

非线性方程分枝解理论在线性闭环系统 极点摄动量估计中的应用

张荣祥 陈兆宽

(山东工学院) (山东大学)

(李灏推荐, 1981年11月30日收到)

摘 要

本文利用非线性方程小分枝解的理论, 研究多变量定常线性控制系统的状态矩阵与控制矩阵受到摄动时, 闭环系统的极点所受到的摄动量的估计问题。

一、问题的提法

线性闭环系统的极点配置是控制系统设计中一个重要的问题, 它对系统的调节质量有很大的影响。但是在建立任何实际系统的数学模型时总是会有一定的误差的, 这表示系统要受到摄动, 这种摄动的存在必然要影响到原来已配置好的极点, 进而影响系统的调节质量。因此线性闭环系统极点的摄动量的估计无论在理论上还是在应用上都是十分重要的。问题的提法如下:

设已知未摄动的多变量定常线性系统为:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu \quad (1.1)$$

其中 x — n 维状态向量, u — r 维控制向量; A — $n \times n$ 状态矩阵, B — $n \times r$ 控制矩阵; 且假设已根据欲配置的几个极点:

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \quad (1.2)$$

设计出状态反馈阵 K :

$$K = [k_{ij}]_{n \times r} \quad (1.3)$$

现在若系统的模型受到摄动: 矩阵 A 变成 $A + \varepsilon A_1$, 矩阵 B 变成 $B + \varepsilon B_1$, 这里 ε 是摄动的量级, 矩阵 A_1 和 B_1 是如下的矩阵:

设 $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, $B = [b_{ij}]_{n \times r}$, 则

$$A_1 = [\alpha_{ij}]_{n \times n}, \quad |\alpha_{ij}| \leq |a_{ij}| \quad (1.4)$$

$$B_1 = [\beta_{ij}]_{n \times r}, \quad |\beta_{ij}| \leq |b_{ij}| \quad (1.5)$$

于是得摄动后的系统为

$$\frac{dx}{dt} = (A + \varepsilon A_1)x + (B + \varepsilon B_1)u \quad (1.6)$$

若对系统(1.6)仍用(1.3)式的反馈矩阵 K 来构成闭环 (在实际应用中通常是这样,) 这时摄动后的闭环系统的方程为

$$\frac{dx}{dt} = (A + \varepsilon A_1)x + (B + \varepsilon B_1)Kx \quad (1.7)$$

这时(1.7)式的极点必然要偏离原来预定的极点(1.2)式. 这个极点的偏移量称为闭环系统的极点的摄动量.

现在的问题是: 当 ε 固定时, 对于满足条件 (1.4) 和 (1.5) 的某种摄动, 闭环系统的极点所受到的摄动量的主部如何表示? 又: 对于形如 (1.4) 和 (1.5) 的一切摄动, 极点所受到的最大摄动量的主部如何估计? 作者们利用非线性方程小分枝解的理论, 解决了这两个问题. 此外, 作者们还曾用同一理论, 在文[1]中解决了文[2]提出的线性控制系统最经济结构综合解的适定性问题.

二、问题的解

设未摄动的闭环系统的方程为

$$\frac{dx}{dt} = (A + BK)x \quad (2.1)$$

若令 (2.1) 式右端的系数矩阵为 F , 则 (2.1) 式可写成

$$\frac{dx}{dt} = Fx \quad (2.2)$$

又设已摄动的闭环系统为

$$\frac{dx}{dt} = [A + BK + \varepsilon(A_1 + B_1K)]x \quad (2.3)$$

若令 $(A_1 + B_1K) = F_1$, 则 (2.3) 式可写成

$$\frac{dx}{dt} = (F + \varepsilon F_1)x \quad (2.4)$$

由于闭环系统 (2.2) 的极点是如下的特征方程的根:

$$\det[\lambda I - F] = \lambda^n + C_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + C_1\lambda + C_0 = 0 \quad (2.5)$$

