应用数学和力学，第3卷第5期（1982年9月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

具有对角线化的一致质量矩阵的协调动力有限元

钱 伟 长

（清华大学，1982年2月1日收到）

摘 要

本文系统地研究了具有对角线化的一致质量矩阵的协调动力有限元．前文[1],[2]中，作者研究了具有对角线化的一致质量矩阵的动力有限元，并用此处理弹塑性撞击问题，但这些有限元都是不协调的．本文对空间四面体有限元和轴对称的三角环有限元求得了既有对角线化的一致质量矩阵，又有协调性质的形函数．这种有限元既可以用来处理撞击等和时间过程有关的问题，也可以处理振动计算，包括线性和非线性问题．

一、引 论

作者在前文[1],[2]中研究了具有对角线化的一致质量矩阵的动力有限元，但这些有限元都是不协调的，亦即是说，凡是用这些形函数表示的各物理量，除了在有限元的结点上连续外，在四面体的交界面上，或在三角圆环的交界面上，都不连续．所以，虽然不用集总质量的假设求得对角线化的质量矩阵，但不协调的有限元仍然引起人们的不安．本文进一步研究既具有对角线化的一致质量矩阵，而又是协调的有限元．当然为了达到这一目的，我们必须引用较高次数的多项式作为形函数．例如，对四面体有限元而言，我们应该用三次式作为形函数，而对于三角圆环有限元而言，我们得用四次式作为形函数．

二、四面体有限元的协调的形函数

设空间坐标为 (x,y,z)，位移分量为 (u,v,w)，加速度为 $(\ddot{u},\ddot{v},\ddot{w})$，应力分量为$(\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z,\ \tau_{xy},\ \tau_{yz},\ \tau_{zx})$，密度为 ρ，运动方程可以写成

$$\rho\ddot{u}=\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} \tag{2.1a}$$

$$\rho\ddot{v}=\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z} \tag{2.1b}$$

$$\rho\ddot{w}=\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z} \tag{2.1c}$$

设 $\delta u,\delta v,\delta w$ 为虚位移分量，把 $\delta u,\delta v,\delta w$ 分别乘 (2.1a,b,c)，然后在域Ω中积分，得

$$\iiint_{\Omega} \rho \ddot{u}\delta u d\Omega=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}\right)\delta u d\Omega \tag{2.2a}$$

$$\iiint_{\Omega} \rho \ddot{v}\delta v d\Omega=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{y}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}\right)\delta v d\Omega \tag{2.2b}$$

$$\iiint_{\Omega} \rho \ddot{w}\delta w d\Omega=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{z}}{\partial z}\right)\delta w d\Omega \tag{2.2c}$$

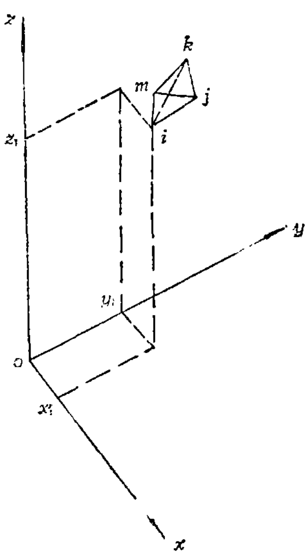


图1　典型的四面体有限元

把域Ω分为n个四面体有限元，它们各有 i，j，k，m 四个结点（图1），设形函数为N_i，N_j，N_k，N_m，设u，v，w，$\ddot{u}$，$\ddot{v}$，$\ddot{w}$，σ_x，σ_y，σ_z，τ_{xy}，τ_{yz}，τ_{zx} 可以用形函数和各该量的结点值来表示：

即设

$$\left.\begin{array}{lll}\delta u=\mathbf{N}\delta\mathbf{u}, & \delta v=\mathbf{N}\delta\mathbf{v}, & \delta w=\mathbf{N}\delta\mathbf{w}\\ \ddot{u}=\mathbf{N}\ddot{\mathbf{u}}, & \ddot{v}=\mathbf{N}\ddot{\mathbf{v}}, & \ddot{w}=\mathbf{N}\ddot{\mathbf{w}}\\ \sigma_x=\mathbf{N}\boldsymbol{\sigma}_x, & \sigma_y=\mathbf{N}\boldsymbol{\sigma}_y, & \sigma_z=\mathbf{N}\boldsymbol{\sigma}_z\\ \tau_{yz}=\mathbf{N}\boldsymbol{\tau}_{yz}, & \tau_{zx}=\mathbf{N}\boldsymbol{\tau}_{zx}, & \tau_{xy}=\mathbf{N}\boldsymbol{\tau}_{xy}\end{array}\right\} \tag{2.3}$$

其中

$$\mathbf{N}=\lfloor N_i,\ N_j,\ N_k,\ N_m\rfloor \tag{2.4a}$$

$$\delta\mathbf{u}^T=\lfloor \delta u_i,\ \delta u_j,\ \delta u_k,\ \delta u_m\rfloor \tag{2.4b}$$

$$\delta\mathbf{v}^T=\lfloor \delta v_i,\ \delta v_j,\ \delta v_k,\ \delta v_m\rfloor \tag{2.4c}$$

$$\delta\mathbf{w}^T=\lfloor \delta w_i,\ \delta w_j,\ \delta w_k,\ \delta w_m\rfloor \tag{2.4d}$$

$$\ddot{\mathbf{u}}^T=\lfloor \ddot{u}_i,\ \ddot{u}_j,\ \ddot{u}_k,\ \ddot{u}_m\rfloor,\quad \ddot{\mathbf{v}}^T=\lfloor \ddot{v}_i,\ \ddot{v}_j,\ \ddot{v}_k,\ \ddot{v}_m\rfloor \tag{2.4e,f}$$

