

有限元混合法自动网格划分技术 分析贴边岔管

徐次达 刘永仁 李雪春

(上海同济大学, 1982年2月1日收到)

摘要

本文应用有限元混合法分析水电站贴边岔管于内水压力作用时的应力问题。岔管系当作二个薄壳相交的组合壳体。由于需要计算大量的岔管, 发展了自动网格划分技术用于有限元混合法。根据三个参数即二个交叉管道的轴线交角、管壁厚度及交叉口二管道直径之比, 区分出八种网格, 十二种单元信息, 编出自动确定节点坐标及形成边界条件信息的程序, 业已计算了101个岔管, 计算效果优良。

一、贴边岔管及其参数

水电站中所用的一种由两个圆锥形薄壳相交形成的岔管如图1所示。为了缓和两管交线附近的应力集中, 我们沿着交线牢固地焊贴内外贴片, 假设它们将与壳壁共同变形抵抗水压力。

于下列岔管应力分析问题中, 我们仅取三个参数: (1) 两管轴线的交角 ψ , (2) 管壁及贴片的厚度 δ (相同), (3) 支管直径与主管直径之比 (d/D)。若给予每个参数4个值, 即有64个岔管待分析, 尚须酌量考虑其他参数, 故算了101个岔管。

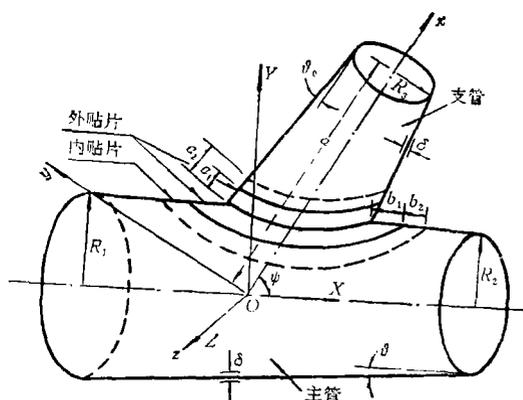


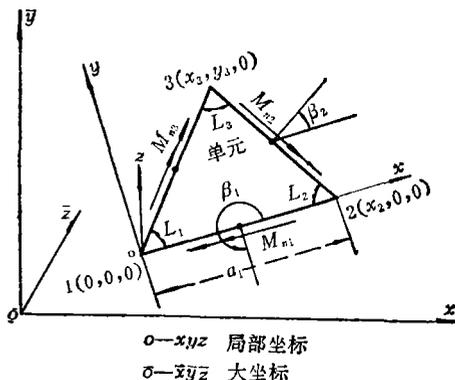
图1 贴边岔管图

二、有限元混合法简介

有限元混合法计算板壳强度问题首先由 Herrmann 提出^{[1][2]}。于国内, 徐次达等将此法用于水电站岔管分析并举行实验证实^{[3][4]}, 继又提出直接法推演性质矩阵及发展用于弹性地基板壳^{[5][4]}。

这个方法中所用的单元是三角形的(图2),有12个未知量:9个顶点位移 u_i, v_i, w_i ($i=1,2,3$).按照基本假设,单元内部位移系作线性变化,弯矩系常量,根据混合变分原理^[4]或直接法^[3]可以推得单元在局部坐标上的性质矩阵为:

$$K_e = \begin{matrix} (u) & (v) & (w) & (M_n) \\ \left(\begin{array}{cccc} I & J & 0 & \vdots & 0 \\ J^T & K & 0 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & N & \vdots & H^T \\ 0 & 0 & H & \vdots & G \end{array} \right) & \begin{matrix} (x) \\ (y) \\ (z) \\ (\vartheta_n) \end{matrix} \end{matrix} \quad (2.1)$$



o—xyz 局部坐标

σ—x̄ȳz̄ 大坐标

图2 单元及坐标

式中 I, J, K 系弹性平面问题 3×3 刚度矩阵,其中元素:

$$\left. \begin{aligned} I_{ij} &= \eta \left[D_{2i} D_{2j} + \frac{(1-\mu)}{2} D_{3i} D_{3j} \right] \\ J_{ij} &= \eta \left[\mu D_{2i} D_{3j} + \frac{(1-\mu)}{2} D_{3i} D_{2j} \right] \\ K_{ij} &= \eta \left[D_{3i} D_{3j} + \frac{(1-\mu)}{2} D_{2i} D_{2j} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