摄动闭环系统 (2.4) 的极点是如下的特征方程的根:

$$\det[\lambda I - (F + \varepsilon F_1)] = \lambda^n + C_{n-1}(\varepsilon)\lambda^{n-1} + \dots + C_1(\varepsilon)\lambda + C_0(\varepsilon) = 0 \quad (2.6)$$

这里: $C_r(\varepsilon) = d_r + d_{r,1}\varepsilon + \dots + d_{r,n-r}\varepsilon^{n-r}$, ($r=0, 1, \dots, n-1$) (2.7)

而且 $d_{r,n}$ 是诸摄动元素 α_{ij} , β_{ij} 的 k 次齐次函数, ($k=1, 2, \dots, n-r$). 由于当 $\varepsilon=0$ 时, 矩阵 $(F + \varepsilon F_1)$ 要退化成 F , 所以

$$C_r(0) = d_r = C_r$$

设 λ_0 是方程 (2.5) 的根. 为了推导方程 (2.6) 的相应于 λ_0 的根的摄动量主部的表达

式, 先引入一个引理.

引理2.1 设 $\lambda = \lambda_0$ 是方程 (2.5) 的 k 重根, k 为某一自然数. 若将 (2.6) 式的左端变换成按 $(\lambda - \lambda_0)$ 的降幂排列时得:

$$(\lambda - \lambda_0)^n + e_{n-1}(\varepsilon)(\lambda - \lambda_0)^{n-1} + \cdots + e_k(\varepsilon)(\lambda - \lambda_0)^k + \cdots + e_1(\varepsilon)(\lambda - \lambda_0) + e_0(\varepsilon) = 0 \quad (2.8)$$

其中,

$$e_k(\varepsilon) = e_k + e_{k,1}\varepsilon + \cdots + e_{k,n-k}\varepsilon^{n-k} \quad (2.9)$$

则必有:

$$e_k \neq 0, e_{k-1} = 0, \cdots, e_1 = 0, e_0 = 0$$

证明: 因为 λ_0 是 (2.5) 式的 k 重根, 则将方程 (2.2) 的左端展成按 $(\lambda - \lambda_0)$ 的降幂排列时, 必有:

$$(\lambda - \lambda_0)^n + C'_{n-1}(\lambda - \lambda_0)^{n-1} + \cdots + C'_k(\lambda - \lambda_0)^k = 0 \quad (2.10)$$

并且:

$$C'_k \neq 0$$

由于当 $\varepsilon = 0$ 时, (2.8) 式要退化成 (2.10) 式, 于是必有:

$$e_k(0) = e_k = C'_k$$

$$e_{k-1}(0) = e_{k-1} = 0, \cdots, e_1(0) = e_1 = 0, e_0(0) = e_0 = 0$$

并且 $e_k = C'_k \neq 0$.

引理 2.1 证毕.

设 $\lambda = \lambda_0$ 是方程 (2.5) 的根. 对于满足条件 (1.4) 和 (1.5) 的摄动矩阵, 为了求方程 (2.6) 的在 $\lambda = \lambda_0$ 的邻域内的解, 可以利用求非线性方程分枝解的牛顿凸多边形方法, 关于这个方法的理论依据可以参考文 [3]. 为此, 先将方程 (2.6) 化成 (2.8) 的形式, 并令 $\lambda - \lambda_0 = \xi$, 于是得:

$$F(\xi, \varepsilon) = \xi^n + e_{n-1}(\varepsilon)\xi^{n-1} + \cdots + e_k(\varepsilon)\xi^k + \cdots + e_1(\varepsilon)\xi + e_0(\varepsilon) = 0 \quad (2.11)$$

于是问题就变成求方程 (2.11) 的在 origin 附近的小分枝解的问题.