$$\ddot{\mathbf{w}}^T=\lfloor \ddot{w}_i,\ \ddot{w}_j,\ \ddot{w}_k,\ \ddot{w}_m\rfloor \tag{2.4g}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_x^T=\lfloor \sigma_{xi},\ \sigma_{xj},\ \sigma_{xk},\ \sigma_{xm}\rfloor,\quad \boldsymbol{\tau}_{yz}^T=\lfloor \tau_{yzi},\ \tau_{yzj},\ \tau_{yzk},\ \tau_{yzm}\rfloor \tag{2.4h,i}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_y^T=\lfloor \sigma_{yi},\ \sigma_{yj},\ \sigma_{yk},\ \sigma_{ym}\rfloor,\quad \boldsymbol{\tau}_{zx}^T=\lfloor \tau_{zxi},\ \tau_{zxj},\ \tau_{zxk},\ \tau_{zxm}\rfloor \tag{2.4j,k}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_z^T=\lfloor \sigma_{zi},\ \sigma_{zj},\ \sigma_{zk},\ \sigma_{zm}\rfloor,\quad \boldsymbol{\tau}_{xy}^T=\lfloor \tau_{xyi},\ \tau_{xyj},\ \tau_{xyk},\ \tau_{xym}\rfloor \tag{2.4l,m}$$

代入(2.2a,b,c)，得形式相同的n个有限元积分之和．现取其一个有限元的积分作为典型，即有限元的特征方程为

$$\iiint_{(e)}\rho\mathbf{N}\ddot{\mathbf{u}}\mathbf{N}\delta\mathbf{u}dV=\iiint_{(e)}\left(\frac{\partial\mathbf{N}}{\partial x}\boldsymbol{\sigma}_x+\frac{\partial\mathbf{N}}{\partial y}\boldsymbol{\tau}_{xy}+\frac{\partial\mathbf{N}}{\partial z}\boldsymbol{\tau}_{xz}\right)\mathbf{N}\delta\mathbf{u}dV \tag{2.5a}$$

$$\iiint_{(e)}\rho\mathbf{N}\ddot{\mathbf{v}}\mathbf{N}\delta\mathbf{v}dV=\iiint_{(e)}\left(\frac{\partial\mathbf{N}}{\partial x}\boldsymbol{\tau}_{yx}+\frac{\partial\mathbf{N}}{\partial y}\boldsymbol{\sigma}_y+\frac{\partial\mathbf{N}}{\partial z}\boldsymbol{\tau}_{yz}\right)\mathbf{N}\delta\mathbf{v}dV \tag{2.5b}$$

$$\iiint_{(e)}\rho\mathbf{N}\ddot{\mathbf{w}}\mathbf{N}\delta\mathbf{w}dV=\iiint_{(e)}\left(\frac{\partial\mathbf{N}}{\partial x}\boldsymbol{\tau}_{xz}+\frac{\partial\mathbf{N}}{\partial y}\boldsymbol{\tau}_{yz}+\frac{\partial\mathbf{N}}{\partial z}\boldsymbol{\sigma}_z\right)\mathbf{N}\delta\mathbf{w}dV \tag{2.5c}$$

以(2.5a)式为例，$\mathbf{N}\delta\mathbf{u}=N_i\delta u_i+N_j\delta u_j+N_k\delta u_k+N_m\delta u_m$中的$\delta u_i$，$\delta u_j$，$\delta u_k$，$\delta u_m$都是独立的，所以（2.5a）可以分为四个特征方程

$$\iiint_{(e)}\rho\mathbf{N}\ddot{\mathbf{u}}N_i\,dV=\iiint_{(e)}\left(\frac{\partial\mathbf{N}}{\partial x}\sigma_x+\frac{\partial\mathbf{N}}{\partial y}\tau_{xy}+\frac{\partial\mathbf{N}}{\partial z}\tau_{xz}\right)N_i\,dV \tag{2.6a}$$

$$\iiint_{(e)}\rho\mathbf{N}\ddot{\mathbf{u}}N_j\,dV=\iiint_{(e)}\left(\frac{\partial\mathbf{N}}{\partial x}\sigma_x+\frac{\partial\mathbf{N}}{\partial y}\tau_{xy}+\frac{\partial\mathbf{N}}{\partial z}\tau_{xz}\right)N_j\,dV \tag{2.6b}$$

$$\iiint_{(e)}\rho\mathbf{N}\ddot{\mathbf{u}}N_k\,dV=\iiint_{(e)}\left(\frac{\partial\mathbf{N}}{\partial x}\sigma_x+\frac{\partial\mathbf{N}}{\partial y}\tau_{xy}+\frac{\partial\mathbf{N}}{\partial z}\tau_{xz}\right)N_k\,dV \tag{2.6c}$$

$$\iiint_{(e)}\rho\mathbf{N}\ddot{\mathbf{u}}N_m\,dV=\iiint_{(e)}\left(\frac{\partial\mathbf{N}}{\partial x}\sigma_x+\frac{\partial\mathbf{N}}{\partial y}\tau_{xy}+\frac{\partial\mathbf{N}}{\partial z}\tau_{xz}\right)N_m\,dV \tag{2.6d}$$

我们必须指出

$$\iiint_{(e)}\rho\mathbf{N}\ddot{\mathbf{u}}N_i\,dV=M_{ii}\ddot{u}_i+M_{ji}\ddot{u}_j+M_{ki}\ddot{u}_k+M_{mi}\ddot{u}_m \tag{2.7a}$$

$$\iiint_{(e)}\rho\mathbf{N}\ddot{\mathbf{u}}N_j\,dV=M_{ij}\ddot{u}_i+M_{jj}\ddot{u}_j+M_{kj}\ddot{u}_k+M_{mj}\ddot{u}_m \tag{2.7b}$$

$$\iiint_{(e)}\rho\mathbf{N}\ddot{\mathbf{u}}N_k\,dV=M_{ik}\ddot{u}_i+M_{jk}\ddot{u}_j+M_{kk}\ddot{u}_k+M_{mk}\ddot{u}_m \tag{2.7c}$$

$$\iiint_{(e)}\rho\mathbf{N}\ddot{\mathbf{u}}N_m\,dV=M_{im}\ddot{u}_i+M_{jm}\ddot{u}_j+M_{km}\ddot{u}_k+M_{mm}\ddot{u}_m \tag{2.7d}$$