($i, j=1, 2, 3$)

式中:

$$\eta = Et\Delta / (1-\mu^2), \quad \Delta = x_2 y_3 / 2 \quad (2.2)_1$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/x_2 & 1/x_2 & 0 \\ (x_3/y_2 - 1)/y_3 & -x_3/y_3 x_2 & 1/y_3 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

其中 E, μ 为弹性常数, t 为单元厚度, Δ 为单元中面面积.式中的弹性地基刚度矩阵中的系数^[3]为:

$$N_{ij} = \frac{k_f \Delta}{6} \begin{cases} 1 & (\text{当 } i=j) \\ 0.5 & (\text{当 } i \neq j) \end{cases} \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (2.4)$$

其中 k_f 为地基系数.式(2.2)中的位移矩阵是:

$$H = \begin{bmatrix} x_2/y_3 - x_3/y_3 & x_3/y_3 & -x_2/y_3 \\ -a_2^2/2\Delta & -x_3/y_3 + a_3^2/2\Delta & x_2/y_3 - x_3/y_3 \\ -x_3/y_3 + a_3^2/2\Delta & -a_3^2/2\Delta & x_3/y_3 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

a_i ($i=1, 2, 3$) 单元的边长. 柔度矩阵 G 的元素如下:

$$G_{ij} = -\frac{\Delta}{EJ} [(1+2\mu)\Delta_{3i}L_{3j} + L_{1i}L_{1j} + L_{2i}L_{2j} + L_{3i}L_{3j} - \mu(L_{2i}L_{1j} + L_{1i}L_{2j})] \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (2.6)$$

式中 L_{ij} 是矩阵 L 的元素而矩阵 L 是:

$$L = F^{-1} \quad (2.7)$$

矩阵 F 的元素是:

$$F_{.1i} = \cos^2\beta_i, \quad F_{.2i} = \sin^2\beta_i, \quad F_{.3i} = 2\sin\beta_i \quad (2.8)$$

β_i 是单元边的法线与局部坐标 x 的交角(图2). F 系联系单元边弯矩列阵 M_n 及单元常规弯矩 M_i 的矩阵:

$$M_n = FM_i \quad (2.9)$$

式中:

$$M_n = \{M_{n1} \ M_{n2} \ M_{n3}\}^T, \quad M_i = \{M_x \ M_y \ M_{xy}\}^T \quad (2.10)$$

根据局部坐标 $o-xyz$ 及大坐标 $o-\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ 各轴的夹角余弦 $B_{.i} = \cos(\bar{x}_i, x_i)$ ($i=1, 2, 3$, $x_1=x, x_2=y, x_3=z$) 容易得到化为大坐标的单元的性质矩阵 \tilde{K}_e . 壳体的整体的性质矩阵也是叠加各单元的性质矩阵得到 $\tilde{K}_s = \Sigma \tilde{K}_e$. 据此即可以列出壳体类似于刚度方程组的性质方程组 $\tilde{K}_s \phi_s = R$ 求解未知量.

三、自动网格划分程序思想

由于岔管的形状对称, 我们即取半个岔管分析. 以两管轴线交点 o 为原点, 取大坐标 $o-\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ 及支管的局部坐标 $o-xyz$ 如图1所示.