先介绍牛顿凸多边形方法如下:

考察方程 (2.11) 的解, 则它可以展成如下的级数:

$$\xi = \xi_0 \varepsilon^\delta + \xi_1 \varepsilon^{\delta'} + \xi_2 \varepsilon^{\delta''} + \cdots \quad (2.12)$$

这里 $\delta < \delta' < \delta'' < \cdots$, $\xi_0 \neq 0$, 或将 (2.12) 式简记成

$$\xi = \xi_0 \varepsilon^\delta + v \quad (2.13)$$

这里: $v = O(\varepsilon^\delta)$

为了寻找 δ 和 ξ_0 的可能值, 将 (2.13) 式代入 (2.11) 式, 然后将 ε 的同次幂的系数收集在一起, 分别令它们等于零, 这可以从最低次项开始. 但是, 由于 δ 还未确定, 我们暂时还不知道 ε 的最低次项到底是哪些项, 为了确定 δ , 牛顿给出了一种所谓凸多边形方法: 先从 (2.11) 式的左端每一项的系数中找出 ε 的最低次幂, 例如对应于 ξ^k 的系数 $e_k(\varepsilon)$ 中的 ε 的最低次幂为 ρ_k , 我们在直角坐标系中标出相应的点 (k, ρ_k) , 然后用折线连结一部分被标出的点, 使它们组成凸多边形, 而且使得其余的所标出的点都位于这个凸多边形的上方如图 1 所示. 于是这个凸多边形的下降段折线相对于负实轴的斜率都可以作为 (2.11) 式中的 δ 值, 相应于不同的斜率可以得到不同的分枝解. 当 δ 的值确定以后, 将 (2.13) 式

代入 (2.11) 式中, 并令所得结果中的 ε 的最低次项的系数等于零, 就可以求出 ξ_0 值.

以上就是求非线性方程的分枝解的牛顿凸多边形方法.

运用这个方法, 当摄动矩阵 A_1 和 B_1 已知时, 就可求出矩阵 $A+BK$ 的特征值的摄动量的主部表达式. 但是我们还要求对于满足条件 (1.4) 和 (1.5) 的一切摄动, 矩阵 $A+BK$ 的特征值的最大摄动量的主部的估计式. 为此还必须运用牛顿凸多边形方法对方程 (2.11) 的分枝解进行分析. 以下分几种情形来进行讨论.

定理 2.1 设 λ_0 是方程 (2.5) 的单根, 又若方程 (2.11) 中 $e_0(\varepsilon)$ 中含有 ε 项的系数不恒为零, 则在 (2.13) 式中的 δ 为 1, 而且 ξ_0 是诸 $\alpha_{i,j}$, $\beta_{i,j}$ 的线性齐次函数. 为了得到 ξ_0 的最大摄动量, $\alpha_{i,j}$ 必须取 $a_{i,j}$ 或 $-a_{i,j}$, $\beta_{i,j}$ 必须取 $b_{i,j}$ 或 $-b_{i,j}$, 视其在 ξ_0 表达式中的系数的符号而定.

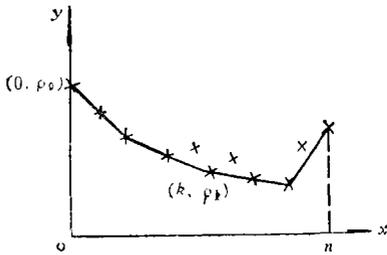


图 1

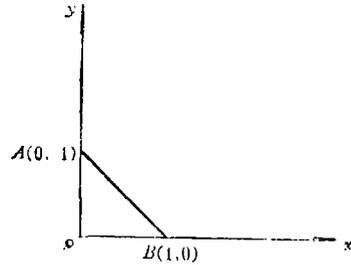


图 2

证明: 由于 $\lambda = \lambda_0$ 是方程 (2.5) 的单根, 所以在方程 (2.11) 中 ξ 项的系数 $e_1(\varepsilon)$ 的自由项一定不为零 (由引理 2.1). 于是牛顿凸多边形下降段仅由图 2 中的一个下降段组成, 它相对于负实轴的斜率为 1, 于是 (2.13) 式变成