其中一致质量矩阵的各项为

$$M_{ii}=\iiint_{(e)}\rho N_iN_i\,dV,\quad M_{jj}=\iiint_{(e)}\rho N_jN_j\,dV\quad 等 \tag{2.8}$$

$$M_{ij}=M_{ji}=\iiint_{(e)}\rho N_iN_j\,dV,\quad M_{ik}=M_{ki}=\iiint_{(e)}\rho N_iN_k\,dV\quad 等 \tag{2.9}$$

以(2.6a)为例，可以写成

$$M_{ii}\ddot{u}_i+M_{ji}\ddot{u}_j+M_{ki}\ddot{u}_k+M_{mi}\ddot{u}_m=f_{xi} \tag{2.10}$$

其中f_{xi}为这一元素的内力作用在i结点上的合力.

$$f_{xi}=\iiint_{(e)}\left(\frac{\partial\mathbf{N}}{\partial x}\sigma_x+\frac{\partial\mathbf{N}}{\partial y}\tau_{xy}+\frac{\partial\mathbf{N}}{\partial z}\tau_{xz}\right)N_i\,dV \tag{2.11}$$

如果一致质量矩阵是对角线化的，则有

$$M_{ij}=M_{ji}=M_{ik}=M_{ki}=\cdots\cdots=0 \tag{2.12}$$

于是（2.10）式可以写成一种有限元特征方程的形式.

$$M_{ii}\ddot{u}_i=f_{xi} \tag{2.13}$$

把和结点i有关的各有限元的作用组合起来，我们得结点i在x轴向的加速度

$$\ddot{u}_i=\frac{\sum^{i} f_{xi}}{\sum^{i} M_{ii}} \tag{2.14}$$

从（2.7b,c,d）也可以求得$\ddot{u}_j$，$\ddot{u}_k$，$\ddot{u}_m$的相类的结果

$$\ddot{u}_j=\frac{\sum^{j} f_{xj}}{\sum^{j} M_{jj}},\quad \ddot{u}_k=\frac{\sum^{k} f_{xk}}{\sum^{k} M_{kk}},\quad \ddot{u}_m=\frac{\sum^{m} f_{xm}}{\sum^{m} M_{mm}} \tag{2.15}$$

从（2.5b,c,d），我们用相同的对角线化条件，可以求得$\ddot{v}_i$，$\ddot{v}_j$，$\ddot{v}_k$，$\ddot{v}_m$，$\ddot{w}_i$，$\ddot{w}_j$，$\ddot{w}_k$，$\ddot{w}_m$.

对角线化条件其实只有一个，即

$$M_{ij}=M_{ji}=\iiint_{(e)}\rho N_i N_j dV \tag{2.16}$$

如果有限元足够小，ρ在该有限元中可以近似地看作为常数，则(2.16)式也可以写成

$$\iiint_{(e)} N_i N_j dV=0 \tag{2.17}$$

这是决定N_i的一个条件，称有对角线化条件.

现在让我们引进体积坐标L_i，L_j，L_k，L_m，它们是

$$\left.\begin{aligned}
L_i&=\frac{1}{6V}(a_i+b_i x+c_i y+d_i z)\\
L_j&=\frac{1}{6V}(a_j+b_j x+c_j y+d_j z)\\
L_k&=\frac{1}{6V}(a_k+b_k x+c_k y+d_k z)\\
L_m&=\frac{1}{6V}(a_m+b_m x+c_m y+d_m z)
\end{aligned}\right\} \tag{2.18}$$

其中V为四面体有限元的体积

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}1, & x_i, & y_i, & z_i\\ 1, & x_j, & y_j, & z_j\\ 1, & x_k, & y_k, & z_k\\ 1, & x_m, & y_m, & z_m\end{vmatrix} \tag{2.19}$$

其中（x_i，y_i，z_i），（x_j，y_j，z_j），（x_k，y_k，z_k），（x_m，y_m，z_m）为四面体上四个结点i，j，k，m上的坐标．其它各系数为

$$\left.\begin{aligned}
a_i&=\begin{vmatrix}x_j, & y_j, & z_j\\ x_k, & y_k, & z_k\\ x_m, & y_m, & z_m\end{vmatrix} & \qquad b_i&=-\begin{vmatrix}1, & y_j, & z_j\\ 1, & y_k, & z_k\\ 1, & y_m, & z_m\end{vmatrix}\\
c_i&=\begin{vmatrix}1, & x_j, & z_j\\ 1, & x_k, & z_k\\ 1, & x_m, & z_m\end{vmatrix} & \qquad d_i&=-\begin{vmatrix}1, & x_j, & y_j\\ 1, & x_k, & y_k\\ 1, & x_m, & y_m\end{vmatrix}
\end{aligned}\right\} \tag{2.20}$$

其它系数如 a_i，b_i，c_i，d_i 等可以通过轮换下标和正负号求得．L_i，L_j，L_k，L_m 满足下列关系．

$$L_i=1 \ \text{在结点}i\text{上，} L_i=0 \ \text{在}\triangle jkm\text{上} \tag{2.21a}$$

$$L_j=1 \ \text{在结点}j\text{上，} L_j=0 \ \text{在}\triangle kmi\text{上} \tag{2.21b}$$

$$L_k=1 \ \text{在结点}k\text{上，} L_k=0 \ \text{在}\triangle ijm\text{上} \tag{2.21c}$$

$$L_m=1 \ \text{在结点}m\text{上，} L_m=0 \ \text{在}\triangle ijk\text{上} \tag{2.21d}$$