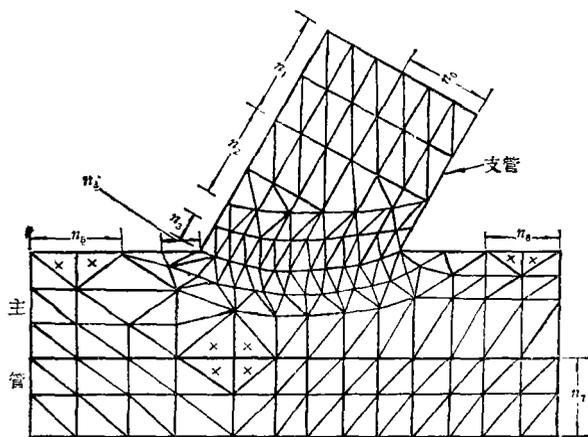


图3 半个岔管网格图

所谓“自动网格划分”的程序实际上包含三个子程序:

(1) 自动形成单元信息子程序

半个岔管的网格划分见图3. 首先确定八个关键性网格数:

n_0 ——主管钝角端轴向格数; n_1 ——支管端轴向格数; n_2 ——支管过渡到贴边轴向格数; n_3 ——支管贴边轴向格数; n_4 ——主管贴边轴向格数; n_5 ——主管钝角端轴向格数; n_6 ——主管钝角端轴向格数; n_7 ——主管钝角端轴向格数; n_8 ——主管钝角端轴向格数.

主管锐角端轴向格数; n_7 ——主管背破口边轴向格数。

确定 8 个关键性网格数 n_0-n_7 即确定了整个岔管划分单元的网格. 改变这 8 个网格数, 即改变网格的疏密或相应单元大小多寡。

其次由于单元的局部坐标取法不同, 可以区分出 12 类单元(图 4): 支管单元 ①④(图 4(a)); 主管于交线附近单元 ①③⑤⑥(图 4(b)); 主管左部单元 ⑦⑧(图 4(c)); 主管右部单元 ⑨⑩(图 4(c)); 支管 n_2 格过渡单元群; 主管 8 个特殊单元(*号单元). 12 类单元信息形式不同有不同程序段. 于是得到自动形成的总的单元信息程序. 岔管总的单元数 E_0 及节点数 L_0 如下:

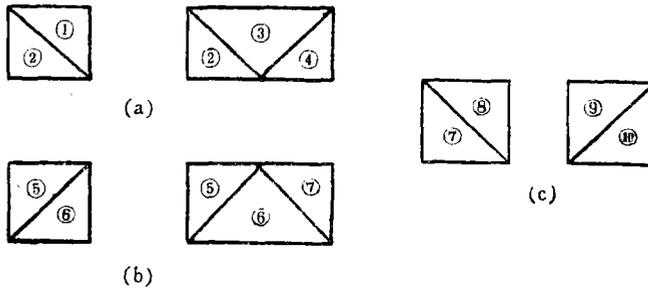


图 4 10 类单元图

$$E_0 = 4n_0n_1 + n_2(4n_0 - n_2) + 12n_0 + 8n_0(n_3 + n_4) + 2(n_0 - 1)^2 + 2 + 2n_0(n_5 + n_6) + 2n_2(n_5 + n_6 + 2n_0 - 2) - 2(n_2 - 1) \quad (3.1)$$

$$L_0 = 2n_1(4n_0 + 1) + 8n_0n_2(2n_2 - 1) + 4n_0^2 + 10n_0 + 13 + (8n_0 + 1)(2n_1 + 2n_4 + 1) + 4n_0(n_5 + n_6) + (2n_7 + 1) \cdot (2n_5 + 2n_6 + 4n_0 - 3) - 4(n_2 - 1) \quad (3.2)$$

(2) 自动计算节点坐标

根据水电站岔管实际情况, 假设岔管与主管都是圆锥管, 列出支管中面于其局部坐标 $o-xyz$ (图 5) 的方程式:

$$\left. \begin{aligned} x &= x, & y &= (r-x, P) \cos \varphi, \\ z &= (r-x, P) \sin \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

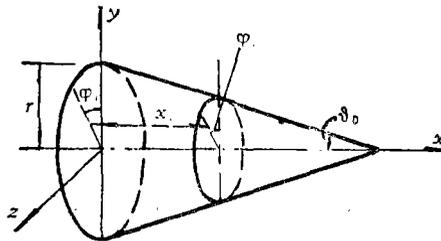


图 5 圆锥管中面

其中 r ——支管底半径; (x, y, z) ——支管圆锥面上的坐标; δ_0 ——半锥角; φ ——参数角; $P = \text{tg} \delta_0$ 。