$$\xi = \xi_0 \varepsilon + v \quad (2.14)$$

由引理 2.1 知, $e_0(\varepsilon)$ 中的自由项为零, 于是将 (2.14) 式代入 (2.11) 式后, 所得的方程中 ε 的最低次幂为 1 次, 令其系数为零得:

$$e_1 \xi_0 + e_{0,1} = 0$$

$$\therefore \xi_0 = -\frac{e_{0,1}}{e_1} = -\frac{e_{0,1}}{C'_1} \quad (2.15)$$

其中 C'_1 为方程 (2.10) 式中的 $(\lambda - \lambda_0)$ 项的系数, 它不依赖于诸 $\alpha_{i,j}$, $\beta_{i,j}$, 由方程 (2.6) 可以看出, 诸多项式 $C_k(\varepsilon)$ 中, ε 的系数是由诸 $\alpha_{i,j}$ 和 $\beta_{i,j}$ 的线性齐次函数组成, 所以 ξ_0 也是诸 $\alpha_{i,j}$ 和 $\beta_{i,j}$ 的线性齐次函数, 由于 $|\alpha_{i,j}| \leq |a_{i,j}|$, $|\beta_{i,j}| \leq |b_{i,j}|$, 故为了使 (2.15) 中的 ξ_0 取极值, 必须使 $\alpha_{i,j}$ 取 $a_{i,j}$ 或 $-a_{i,j}$, $\beta_{i,j}$ 取 $b_{i,j}$ 或 $-b_{i,j}$, 视其在 ξ_0 的表达式中的系数的符号而定.

定理 2.1 证毕

注 2.1: 我们以下将把 ξ 的主部 $\xi_0 \varepsilon^\delta$ 取得极值的表式作为特征值 λ_0 的最大摄动量的估计式.

定理 2.2 设 λ_0 是方程 (2.5) 的 k 重根, 又若方程 (2.11) 中 $e_0(\varepsilon)$ 所含有的 ε 项的系数不恒为零, 则 (2.13) 式中的 $\delta = \frac{1}{k}$, 而且 ξ_0 是诸 $\alpha_{i,j}$ 和 $\beta_{i,j}$ 的线性齐次函数的 k 次方根 (有 k 个复根), 为了得到 ξ_0 的最大值, $\alpha_{i,j}$ 必须取 $a_{i,j}$ 或 $-a_{i,j}$, $\beta_{i,j}$ 必须取 $b_{i,j}$ 或 $-b_{i,j}$, 视其

在 ξ_δ 的表达式中的系数的符号而定.

证明: 由于 $\lambda = \lambda_0$ 是方程 (2.5) 的 k 重根, 由引理 2.1 知, 方程 (2.11) 中 ξ^k 的系数 $e_k(\varepsilon)$ 中的自由项一定不为零, 而 $e_{k-1}(\varepsilon), e_{k-2}(\varepsilon), \dots, e_1(\varepsilon), e_0(\varepsilon)$ 中的自由项都为零. 于是牛顿凸多边形的下降段仅由图 3 中的 AB 段组成, 这个线段相对于负实轴的斜率为 $\frac{1}{k}$, 即 (2.13)

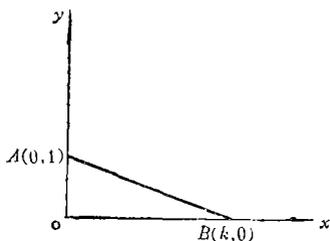


图 3

式中的 δ 为 $\frac{1}{k}$. 于是有:

$$\xi = \xi_\delta \varepsilon^{\frac{1}{k}} + v \tag{2.16}$$

由于 $e_0 = e_1 = \dots = e_{k-1} = 0, e_k \neq 0$, 所以将 (2.16) 式代入 (2.11) 式后, 所得方程中的 ε 的最低次幂为 1 次, 而且其相应的系数方程为:

$$e_k \xi_\delta^k = -e_{0,1}$$

$$\therefore \xi_\delta^k = -\frac{e_{0,1}}{e_k} = -\frac{e_{0,1}}{C_k^1} \tag{2.17}$$

