}{\pi}\alpha_{mn}^{(0)}(T)-\frac{d\alpha_{mn}^{(0)}(T)}{dT}\right]-4(1-K^2)mn\tau^2\bar{\beta}_{mn}^{(1)}(T) \tag{4.37a}$$

$$\frac{df_1^{(1)}(T)}{dT}\frac{dY_1(T)}{dT}+\frac{df_2^{(1)}(T)}{dT}\frac{dY_2(T)}{dT}=\frac{9\pi}{32\tau}e^{\frac{2A\tau}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-T\right)}\left[\frac{\tau A}{\pi}\beta_{mn}^{(0)}(T)-\frac{d\beta_{mn}^{(0)}(T)}{dT}\right]^3$$

$$+\frac{9\dot{a}^2}{8}\tau m^2\pi e^{\frac{2A\tau}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-T\right)}\left[\beta_{mn}^{(0)}(T)\right]^2\left[\frac{\tau A}{\pi}\beta_{mn}^{(0)}(T)-\frac{d\beta_{mn}^{(0)}(T)}{dT}\right]$$

$$-4(1-K^2)mn\tau^2\bar{\alpha}_{mn}^{(1)}(T) \tag{4.37b}$$

以上两式中：

$$\bar{\alpha}_{mn}^{(1)}(T)=\sum_{r=-r_0}^{r_0}\sum_{s=-r_0}^{r_0} a_r^{(1)} J_s\left(\frac{q_m}{2\sqrt{\lambda_{mn}}}\right)\cos 2(r-s)T \tag{4.38a}$$

$$\bar{\beta}_{mn}^{(1)}(T)=\sum_{r=-r_0}^{r_0}\sum_{s=-r_0}^{r_0}b_r^{(1)}J_s\left(\frac{q_m}{2\sqrt{\lambda_{mn}}}\right)\cos 2(r-s)T \tag{4.38b}$$

$$C_1^{(1)}(T)=\sum_{r=-r_0}^{r_0}a_r^{(1)}\cos(\sqrt{\lambda_{mn}}-2r)T,\ C_2^{(1)}(T)=\sum_{r=-r_0}^{r_0}a_r^{(1)}\sin(\sqrt{\lambda_{mn}}-2r)T \tag{4.38c}$$

$$f_1^{(1)}(T)=\sum_{r=-r_0}^{r_0}b_r^{(1)}\cos\left(\sqrt{\lambda_{mn}}-2r\right)T,\quad f_2^{(1)}(T)=\sum_{r=-r_0}^{r_0}b_r^{(1)}\sin\left(\sqrt{\lambda_{mn}}-2r\right)T \tag{4.38d}$$

将(4.12)′、(4.16)代入(4.37)后用富氏级数正交性得：

$$\sum_{r=-r_0}^{r_0}\sum_{s=-r_0}^{r_0}a_r^{(1)}J_s\left(\frac{q_m}{2\sqrt{\lambda_{mn}}}\right)\left(\sqrt{\lambda_{mn}}-2r\right)\left(\sqrt{\lambda_{mn}}-2s\right)=-4(1-K^2)mn\tau^2$$
$$\cdot\sum_{r=-r_0}^{r_0}\sum_{s=-r_0}^{r_0}b_r^{(1)}J_s\left(\frac{q_m}{2\sqrt{\lambda_{mn}}}\right)+\frac{9}{16\tau}e^{A\tau}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{2A\tau}{\pi}T}\left[\frac{\tau A}{\pi}\alpha_{mn}^{(0)}(T)-\frac{d\alpha_{mn}^{(0)}(T)}{dT}\right]^3$$
$$\cdot\cos 2(r'-s')TdT+9\dot{a}_M^2\,\tau m^2e^{\tau A}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2T\left[\alpha_{mn}^{(0)}(T)\right]^2\left[\frac{\tau A}{\pi}\alpha_{mn}^{(0)}(T)\right.$$
$$\left.-\frac{d\alpha_{mn}^{(0)}(T)}{dT}\right]e^{-\frac{2A\tau}{\pi}T}\cos 2(r'-s')TdT \tag{4.39a}$$