类此, 可写出主管圆锥中面于坐标 $O-XYZ$ 的方程式:

$$X=X_1, Y=(R-X_1K)\cos\bar{\varphi}_1, Z=(R-X_1K)\sin\bar{\varphi}_1 \quad (3.4)$$

式中 R ——主管底半径; (X_1, Y_1, Z_1) ——主管曲面上的坐标; $\bar{\varphi}_1$ ——半锥角; $\bar{\varphi}_1$ ——参数角; $K=\tan\bar{\varphi}_1$. 我们定 $O-XYZ$ 为大坐标.

要得到二管交线的坐标方程式, 首先将(3.3)代为大坐标表示的形式, 然后根据在交线上两管坐标相等的条件, 可以求出两管交线上的坐标为:

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}; Y = (r\cos\varphi_1 + QX)/S \\ Z &= [r - (X\cos\psi + Y\sin\psi)P]\sin\varphi_1 \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

式中:

$$\left. \begin{aligned} A &= K^2 - \frac{Q^2}{S^2} - u^2\sin^2\varphi_1, & B &= T + u\sin^2\varphi_1 - 2RK - \frac{2r\cos\varphi_1}{S^2} Q \\ C &= R^2 - \frac{r^2\cos^2\varphi_1}{S^2} - T^2\sin^2\varphi_1 \end{aligned} \right\} \quad (3.5)_1$$

$$\left. \begin{aligned} T &= r - \frac{Pr\cos\varphi_1\sin\psi}{S}, & u &= P\cos\psi + \frac{PQ}{S}\sin^2\psi \\ S &= \cos\psi + P\sin\psi\cos\varphi_1, & Q &= \sin\psi - P\cos\psi\cos\varphi_1 \end{aligned} \right\} \quad (3.5)_2$$

于是应用(3.5)式可以得到两管交线的坐标 X, Y, Z ; 利用(3.3)及(3.4)可以得到支管的局部坐标, 主管的大坐标, 参数仅二个 $x_1=X_1$ 及 φ_1 .

(3) 自动形成边界条件信息

于程序中安排考察节点及区分节点类型的步骤. 对于支管端节点, 位于对称线上的节点, 支管主管贴边节点及主管左右端节点, 主管底节点都进行过考察并加以区分成为边界节点及对称线节点. 我们分别赋予前者固定边界条件后者对称线条件如下:

$$\bar{u}_i = \bar{v}_i = \bar{w}_i = \bar{\delta}_i = 0, \bar{w}_i = \bar{\delta}_i, \bar{X}_i = \bar{Y}_i = 0 \quad (3.6)$$

四、自动网格程序计算贴边岔管成果

应用有限元混合法并配置上列自动程序计算贴边岔管101种效果良好. 为了减少参数, 参照我国水电站岔管实际情况确定除了前述三种参数之外的其他参数如下所述.

主管的锥角取为 5° ; 支管锥角为 0° . 管壁厚度及贴片厚度取为等值 δ . 材料弹性常数 $E=2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$; 泊松比 $\mu=0.25$. 主管的直径 D 取为 500cm . 于其他情况中应力可按相似性原理换算. 岔管内水压力取为 $p=1\text{kg/cm}^2$, 其他压力情况可以压力值乘应力值得到. 外贴片宽度 b_1 为 $0.12D$, 内贴片 b_2 为 $0.18D$. 主管有内外二层贴片, 支管仅有外贴片. 三种参数即 ψ, δ 及 d/D 各取4个数值参见表1. 于是得到64种贴边岔管的最大主应力值及发生的部位见表1.