故 ξ_δ 为 $-\frac{e_{0,1}}{C_k^1}$ 的 k 次方根 (共有 k 个复根), 其中 $e_{0,1}$ 为诸 α_i 和 β_i 的线性齐次函数. 由于 $|\alpha_i| \leq |\alpha_i|, |\beta_i| \leq |\beta_i|$, 故为了得到 ξ_δ 的最大值, α_i 必须取 α_i 或 $-\alpha_i$, β_i 必须取 β_i 或 $-\beta_i$, 视其在 ξ_δ 的表达式中的系数的符号而定.

定理 2.2 证毕.

定理 2.1 和定理 2.2 分别给出了当 $\lambda = \lambda_0$ 是方程 (2.5) 的单根和多重根时, 方程 (2.11) 的小解的主部表达式和最大摄动量的主部的估计式. 但是它们都是假定了 $e_{0,1}$ 不恒等于零. 现在若 $e_{0,1} = e_{0,2} = \dots = e_{0,r} = 0, e_{0,r+1} \neq 0$. 这时如何求解呢? 对于这种情况, 我们仍能用与上述类似的方法去解决, 但对具体问题必须具体分析. 例如当 $\lambda = \lambda_0$ 是单根时, 当 $e_{0,1} = e_{0,2} = \dots = e_{0,r} = 0, e_{0,r+1} \neq 0$ 时, 则: $\delta = r + 1$
 ξ_δ 的计算规则与上面的方法相类似.

当 $\lambda = \lambda_0$ 是多重根时, 例如 $\lambda = \lambda_0$ 是方程 (2.5) 的三重根, 而且 $e_{0,1} = e_{0,2} = 0, e_{0,3} \neq 0$, 这时要考虑 $e_1(\varepsilon)$ 的诸项, 若 $e_{1,1} \neq 0$, 则这个问题的牛顿凸多边形的下降段由图 4 中 AC 段与 CB 段组成, AC 段与负实轴的斜率为 2, CB 段与负实轴的斜率为 1/2, 对应于 AC 段得方程 (2.11) 的一个分枝解, 对应于 CB 段得方程 (2.11) 的两个分枝解. 如果要求最大摄动量的估计式, 则必须取后者. 这时应令:

$$\xi = \xi_\delta \varepsilon^{1/2} + v \tag{2.18}$$

将 (2.18) 式代入 (2.11) 式后, 所得方程中 ε 的最低次幂为 3/2 次, 其系数为

$$e_3 \xi_\delta^3 = -e_{1,1} \xi_\delta$$

$$\therefore \xi_\delta = \pm \sqrt{-\frac{e_{1,1}}{e_3}} \tag{2.19}$$

其中 $e_{1,1}$ 为诸 α_i 和 β_i 的线性齐次函数. 于是为了得到 ξ_δ 的最大值, 诸 α_i 仍应取 α_i 或 $-\alpha_i$, β_i 仍应取 β_i 或 $-\beta_i$, 视其在 (2.19) 式中的系数的符号而定. 可见类似这种情形仍可用牛顿凸多边形方法来解决, 而且求最大摄动量的问题变成在一些简单的不等式约束条件下的线

