应用数学和力学，第3卷第6期（1982年11月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

动力应力函数张量*

沈 惠 川

（中国科学技术大学，1980年10月8日收到）

摘 要

本文将弹性静力学中的应力函数张量概念直接推广到连续介质动力学问题中，给出了动力应力函数张量的一般表达式．其形式在一般曲线坐标下，可写成

$$T^{\nu}_{\mu}=\delta^{\nu\rho\sigma\lambda}_{\mu\alpha\beta\gamma}\nabla^{\gamma}\nabla_{\lambda}\phi^{\alpha\beta}_{\rho\sigma}$$

而在 Descartes 坐标系下为

$$T_{\mu\nu}=e_{\mu\alpha\beta\gamma}e_{\nu\rho\sigma\lambda}\partial_{\gamma}\partial_{\lambda}\phi_{\alpha\beta\rho\sigma}$$

一、动力应力函数张量

Крутков 在文献[1]中曾经引入应力函数张量的概念．由弹性静力学的 Navier 方程[2]

$$\partial_j\sigma_{ij}=0 \qquad (i,j=1,2,3)$$

利用旋度的散度恒为零这一Bianchi 恒等式及应力张量σ_{ij}的对称性条件，最终必可导出[3]

$$\sigma_{ij}=e_{ikm}e_{jpq}\partial_q\partial_m\phi_{pk} \tag{1.1}$$

式中 e_{ikm} 为三维Ricci符号，ϕ_{pk} 为对称的应力函数张量．B. A. Фок 在文献[4]中称之为“Крутков张量”．

这种导出应力函数张量的方法，可以直接推广到绝热过程的连续介质动力学问题中去．根据Einstein相对论[5][6]，在连续介质动力学问题中，能量-动量张量$T^{\mu\nu}$满足方程

$$\nabla_{\nu}T^{\mu\nu}=0 \qquad (\mu,\nu=0,1,2,3) \tag{1.2}$$

式中∇_ν表示协变微分：

$$\nabla_{\nu}T^{\mu\nu}=\partial_{\nu}T^{\mu\nu}+\Gamma^{\mu}_{\alpha\nu}T^{\alpha\nu}+\Gamma^{\nu}_{\alpha\nu}T^{\mu\alpha}$$

$\Gamma^{\mu}_{\alpha\nu}$为第二类Christoffel符号．

能量-动量张量又称为能量张量，质量张量或物质张量．按Levi-Civita，我们称之为“动力应力张量”．动力应力张量$T^{\mu\nu}$的表达式在流体动力学或相对论天体物理中为[7]~[9]

$$T^{\mu\nu}=(\rho+p)u^{\mu}u^{\nu}+pg^{\mu\nu} \quad （光速c=1）$$

并且四维速度

$$u^0=\sqrt{-1} \qquad\qquad u^i=0 \quad (i=1,\ 2,\ 3)$$

动力应力张量$T^{\mu\nu}$在一般的连续介质中应为

$$T^{\mu\nu}=\rho u^{\mu}u^{\nu}-\sigma^{\mu\nu}$$

* 钱伟长推荐．

并且应力张量 $\sigma^{\mu\nu}$中，$\sigma^{i0}=\sigma^{0i}=0$

其中ρ为能量密度，p为压强：

$$p=-\frac{1}{3}\sigma^{ii}$$

由方程(1.2)式，可求出所谓“动力应力函数”[10]．可以看出，动力应力函数与介质的物理性质无关，它们同样适用于理想流体、粘滞流体、弹塑体和粘弹体．在文献[11]和[12]中，给出了求动力应力函数的一般方法，其所基于的事实是Einstein张量

$$G^{\mu\nu}=R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R \tag{1.3}$$

的协变散度恒为零．式中$R^{\mu\nu}$为Ricci张量，R为曲率标量．将(1.3)式作为(1.2)式的解来考虑是合适的，而且不能不说是巧妙的．由此可得出动力应力函数的表达式．

本文的目的，是要证明动力应力函数实际上是四阶的对称的动力应力函数张量的分量．其推导可以在一般的Descartes坐标系内进行，而不失其普遍性．动力应力函数张量是应力函数张量在四维空间的直接推广，其形式也与三维应力函数张量的形式类似．为此，可将方程(1.2)式改写成Descartes坐标系中的形式：

$$\partial_\nu T_{\mu\nu}=0 \tag{1.4}$$

其中动力应力张量$T_{\mu\nu}$可以是

$$T_{\mu\nu}=\rho v_\mu v_\nu-\sigma_{\mu\nu}$$

而v_μ为介质元素的速度矢量分量：

$$x_0=t \qquad v_0=1$$

同时 $\sigma_{0i}=\sigma_{i0}=0$

推导的要点与应力函数张量的推导类似，也是利用了旋度的散度恒为零这一 Bianchi 恒等式及能张量$T_{\mu\nu}$的对称性（或反对称性）条件．

因为

$$A_\mu=e_{\mu\alpha\beta\gamma}\alpha_\gamma F_{\beta\alpha} \tag{1.5a}$$

满足方程$\partial_\mu A_\mu=0$，及

$$T_{\mu\nu}=e_{\mu\alpha\beta\gamma}\partial_\gamma F_{\beta\alpha\nu} \tag{1.5b}$$