为了明确贴片缓和岔管应力集中的效果, 计算了两种无贴片的岔管: (1) $\psi=45^\circ$, $d/D=0.7$, $\delta=0.8\text{cm}$ ——应力集中系数较高; (2) $\psi=60^\circ$, $d/D=0.4$, $\delta=2.0\text{cm}$ ——应

力集中系数较低的.前者 $\sigma_{\max}=1770.11\text{kg/cm}^2$, 应力集中系数为 5.67; 后者 $\sigma_{\max}=344.54\text{kg/cm}^2$, 应力集中系数为 2.76. 贴片片后的应力集中系数分别为 2.55 及 1.27, 可见贴片缓和应力集中有效.

表1 贴边岔管(“卜”字形)的最大主应力值及部位表

ψ	d/D	$\delta=0.8\text{cm}$	部 位	$\delta=1.2\text{cm}$	部 位	$\delta=1.6\text{cm}$	部 位	$\delta=2.0\text{cm}$	部 位
45°	0.4	478.72	MI	327.91	MI	246.91	MI	195.71	MI
	0.5	560.45	MI	783.82	MI	290.22	MI	231.51	MI
	0.6	666.90	MO	440.94	MO	328.50	MI	265.00	MI
	0.7	795.48	MO	533.26	MO	398.30	MO	316.01	MO
50°	0.4	443.71	MI	303.84	MI	228.71	MI	181.16	MI
	0.5	515.55	MI	352.87	MI	268.78	MI	212.71	MI
	0.6	615.68	BO	406.56	BO	301.25	BO	242.27	MI
	0.7	707.20	BO	472.54	BO	353.80	BO	281.40	BO
55°	0.4	413.25	MI	282.82	MI	212.89	MI	168.63	MI
	0.5	481.14	BO	328.88	MI	248.59	MI	198.11	MI
	0.6	574.43	BO	378.91	BO	280.48	BO	223.52	MI
	0.7	657.99	BO	438.87	BO	326.95	BO	259.31	BO
60°	0.4	389.90	MI	266.64	MI	200.69	MI	158.93	MI
	0.5	456.65	BO	309.04	MI	233.54	MI	186.06	MI
	0.6	541.52	BO	356.87	BO	263.99	BO	208.66	MI
	0.7	617.15	BO	411.34	BO	306.13	BO	242.57	BO

注: 应力单位 kg/cm^2 , MI 主管内部, MO 主管外部, BO 支管外部, $D=500\text{cm}$, $\delta=5^\circ$, $\delta_0=0^\circ$, $p=1\text{kg/cm}^2$, $b_1=0.12D$, $b_2=0.18D$, 材料 A3 钢(参见图 1), 最大主应力出现在锥管小端部位.

参 考 文 献

- Herrmann, L. R., Finite analysis for plates, *Jour. of the Engg. Mech. Div. Proc. of ASCE*, (1967, Oct.)
- Herrmann, L. R., A finite element analysis for thin shells, *AIAA Jour*, 6, 10(1968).
- 徐次达, 华伯浩等, 混合法分析弹性薄壳及弹性地基壳的强度, *同济大学学报*, 1, (1978), 52-64.
- 徐次达, 华伯浩, 薄壳有限元混合法与求解程序, *上海计算技术通讯*, 3, (1978), 65-86.

Automatically Meshing Technique Used in the Mixed FEM for Stress Analysis of Reinforced Conical Branch Pipe Junctions

Xu Ci-da Liu Yong-ren Li Xue-chun

(Department of Mathematics and Mechanics, Tongji University, Shanghai)

Abstract

In this paper the use of the mixed finite element method for stress analysis of reinforced conical branch pipe junctions subjected to internal water pressure is presented, branch pipe junction being considered as an intersection body of two thin conical shells. For the purpose to compute a large number of branch pipe junctions with different geometrical varieties, an automatically meshing routine has been put up in the mixed FEM program with 3 geometrical parameters of the junctions to be varied, i. e. the angle included between axes of the main pipe and the branch pipe, the thickness of the wall of the shell and that of the reinforcing pad and the ratio of diameters of the branch pipe to that of the main pipe. The computer program has been provided functions to distinguish 8 kinds of different meshes and 12 sorts of elements, and to lay automatically coordinates of nodes as well as different boundary conditions of elements. In this way, stress analyses of 101 junctions have been carried out and results of computations are excellent.