而且在四面体各点上有

$$L_i+L_j+L_k+L_m=1 \tag{2.21e}$$

设N_i，N_j，N_k，N_m为L_i，L_j，L_k，L_m的函数，它应该满足

$$N_i=1 \ \text{在结点}i\text{上，} \ N_i=0 \ \text{在结点}j,\ k,\ m\text{上} \tag{2.22a}$$

$$N_j=1 \ \text{在结点}j\text{上，} \ N_j=0 \ \text{在结点}i,\ k,\ m\text{上} \tag{2.22b}$$

$$N_k=1 \ \text{在结点}k\text{上，} \ N_k=0 \ \text{在结点}i,\ j,\ m\text{上} \tag{2.22c}$$

$$N_m=1 \ \text{在结点}m\text{上，} \ N_m=0 \ \text{在结点}i,\ j,\ k\text{上} \tag{2.22d}$$

而在四面体中各点上同样有

$$N_i+N_j+N_k+N_m=1 \tag{2.22e}$$

一般说来，只满足(2.22a,b,c,d,e)的有限元形函数不是一定协调的．或即是说，用这些条件写出的形函数所表达的场函数，在交界面$\triangle ijk$，$\triangle ijm$，$\triangle ikm$，$\triangle jkm$上不一定是连续的．以位移u为例．

$$\begin{aligned} u &= N_iu_i+N_ju_j+N_ku_k+N_mu_m \\ &= N_i(L_i,L_j,L_k,L_m)u_i+N_j(L_i,L_j,L_k,L_m)u_j \\ &\quad +N_k(L_i,L_j,L_k,L_m)u_k+N_m(L_i,L_j,L_k,L_m)u_m \end{aligned} \tag{2.23}$$

在交界面$\triangle ijk$上，$L_m=0$，于是有

$$\begin{aligned} u &= N_i(L_i,L_j,L_k,0)u_i+N_j(L_i,L_j,L_k,0)u_j \\ &\quad +N_k(L_i,L_j,L_k,0)u_k+N_m(L_i,L_j,L_k,0)u_m \end{aligned} \tag{2.24}$$

如果结点值u_i,u_j,u_k对共有交界面$\triangle ijk$的两个相邻四面体而言是相等的，则对于交界面$\triangle ijk$各点而言，u连续的条件，必须是

$$N_m(L_i,L_j,L_k,0)=0 \tag{2.25}$$

这是有限元协调的充分和必要条件．也可以写成

$$N_m=0 \quad \text{在}\triangle ijk\text{上} \tag{2.26a}$$

同时从L_i,L_j,L_k,L_m的轮换特点还可以证明

$$N_i=0 \quad \text{在}\triangle jkm\text{上} \tag{2.26b}$$

$$N_j=0 \quad \text{在}\triangle ikm\text{上} \tag{2.26c}$$

$$N_k=0 \quad \text{在}\triangle ijm\text{上} \tag{2.26d}$$

(2.26a,b,c,d)统称协调条件，但只有一个是独立的．

总起来说，N_i 必须满足下列条件才是具有对角线化的一致质量矩阵的协调有限元的形函数：

(a) 对角线化条件（2.17）

(b) 一般形函数的条件(2.22a,b,c,d,e)

(c) 协调条件(2.26a,b,c,d)

前文[1]的形函数，是一个二次式，只满足条件(a)和(b)，不满足协调条件(2.26a,b,c,d)，所以是不协调的有限元形函数.

为了满足协调条件(2.26a,b,c,d)，我们必须从三次式的形函数中寻找. 最一般的i, j,k,m有互换对称的三次式形函数，可以写成

$$\begin{aligned}N_i=&L_i+AL_i^3+B(L_j^3+L_k^3+L_m^3)+CL_i^2(L_j+L_k+L_m)\\&+DL_i(L_j^2+L_k^2+L_m^2)+E[L_j^2(L_k+L_m)+L_k^2(L_j+L_m)+L_m^2(L_j+L_k)]\\&+FL_i(L_jL_k+L_kL_m+L_mL_j)+GL_jL_kL_m\end{aligned}\tag{2.27a}$$

$$\begin{aligned}N_j=&L_j+AL_j^3+B(L_i^3+L_k^3+L_m^3)+CL_j^2(L_i+L_k+L_m)\\&+DL_j(L_i^2+L_k^2+L_m^2)+E[L_i^2(L_k+L_m)+L_k^2(L_i+L_m)+L_m^2(L_i+L_k)]\\&+FL_j(L_iL_m+L_mL_k+L_kL_i)+GL_iL_kL_m\end{aligned}\tag{2.27b}$$

$$\begin{aligned}N_k=&L_k+AL_k^3+B(L_i^3+L_j^3+L_m^3)+CL_k^2(L_i+L_j+L_m)\\&+DL_k(L_i^2+L_j^2+L_m^2)+E[L_i^2(L_j+L_m)+L_j^2(L_i+L_m)+L_m^2(L_i+L_j)]\\&+FL_k(L_iL_j+L_iL_m+L_jL_m)+GL_iL_jL_m\end{aligned}\tag{2.27c}$$

$$\begin{aligned}N_m=&L_m+AL_m^3+B(L_i^3+L_j^3+L_k^3)+CL_m^2(L_i+L_j+L_k)\\&+DL_m(L_i^2+L_j^2+L_k^2)+E[L_i^2(L_j+L_k)+L_j^2(L_i+L_k)+(L_k^2(L_i+L_j)]\\&+FL_m(L_iL_j+L_iL_k+L_jL_k)+GL_iL_jL_k\end{aligned}\tag{2.27d}$$