性规划问题。

较复杂的情形是在上例中若 $e_{1,1}=0$ ，则解法略有不同，这时牛顿凸多边形的下降段仅由图5中的 AB 段组成：

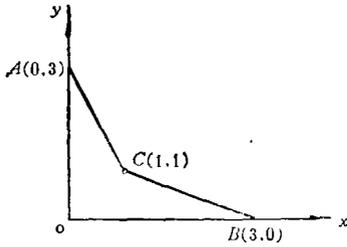


图 4

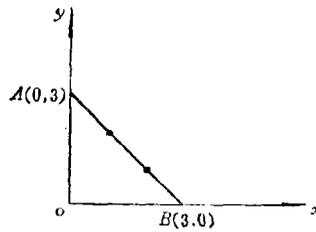


图 5

它与负实轴的斜率为1，所以

$$\delta=1$$

于是(2.13)式变成

$$\xi = \xi_0 \varepsilon + v \quad (2.20)$$

将(2.20)式代入(2.11)式后，所得方程的 ε 的最低次幂为3次，其系数方程为：

$$e_3 \xi_0^3 + e_{2,1} \xi_0^2 + e_{1,2} \xi_0 + e_{0,3} = 0 \quad (2.21)$$

其中 $e_{0,3}$ 为诸 α_i 和 β_i 的三次齐次函数， $e_{1,2}$ 为诸 α_i 和 β_i 的二次齐次函数， $e_{2,1}$ 为诸 α_i 和 β_i 的线性齐次函数。由于 $|\alpha_i| \leq |a_i|$ ， $|\beta_i| \leq |b_i|$ ，所以求 α_i 和 β_i 取何值时，使 ξ_0 取极值的问题，就变成求由(2.21)式所确定的隐函数的极值问题。这可以用数学分析中的隐函数求极值的方法来处理。一般说来，当组成牛顿凸多边形的某一段上有几个标出点时，就会出现这里所列举的隐函数的极值问题。

三、算 例

设有三阶线性控制系统

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (3.1)$$

设欲配置的闭环系统的极点为

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{1}{4}, \quad \lambda_3 = -\frac{1}{2} \quad (3.2)$$

根据上述欲配置的极点我们设计出反馈阵 K 为

$$K = \left[-2, -\frac{21}{16}, \frac{41}{32} \right] \quad (3.3)$$

于是闭环系统的向量方程为

$$\frac{dx}{dt} = (A+BK)x \quad (3.4)$$

写成分量形式为

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{5}{16} & \frac{9}{32} \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

现在设矩阵 A 受到摄动

$$\varepsilon A_1 = \varepsilon \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad |a_{ij}| \leq |a_{ij}| \quad (3.6)$$

矩阵 B 受到摄动

$$\varepsilon B_1 = \varepsilon [\beta_{11} \ \beta_{21} \ \beta_{31}]^T, \quad |\beta_{ij}| \leq |b_{ij}| \quad (3.7)$$

于是摄动后的闭环系统的系数矩阵为:

$$\begin{pmatrix} -1 + \varepsilon(a_{11} - 2\beta_{11}) & -\frac{5}{16} + \varepsilon(a_{12} - \frac{21}{16}\beta_{11}) & \frac{9}{32} + \varepsilon(a_{13} + \frac{41}{32}\beta_{11}) \\ 1 + \varepsilon(a_{21} - 2\beta_{21}) & 1 + \varepsilon(a_{22} - \frac{21}{16}\beta_{21}) & -1 + \varepsilon(a_{23} + \frac{41}{32}\beta_{21}) \\ \varepsilon(a_{31} - 2\beta_{31}) & 1 + \varepsilon(a_{32} - \frac{21}{16}\beta_{31}) & -1 + \varepsilon(a_{33} + \frac{41}{32}\beta_{31}) \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

未摄动的闭环系统的特征方程为:

$$\det[\lambda I - (A + BK)] = (\lambda + 1)^2 (\lambda - 1) - \frac{9}{32} + (\lambda + 1) + \frac{5}{16}(\lambda + 1) = 0 \quad (3.9)$$

化简得:

$$\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\left(\lambda + \frac{1}{4}\right)^2 = 0$$

从上式知, 未摄动的闭环系统确具有欲配置的极点, 其中 $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{1}{4}$ 为二重根, $\lambda_3 = -\frac{1}{2}$ 为单根.