$$\sum_{r=-r_0}^{r_0}\sum_{s=-r_0}^{r_0}b_r^{(1)}J_s\left(\frac{q_m}{2\sqrt{\lambda_{mn}}}\right)\left(\sqrt{\lambda_{mn}}-2r\right)\left(\sqrt{\lambda_{mn}}-2s\right)=-4(1-K^2)mn\tau^2$$
$$\cdot\sum_{r=-r_0}^{r_0}\sum_{s=-r_0}^{r_0}a_r^{(1)}J_s\left(\frac{q_m}{2\sqrt{\lambda_{mn}}}\right)+\frac{9}{16\tau}e^{A\tau}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{2A\tau}{\pi}T}\left[\frac{\tau A}{\pi}\beta_{mn}^{(0)}(T)-\frac{d\beta_{mn}^{(0)}(T)}{dT}\right]^3$$
$$\cdot\cos 2(r'-s')TdT+9\dot{a}_M^2\,\tau m^2e^{\tau A}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2T\left[\beta_{mn}^{(0)}(T)\right]^2\left[\frac{\tau A}{\pi}\beta_{mn}^{(0)}(T)\right.$$
$$\left.-\frac{d\beta_{mn}^{(0)}(T)}{dT}\right]e^{-\frac{2A\tau}{\pi}T}\cos 2(r'-s')TdT \tag{4.39b}$$

以上两式中，必须满足下列关系式：

$$r-s=r'-s' \tag{4.39c}$$

至此我们又完成了一级近似解，以后各级近似解均可仿照一级近似解的方法去做.

五、讨　　论

1．本文是以推广的富氏级数求得的解，称之为基本解.富氏级数只适用于连续函数或有有限跳跃值（即第一类间断点）的函数，而弹性断裂理论却要求在裂缝尖端应力分量表达

式中有坐标的$\frac{1}{2}$阶奇异性，本文得出的基本解不能表示这种奇异性．

文献[11]指出，苏联力学大师Н.И.Мусхелишвили在其名著《奇异积分方程》一书中提出：“由于除了出于有限位移的要求而排除掉的具有高阶奇异点之外，所有的解都可表示为 $z^{-\frac{1}{2}}$乘以一个在R里的解析函数．”这位大师在他的另一本名著《数学弹性力学的几个基本问题》(赵惠元译，科学出版社，(1958),80)中指出：各应力分量σ_x，σ_y及τ_{xy}都是坐标x和y的解析函数．在本文中有$z=\xi+iy$，故$|z|^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt[4]{[1+a(t)-x]^2+y^2}}$，故以此奇异因子乘以本文基本解的应力分量表达式，就会使应力分量表达式在裂缝尖端呈现$\frac{1}{\sqrt{1+a(t)-x}}$的奇异性．

2． 本文应用的Rayleigh阻尼，即(1.1)式中的阻尼公式，其中常数A和B，在不同介质中有不同之值，这必须通过实验而得出具体数字，但至今我们还没有找到A和B具体数值，因此无法给出具体的算例．

3． 地学上盛行以Ⅱ型破裂为地震破坏的主要类型，如果地壳的A和B值通过实验得出，就可以照本文提供方法，进行具体震例计算，这比目前使用的弹性位错理论好一些．例如文献[12]说：“断裂作为裂缝的模式，在物理上要比具有定常布格矢量的位错模式更有根据，而利用后者的惟一理由是观测的不确定性，不允许在较好的（带有摩擦的裂缝）和较差的（福尔特拉位错）模式中间作出选择．”实质上，弹性位错是运动学方法，断裂动力学是动力学方法．文献[12]还说：“为描述地震时的震源，应用弹性介质的模型就够了，对地震孕育过程及包括余震在内的震后现象的研究，就需要更复杂一些的流变模型．”所以我们在本文中只考虑弹性范围的断裂动力学．

为保证零级近似中应用常数变更法第二式的要求，必须：

$$a_r^{(0)}J_s\left(\frac{q_m}{2\sqrt{\lambda_{mn}}}\right)(\sqrt{\lambda_{mn}}-2r)(\sqrt{\lambda_{mn}}-2s)=-4(1-k^2)mn\tau^2\,b_r^{(0)}J_s\left(\frac{q_m}{2\sqrt{\lambda_{mn}}}\right)$$

$$b_r^{(0)}J_s\left(\frac{q_m}{2\sqrt{\lambda_{mn}}}\right)(\sqrt{\lambda_{mn}}-2r)(\sqrt{\lambda_{mn}}-2s)=-4(1-k^2)mn\tau^2\,a_r^{(0)}J_s\left(\frac{q_m}{2\sqrt{\lambda_{mn}}}\right)$$