其中A,B,C,D,E,F,G为待定常数. 从(2.22a,b,c,d)，我们有

$$A=0,\quad B=0\tag{2.28a,b}$$

从(2.22e)，得

$$\begin{aligned}&(A+3B)(L_i^3+L_j^3+L_k^3+L_m^3)\\&+(C+D+2E)[L_i^2(L_j+L_k+L_m)+L_j^2(L_i+L_k+L_m)+L_k^2(L_i+L_j+L_m)\\&+L_m^2(L_i+L_j+L_k)]+(G+3F)(L_jL_kL_m+L_jL_iL_k+L_iL_jL_m+L_iL_kL_m)=0\end{aligned}\tag{2.29}$$

上式第一项，因为$A=B=0$，所以恒等于零. 第二第三项是完全独立的. 因为上式对四面体中任意L_i, L_j, L_k, L_m都适用，所以有

$$C=-D-2E,\quad G=-3F\tag{2.30}$$

把(2.28a,b)，(2.30)代入(2.27a,b,c,d)，得

$$\begin{aligned}N_i=&L_i+D[L_iL_j(L_j-L_i)+L_iL_k(L_k-L_i)+L_iL_m(L_m-L_i)]\\&+E[L_j^2(L_k+L_m)+L_k^2(L_j+L_m)+L_m^2(L_j+L_k)-2L_i^2(L_j+L_k+L_m)]\\&+F[L_i(L_jL_k+L_kL_m+L_mL_j)-3L_jL_kL_m]\end{aligned}\tag{2.31a}$$

$$\begin{aligned}N_j=&L_j+D[L_jL_i(L_i-L_j)+L_jL_k(L_k-L_j)+L_jL_m(L_m-L_j)]\\&+E[L_i^2(L_k+L_m)+L_k^2(L_i+L_m)+L_m^2(L_i+L_k)-2L_j^2(L_i+L_k+L_m)]\\&+F[L_j(L_iL_k+L_iL_m+L_mL_k)-3L_iL_kL_m]\end{aligned}\tag{2.31b}$$

$$\begin{aligned}N_k=&L_k+D[L_kL_i(L_i-L_k)+L_kL_j(L_j-L_k)+L_kL_m(L_m-L_k)]\\&+E[L_i^2(L_j+L_m)+L_j^2(L_i+L_m)+L_m^2(L_i+L_j)-2L_k^2(L_i+L_j+L_m)]\\&+F[L_k(L_iL_j+L_iL_m+L_jL_m)-3L_iL_jL_m]\end{aligned}\tag{2.31c}$$

$$\begin{aligned}N_m=&L_m+D[L_mL_i(L_i-L_m)+L_mL_j(L_j-L_m)+L_mL_k(L_k-L_m)]\\&+E[L_i^2(L_j+L_k)+L_j^2(L_i+L_k)+L_k^2(L_i+L_j)-2L_m^2(L_i+L_j+L_k)]\\&+F[L_m(L_iL_j+L_iL_k+L_jL_k)-3L_iL_jL_k]\end{aligned}\tag{2.31d}$$

这里还有三个常数待定. 根据(2.26a)，我们从(2.31d)得

$$E[L_i^2(L_j+L_k)+L_j^2(L_i+L_k)+L_k^2(L_iL_j)]-3FL_iL_jL_k=0 \tag{2.32}$$

这对一切L_i,L_j,L_k都适用，得

$$E=F=0 \tag{2.33}$$

最后得

$$\left.\begin{aligned}N_i&=L_i+D[L_iL_j(L_j-L_i)+L_iL_k(L_k-L_i)+L_iL_m(L_m-L_i)]\\N_j&=L_j+D[L_jL_i(L_i-L_j)+L_jL_k(L_k-L_j)+L_jL_m(L_m-L_j)]\\N_k&=L_k+D[L_kL_i(L_i-L_k)+L_kL_j(L_j-L_k)+L_kL_m(L_m-L_k)]\\N_m&=L_m+D[L_mL_i(L_i-L_m)+L_mL_j(L_j-L_m)+L_mL_k(L_k-L_m)]\end{aligned}\right\} \tag{2.34}$$

这里只剩一个待定常数D，它是从对角线化条件(2.17)决定的. 把 (2.34) 代入 (2.17)，并利用积分公式

$$\iiint_{(e)}L_i^\alpha L_j^\beta L_k^\gamma L_m^\delta\,dV=\frac{\alpha!\beta!\gamma!\delta!}{(\alpha+\beta+\gamma+\delta+3)!}6V \tag{2.35}$$

我们得

$$378+36D-5D^2=0 \tag{2.36}$$

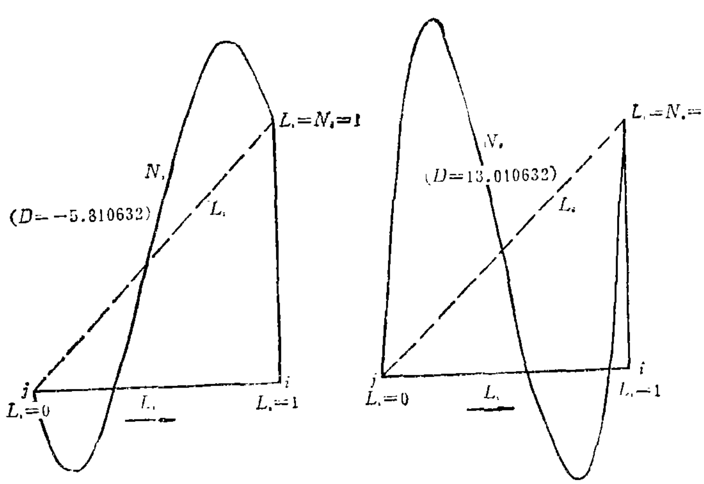
本式有两个根，

$$D_1=13.010632,\quad D_2=-5.810632 \tag{2.37}$$

在四面体的棱边ij上，$L_m=L_k=0$，$L_j=1-L_i$，形函数N_i的分布为

$$N_i=L_i+DL_i(1-L_i)(1-2L_i) \tag{2.38}$$

其分布曲线的形状如图2(a),(b).