(1) 极点 $\lambda_3 = -\frac{1}{2}$ 的摄动量的主部

将 (3.9) 式展成按 $\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)$ 的降幂排列得:

$$\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^3 - \frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) = 0$$

又将 $\det\{\lambda I - [A + \varepsilon A_1 + (B + \varepsilon B_1)K]\}$ 展成按 $\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)$ 的降幂排列得:

$$\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^3 + e_2(\varepsilon)\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^2 + e_1(\varepsilon)\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + e_0(\varepsilon) = 0 \quad (3.10)$$

其中:

$$e_1(\varepsilon) = \frac{1}{16} + O(\varepsilon) \quad (3.11)$$

$$e_0(\varepsilon) = \varepsilon[-0.25\alpha_{11} - 0.5\alpha_{12} - \alpha_{13} - 0.125\alpha_{21} - 0.25\alpha_{22} - 0.5\alpha_{23} + 0.109375\alpha_{31} \\ + 0.21875\alpha_{32} + 0.4375\alpha_{33} - 0.125\beta_{11} - 0.0625\beta_{21} + 0.0546875\beta_{31}] + O(\varepsilon) \quad (3.12)$$

由 (3.11) 及 (3.12) 式知, 方程

$$\xi^3 + e_2(\varepsilon)\xi^2 + e_1(\varepsilon)\xi + e_0(\varepsilon) = 0 \quad (3.13)$$

的牛顿凸多边形的下降段仅由图 6 中的线段 AB 组成, 这个线段相对于负实轴的斜率为 1,

$$\therefore \xi = \xi_0 \varepsilon + v \quad (3.14)$$

将 (3.14) 式代入 (3.10) 式, 所得方程的 ε 最低次幂为一次, 令其系数为零, 得:

$$\xi_0 = 16[0.25\alpha_{11} + 0.5\alpha_{12} + \alpha_{13} + 0.125\alpha_{21} + 0.25\alpha_{22} \\ + 0.5\alpha_{23} - 0.109375\alpha_{31} - 0.21875\alpha_{32} \\ - 0.4375\alpha_{33} + 0.125\beta_{11} + 0.0625\beta_{21} \\ - 0.0546875\beta_{31}] \quad (3.15)$$

由 (3.15) 式可以求出 ξ_0 的最大值, 当 ξ_0 为正最大值时, 必须有

$$\alpha_{11}=1, \quad \alpha_{12}=1, \quad \alpha_{13}=1, \quad \alpha_{21}=1, \quad \alpha_{22}=1, \quad \alpha_{23}=1, \\ \alpha_{31}=0, \quad \alpha_{32}=-1, \quad \alpha_{33}=-1, \quad \beta_{11}=1, \quad \beta_{21}=0, \quad \beta_{31}=0.$$

这时 ξ_0 的最大值为

$$(\xi_0)_{\max} = 54.50$$

若 $\varepsilon = 0.001$, 则闭环系统的极点 $-\frac{1}{2}$ 的最大可能摄动量的主部为 $\xi_0 \varepsilon = \pm 0.0545$.

(2) 极点 $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{1}{4}$ 的摄动量的主部

将 (3.9) 式展成按 $(\lambda + \frac{1}{4})$ 的降幂排列得:

$$\left(\lambda + \frac{1}{4}\right)^3 + \frac{1}{4}\left(\lambda + \frac{1}{4}\right)^2 = 0$$

又将 $\det\{\lambda I - [A + \varepsilon A_1 + (B + \varepsilon B_1)K]\}$ 展成按 $(\lambda + \frac{1}{4})$ 的降幂排列得:

$$\left(\lambda + \frac{1}{4}\right)^3 + e'_2(\varepsilon)\left(\lambda + \frac{1}{4}\right)^2 + e'_1(\varepsilon)\left(\lambda + \frac{1}{4}\right) + e'_0(\varepsilon) = 0 \quad (3.16)$$