这样就在m和n之取值范围有了限制．以后各级近似也仿此．

本文是学习了钱伟长教授的专著“奇异摄动理论”之后，企图在断裂动力学本身以及结合地震学的研究做点工作．本文作者之一曾听了钱先生的讲座并得到钱先生的指导和鼓励，仅在此对钱先生表示衷心感谢．

附　录

本文(3.1)式对位移函数u、v依小参数B的展开式中，曾假定$B<1$，现证明如下：

$$\left.\begin{aligned}u(x,y,t)&=u_0(x,y,t)+Bu_1(x,y,t)+B^2u_2(x,y,t)+\cdots+B^nu_n(x,y,t)+\cdots\\ v(x,y,t)&=v_0(x,y,t)+Bv_1(x,y,t)+B^2v_2(x,y,t)+\cdots+B^nv_n(x,y,t)+\cdots\end{aligned}\right\}\qquad(3.1)$$

因为u和v都是微小位移，故它们都是囿函数，必存在某一正常数$\bar{M}$为函数u和v的上确界，即有：

$$|u(x,y,t)|\leqslant\bar{M},\quad |v(x,y,t)|\leqslant\bar{M}.$$

同样(3.1)式右边各u_i及$v_i(i=0,1,2,\cdots)$亦必为囿函数，令它们的上确界为某正的常数M，则有：

$$|u_i(x,y,t)|\leqslant M,\quad |v_i(x,y,t)|\leqslant M$$

$$\therefore\quad \left.\begin{aligned}u(x,y,t)&\leqslant M(1+B+B^2+\cdots+B^n+\cdots)\\ v(x,y,t)&\leqslant M(1+B+B^2+\cdots+B^n+\cdots)\end{aligned}\right\}\qquad(3.1)$$

$$\text{而}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{B^{n+1}}{B^n}=\lim_{n\to\infty}B$$

易知$B\geqslant1$时(3.1)′构成的无穷级数发散，$B<1$时收敛.囿函数u和v的有界性要求(3.1)式右端无穷级数必须收敛，而(3.1)′是(3.1)的强级数，若$B<1$则(3.1)′级数收敛，从而(3.1)式右端的级数必收敛.于是$B<1$是位移函数u和v为有限的充要条件，故我们假定$B<1$是合理的.

参 考 文 献

1. 钱伟长，《奇异摄动理论》，(1980)(即将出版).
2. Kim, K. S., Dynamic Propagation of a Finite Crack, *Int. J. Solids and Structure* 15, 9 (1979).
3. 陆远忠等，地震破裂过程的研究，地球物理学报，23，2 (1980).
4. Костров, Б. В., Неустановишееся распранение трещины продольного сдвига, *ПММ*, 30, (1966).
5. Eshelby, J. D., The Elastic Field of a Crack Extending Nonuniformly under General Anti-plane Loading, *J. Mech. Phys. Solids*, 17, 3 (1969).
6. 褚武扬，《断裂力学基础》，科学出版社，(1979).
7. 王竹溪等，《特殊函数概论》，科学出版社，(1965)，692，711—712.
8. Arscott, F. M., *Periodic Differential Equations*, Pergamon Press, (1964), 139.
9. E.卡姆克，《常微分方程手册》，张鸿林译，科学出版社，(1977)，152—153.
10. Gradshteyn, I. S. et al., Table of Integrals, Series and Products, Academic Press, (1980).
11. 李灏，《断裂理论》，(1980)，(即将出版).
12. B. Б. 科斯特罗夫，《构造地震震源力学》，冯德益等译，地震出版社，(1979)，9，58—59.

Analytic Solutions for a Finite Crack Rupturing with Type-Ⅱ at One Tip with Exciting and Decaying Processes

Fan Ja-shen

(*The Seismological Bureau of Yunnan Province, Kunming*)

Xu Ping

(*Geophysics Department, Yunnan University, Kunming*)

Abstract

Under the action of Rayleigh damping, when the shear stress exerts at the boundary of the crack and causes one tip of the crack rupturing with varying velocity. By singular perturbation method, we deduce the governing non-linear partial differential equations into a system of linear ones and solve them by using generalized Fourier series.