(a)　$D=-5.810632$　　　(b)　$D=13.010632$

图 2　形函数在棱边ij上的分布曲线
$N_i=L_i+DL_i(1-L_i)(1-2L_i)$

从图2(a)上可以看到，如果取$D=-5.810632$，形函数在棱边ij上的分布曲线，较图2(b)更接近于L_i的分布. 我们建议对角线化一致质量矩阵的协调有限元形函数取(2.34)，而且$D=D_2=-5.810632$.

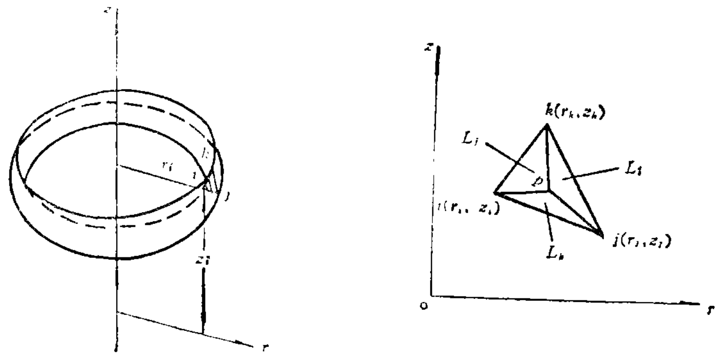
对角线项为

$$M_{ii}=\rho\iiint_{(e)} N_i^2 dV=\frac{V\rho}{2520}(252-36D+5D^2)=\frac{1}{4}V\rho \tag{2.39}$$

到此，我们可以看到，（2.34）确为满足一切条件的协调的有限元形函数．我们可以利用这种形函数象前文[1]那样研究空间的各种动力学问题．

三、轴对称问题三角圆环有限元的协调的形函数

设在典型的三角圆环有限元和一(r,z)坐标面上交截一个三角形ijk（图 3）．i，j，k为结点，其坐标分别为（r_i,z_i），（r_j,z_j），（r_k,z_k）．我们引用面积坐标L_i，L_j，L_k，即



(a)　　　　(b)

图 3　三角圆环有限元(a)及其截面三角形(b)

$$\left.\begin{aligned}L_i&=\frac{1}{2A}(a_i+b_ir+c_iz)\\L_j&=\frac{1}{2A}(a_j+b_jr+c_jz)\\L_k&=\frac{1}{2A}(a_k+b_kr+c_kz)\end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

其中a_i,b_i,c_i等分别表示

$$\left.\begin{aligned}a_i&=r_jz_k-r_kz_j\\b_i&=z_j-z_k\\c_i&=-r_j+r_k\end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

将下标轮换，即得出a_j,b_j,c_j,a_k,b_k,c_k．(3.1)式中的A表示三角形总面积，它是

$$2A=\begin{vmatrix}1 & r_i & z_i\\1 & r_j & z_j\\1 & r_k & z_k\end{vmatrix}=b_ic_j-b_jc_i=b_jc_k-b_kc_j=b_kc_i-b_ic_k \tag{3.3}$$

L_i,L_j,L_k为三角形任一点的面积坐标，而且

$$\left.\begin{aligned} r&=r_iL_i+r_jL_j+r_kL_k \\ z&=z_iL_i+z_jL_j+z_kL_k \end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

面积坐标还有下列性质：

$L_i=1$，在结点i上，$L_i=0$，在jk边上 (3.5a)

$L_j=1$，在结点j上，$L_j=0$，在ik边上 (3.5b)

$L_k=1$，在结点k上，$L_k=0$，在ij边上 (3.5c)

$L_i+L_j+L_k=1$ 在整个三角形内 (3.5d)

设位移分量u，w在结点i，j，k上的值分别为$(u_i,\ w_i)$，$(u_j,\ w_j)$，$(u_k,\ w_k)$，并设N_i，N_j，N_k为有关的形状函数，而且

$$\left.\begin{aligned} u&=N_iu_i+N_ju_j+N_ku_k \\ w&=N_iw_i+N_jw_j+N_kw_k \end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

则N_i，N_j，N_k必满足下述条件

$N_i=1$ 在结点i上，$N_i=0$ 在结点j,k上 (3.7a)

$N_j=1$ 在结点j上，$N_j=0$ 在结点i,k上 (3.7b)

$N_k=1$ 在结点k上，$N_k=0$ 在结点$i,j,$上 (3.7c)

$N_i+N_j+N_k=1$ 在三角形i,j,k内各点上 (3.7d)

在前文[2]已经证明，满足质量矩阵的对角线化的条件为

$$\iint_{(e)} N_iN_jL_idrdz=0,\quad \iint_{(e)} N_iN_jL_kdrdz=0 \tag{3.8a,b}$$

只要i,j,k在N_i,N_j,N_k内有互换性，则其它条件都是不独立的.

从(3.6)式中，可以看到，在三角形ij边上u,w连续的条件为

$$N_k=0\quad 在L_k=0时(即ij边) \tag{3.9}$$

同样还有在$L_i=0$时，$N_i=0$；$L_j=0$时，$N_j=0$ 但是，只要i,j,k在N_i,N_j,N_k内有互换性，则除了(3.9)式外，其它条件都不是独立的.