其中

$$e'_2(\varepsilon) = \frac{1}{4} + O(\varepsilon) \quad (3.17)$$

$$e'_0(\varepsilon) = \varepsilon[-0.0635\alpha_{11} - 0.75\alpha_{12} - \alpha_{13} - 0.046875\alpha_{21} - 0.5625\alpha_{22} \\ - 0.75\alpha_{23} + 0.0390625\alpha_{31} + 0.46875\alpha_{32} + 0.625\alpha_{33} \\ - 0.172875\beta_{11} - 0.1289\beta_{21} + 0.1074218\beta_{31}] + O(\varepsilon) \quad (3.18)$$

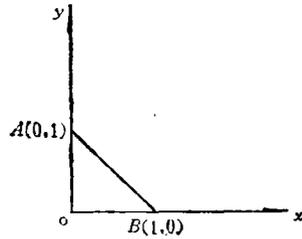


图 6

由 (3.17) 式和 (3.18) 式知, 方程

$$\xi^3 + e'_1(\varepsilon)\xi^2 + e'_2(\varepsilon)\xi + e_0(\varepsilon) = 0 \quad (3.19)$$

的牛顿凸多边形的下降段仅由图 7 中的线段 AB 组成, 这个线段相对于负实轴的斜率为 $\frac{1}{2}$.

$$\therefore \xi = \xi_0 e^{1/2} + v \quad (3.20)$$

将其代入方程 (3.19) 式, 所得方程的 ε 的最低次幂为 1 次, 令其系数为零得:

$$\begin{aligned} \xi_0 = 2[& 0.0625\alpha_{11} + 0.75\alpha_{12} + \alpha_{13} + 0.046875\alpha_{21} \\ & + 0.5625\alpha_{22} + 0.75\alpha_{23} - 0.0390625\alpha_{31} \\ & - 0.46875\alpha_{32} - 0.625\alpha_{33} + 0.172875\beta_{11} \\ & + 0.1289\beta_{21} - 0.1074218\beta_{31}]^{1/2} \quad (3.21) \end{aligned}$$

由 (3.21) 式可以求出 ξ_0 的最大值, 这时必须有

$$\begin{aligned} \alpha_{11} = 1, & \quad \alpha_{12} = 1, & \quad \alpha_{13} = 1, & \quad \alpha_{21} = 1, \\ \alpha_{22} = 1, & \quad \alpha_{23} = 1, & \quad \alpha_{31} = 0, & \quad \alpha_{32} = -1, \\ \alpha_{33} = -1, & \quad \beta_{11} = 1, & \quad \beta_{21} = 0, & \quad \beta_{31} = 0, \end{aligned}$$

而 ξ_0 的最大值为:

$$|\xi_0|_{\max} = 4.212$$

故若仍取 $\varepsilon = 0.001$ 则闭环系统的极点 $-\frac{1}{4}$ 的最大可能摄动量的主部的估计值为 ± 0.130572 .

由此可见闭环系统的极点出现重根时, 该极点所受到的最大摄动量是较大的.

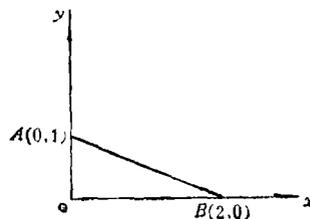


图 7

参 考 文 献

1. 张荣祥, 陈兆宽, 线性控制系统最经济结构综合解的适定性问题, 自动化学报, 7, 4, (1981), 245~254.
2. 涂序彦, 可控性、可观性的实用价值与最经济结构综合问题, 全国第一届控制理论及应用学术交流会论文集, (1979, 5).
3. Vainberg, M. M. and Trenogin, V. A., *Theory of Branching of Solutions of Non-linear Equations*, Noordhoff International Publishing House, (1974).

**Application of the Theory of Branching of Solutions of
Nonlinear Equations to the Estimation of Pole
Perturbance of Linear Closed-Loop Systems**

Zhang Rong-xiang

(Shandong Engineering Institute)

Chen Zhao-kuan

(Shandong University)

Abstract

When the state and input matrices of a multivariable linear time-invariant system are perturbed, the problem of the estimation of pole perturbation of closed-loop system is considered by making use of the theory of branching of solutions of nonlinear equations.