总起来说，一致质量矩阵对角线化的协调有限元的形函数，除了满足(3.7a, b, c, d)，(38a,b)外，尚须满足(3.9)式的协调条件.

前文[2]的形函数只满足(3.7a,b,c,d)和(3.8a,b)，不满足(3.9)式，所以一致质量矩阵虽已对角线化，但有限元的形函数并不协调.

为了求得协调的形函数，我们必须从4次式中寻找. 有i,j,k互换性的四次式形函数可以写成

$$\begin{aligned} N_i=&L_i+AL_i^4+B(L_j^4+L_k^4)+CL_i^3(L_j+L_k)+DL_i(L_j^3+L_k^3)+E(L_j^3L_k+L_k^3L_j) \\ &+FL_i^2(L_j^2+L_k^2)+GL_j^2L_k^2+HL_i^2L_jL_k+I(L_j^2L_iL_k+L_k^2L_iL_j) \end{aligned} \tag{3.10a}$$

$$\begin{aligned} N_j=&L_j+AL_j^4+B(L_k^4+L_i^4)+CL_j^3(L_k+L_i)+DL_j(L_k^3+L_i^3)+E(L_k^3L_i+L_i^3L_k) \\ &+FL_j^2(L_k^2+L_i^2)+GL_k^2L_i^2+HL_j^2L_kL_i+I(L_k^2L_jL_i+L_i^2L_jL_k) \end{aligned} \tag{3.10b}$$

$$\begin{aligned} N_k=&L_k+AL_k^4+B(L_i^4+L_j^4)+CL_k^3(L_i+L_j)+DL_k(L_i^3+L_j^3)+E(L_i^3L_j+L_j^3L_i) \\ &+FL_k^2(L_i^2+L_j^2)+GL_i^2L_j^2+HL_k^2L_iL_j+I(L_i^2L_kL_j+L_j^2L_kL_i) \end{aligned} \tag{3.10c}$$

把(3.10a, b, c)代入(3.7a, b, c)，得独立的两个条件

$$A=0,\qquad B=0 \tag{3.11a,b}$$

把(3·11a,b)代入(3·10a,b,c)，再把结果代入(3·5d)，得

$$\begin{aligned}&(C+D+E)[L_i^3(L_j+L_k)+L_j^3(L_k+L_i)+L_k^3(L_i+L_j)]\\&\quad+(2F+G)(L_i^2L_j^2+L_j^2L_k^2+L_k^2L_i^2)\\&\quad+(H+2I)(L_i^2L_jL_k+L_j^2L_iL_k+L_k^2L_iL_j)=0\end{aligned} \tag{3.12}$$

由于这三项都是独立的，所以有

$$E=-C-D,\qquad G=-2F,\qquad H=-2I \tag{3.13a,b,c}$$

把(3·11a,b)，(3·13a,b,c)代入(3·10a,b,c)，消去 A，B，E，G，H，得

$$\begin{aligned}N_i=&L_i+C[L_i^3(L_j+L_k)-L_j^3L_k-L_k^3L_j]+D[L_i(L_j^3+L_k^3)-L_j^3L_k-L_k^3L_j]\\&+F[L_i^2(L_k^2+L_j^2)-2L_j^2L_k^2]+I[L_j^2L_iL_k+L_k^2L_iL_j-2L_i^2L_jL_k]\end{aligned} \tag{3·14a}$$

$$\begin{aligned}N_j=&L_j+C[L_j^3(L_k+L_i)-L_k^3L_i-L_i^3L_k]+D[L_j(L_k^3+L_i^3)-L_k^3L_i-L_i^3L_k]\\&+F[L_j^2(L_i^2+L_k^2)-2L_k^2L_i^2]+I[L_k^2L_jL_i+L_i^2L_jL_k-2L_j^2L_kL_i]\end{aligned} \tag{3.14b}$$

$$\begin{aligned}N_k=&L_k+C[L_k^3(L_i+L_j)-L_i^3L_j-L_j^3L_i]+D[L_k(L_i^3+L_j^3)-L_i^3L_j-L_j^3L_i]\\&+F[L_k^2(L_j^2+L_i^2)-2L_i^2L_j^2]+I[L_i^2L_kL_j+L_j^2L_kL_i-2L_k^2L_iL_j]\end{aligned} \tag{3·14c}$$

现在让我们满足协调条件(3·9)，在 i，j 边上，$L_k=0$，$L_j=1-L_i$，所以有

$$-(D+C)[L_i^3L_j+L_j^3L_i]-2FL_i^2L_j^2=0 \tag{3·15}$$

这两项是完全独立的，所以，得

$$D=-C,\qquad F=0 \tag{3·16}$$

把(3.16)代入(3.14a,b,c)，得只剩二个待定常数 C 和 I 的形函数表达式.

$$N_i=L_i+C[L_i^3(L_j+L_k)-L_i(L_j^3+L_k^3)]+I[L_iL_j^2L_k+L_iL_jL_k^2-2L_i^2L_jL_k] \tag{3.17a}$$

$$N_j=L_j+C[L_j^3(L_i+L_k)-L_j(L_i^3+L_k^3)]+I[L_iL_jL_k^2+L_i^2L_jL_k-2L_iL_j^2L_k] \tag{3.17b}$$

$$N_k=L_k+C[L_k^3(L_i+L_j)-L_k(L_j^3+L_i^3)]+I[L_i^2L_jL_k+L_iL_j^2L_k-2L_iL_jL_k^2] \tag{3.17c}$$

决定 C 和 I 的条件为(3.8a,b)，把(3.17a,b,c)代入(3.8a,b)，得决定 C 和 I 的两个二次二元联立代数方程

$$27720-2970C+330I-519C^2-13I^2+128IC=0 \tag{3.18a}$$

$$13860-1980C+660I+15C^2-7I^2+8IC=0 \tag{3.18b}$$

其中第一个方程是一个椭圆（图4），第二个方程是双曲线，它们的交点共有两个，P_1，P_2. 我们建议采用 P_1 的坐标作为下文使用的 C，I 值. 它们是

$$C=3.948929,\qquad I=-8.365069 \tag{3.19}$$

在三角形有限元的 i，j 边上，$L_k=0$，$L_j=1-L_i$，(3.17a)式的形函数分布为

$$N_i=L_i-3.948929L_i(1-L_i)(i-2L_i) \tag{3.20}$$

其形状如图5，它和图2(a)的分布很接近. 其差别只在第二项的系数

现在让我们计算一致质量矩阵的对角线项，它们定义为

$$M_{ii}=2\pi\rho\iint_{(e)}N_i^2rdrdz=2\pi\rho\iint_{(e)}N_i^2(r_iL_i+r_jL_j+r_kL_k)drdz \tag{3.21a}$$

$$M_{jj}=2\pi\rho\iint_{(e)}N_j^2rdrdz=2\pi\rho\iint_{(e)}N_j^2(r_iL_i+r_jL_j+r_kL_k)drdz \tag{3.21b}$$

$$M_{kk}=2\pi\rho\iint_{(e)}N_k^2rdrdz=2\pi\rho\iint_{(e)}N_k^2(r_iL_i+r_jL_j+r_kL_k)drdz \tag{3.21c}$$

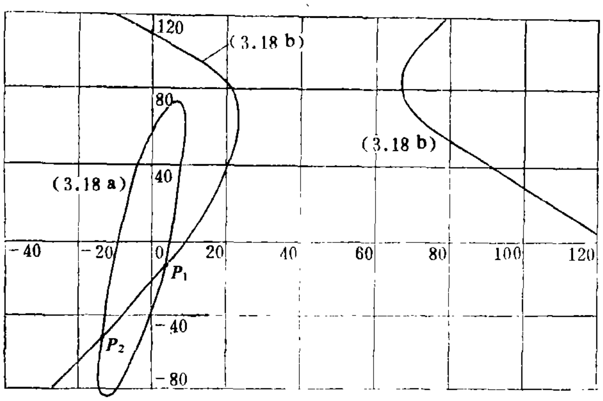


图 4　(3.18a,b)二条曲线的交点.(3.18a)为椭圆，(3.18b)为双曲线，其交点为p_1, p_2.

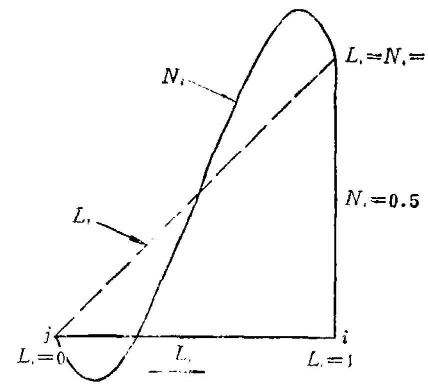


图 5　形状函数在三角形有限元边ij上的分布(3.20)式.

把(3.17a,b,c)代入(3.21a,b,c)，并用积分公式

$$\iint_{(e)} L_i^{\alpha} L_j^{\beta} L_k^{\gamma} drdz = \frac{\alpha!\beta!\gamma!}{(\alpha+\beta+\gamma+2)!} 2A \tag{3.22}$$

其中A为三角形有限元的面积．我们得

$$\left.\begin{aligned} M_{ii} &= 2\pi\rho A(\mu_1 r_i + \mu_2 r_j + \mu_2 r_k) \\ M_{jj} &= 2\pi\rho A(\mu_2 r_i + \mu_1 r_j + \mu_2 r_k) \\ M_{kk} &= 2\pi\rho A(\mu_2 r_i + \mu_2 r_j + \mu_1 r_k) \end{aligned}\right\} \tag{3.23}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{1}{A}\iint_{(e)} N_i^2 L_i drdz = \frac{96}{11!}(41580+6930C-990I+519C^2+13I^2-128CI) \\ \mu_2 &= \frac{1}{A}\iint_{(e)} N_i^2 L_j drdz = \frac{96}{11!}(13860+495C-165I+252C^2+10I^2-68CI) \end{aligned}\right\} \tag{3.24}$$

如果用(3.19)的C和I，我们有

$$\mu_1 = 0.217553, \qquad \mu_2 = 0.057890 \tag{3.25}$$

很易证明

$$M_{ii}+M_{jj}+M_{kk} = \frac{2\pi}{3}\rho A(r_i+r_j+r_k) \tag{3.26}$$

有了这些结果，有关轴对称动力问题的计算，就可以象前文[2]这样列出计算程序，其分别，只在于前文[2]中所用的形状函数是不协调的，而本文所建议的形状函数则是协调的.

参　考　文　献

1. 钱伟长，具有对角线化的一致质量矩阵的动力有限元和弹塑性撞击计算，应用数学和力学，3,3 (1982).
2. 钱伟长，轴对称问题的对角线化一致质量矩阵和弹塑性撞击的动力有限元分析，应用数学和力学，3,4 (1982).

Compatible Dynamic Finite Elements with Diagonalized Consistent Mass Matrix

Chien Wei-zang

(Qinghua University, Beijing)

Abstract

In this paper, the compactible dynamic finite elements with diagonalized consistent mass matrix are studied. In previous papers, the author studied the dynamic finite elements with diagonalized consistent mass matrix, but all of them are incompatible elements. In this paper, the compatible form functions are obtained not only for tetrahedron space elements, but also for triangular ring elements, with diagonalized consistent mass matrices. This kind of finite elements can be used not only for the treatment of impact problems which are related to the time, but for vibration problems, including linear and nonlinear equations.