满足方程$\partial_\mu T_{\mu\nu}=0$，及

$$F_{\mu\nu\lambda}=e_{\nu\alpha\beta\gamma}\partial_\gamma G_{\beta\alpha\nu\lambda} \tag{1.5c}$$

满足方程$\partial_\mu F_{\mu\nu\lambda}=0$；同时，由四维Ricci符号$e_{\lambda\alpha\beta\gamma}$的性质，有

$$\left.\begin{aligned}F_{\beta\alpha\nu}&=-F_{\alpha\beta\nu}\\ \partial_\nu F_{\beta\alpha\lambda}&=\partial_\beta F_{\alpha\nu\lambda}\end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$

另外，由能张量$T_{\mu\nu}$的对称性（或反对称性），即

$$T_{\mu\nu}=T_{\nu\mu}\ (\text{或}T_{\mu\nu}=-T_{\nu\mu})$$

得到

$$e_{\mu\alpha\beta\gamma}\partial_\gamma F_{\beta\alpha\nu}\mp e_{\nu\alpha\beta\gamma}\partial_\gamma F_{\beta\alpha\mu}=0 \tag{1.7}$$

式中的“∓”号，分别表示对$T_{\mu\nu}$的对称性或反对称性而言．将此式按μ分量展开，代入(1.5)式和(1.6)式，并对指标ν与γ进行缩阶，使等号左端第二项为零，得

$$\partial_\nu F_{\beta\alpha\nu}-2\partial_\alpha F_{\beta\xi\xi}=0$$

即

$$\partial_\nu(F_{\beta\alpha\nu}-2\delta_{\alpha\nu}F_{\beta\xi\xi})=0 \tag{1.8}$$

(1.8)式与(1.4)式是类似的，它表示$[F_{\beta\alpha\nu}-2\delta_{\alpha\nu}F_{\beta\xi\xi}]$的散度为零，因此可利用(1.5c)式写出

$$F_{\beta\alpha\nu}-2\delta_{\alpha\nu}F_{\beta\xi\xi}=e_{\nu\rho\sigma\lambda}\partial_\lambda\phi_{\sigma\rho\beta\alpha} \tag{1.9}$$

当α与ν缩阶时，(1.9)式变为（这里$\delta_{\alpha\alpha}=4$）

$$F_{\beta\eta\eta}-2\delta_{\eta\eta}F_{\beta\xi\xi}=-7F_{\beta\xi\xi}$$

从而

$$F_{\beta\xi\xi}=-\frac{1}{7}e_{\xi\rho\sigma\lambda}\partial_\lambda\phi_{\sigma\rho\beta\xi} \tag{1.10}$$

将(1.10)式代入(1.9)式，然后一齐代入$T_{\mu\nu}=e_{\mu\alpha\beta\gamma}\partial_\gamma F_{\beta\alpha\nu}$．有

$$T_{\mu\nu}=e_{\mu\alpha\beta\gamma}e_{\nu\rho\sigma\lambda}\partial_\gamma\partial_\lambda\phi_{\sigma\rho\beta\alpha}-\frac{2}{7}e_{\mu\nu\beta\gamma}e_{\xi\rho\sigma\lambda}\partial_\gamma\partial_\lambda\phi_{\sigma\rho\beta\xi}$$

将等号右端第二项的指标ξ换为α，得

$$T_{\mu\nu}=\left(e_{\mu\alpha\beta\gamma}e_{\nu\rho\sigma\lambda}-\frac{2}{7}e_{\mu\nu\beta\gamma}e_{\alpha\rho\sigma\lambda}\right)\partial_\gamma\partial_\lambda\phi_{\sigma\rho\beta\alpha} \tag{1.11}$$

到这里为止，并没有特别强调能张量或动力应力张量$T_{\mu\nu}$的对称性或反对称性．无论$T_{\mu\nu}$是对称张量还是反对称张量，都能导出(1.11)式．

下面，针对连续介质动力学，特别强调$T_{\mu\nu}$的对称性．将(1.11)式中的傀儡指标α与ρ，β与σ，γ与λ交换位置，得

$$T_{\mu\nu}=\left(e_{\mu\rho\sigma\lambda}e_{\nu\alpha\beta\gamma}-\frac{2}{7}e_{\mu\nu\sigma\lambda}e_{\rho\alpha\beta\gamma}\right)\partial_\lambda\partial_\gamma\phi_{\beta\alpha\sigma\rho}$$

即

$$T_{\mu\nu}=e_{\mu\rho\sigma\lambda}e_{\nu\alpha\beta\gamma}\partial_\lambda\partial_\gamma\phi_{\beta\alpha\sigma\rho}-\frac{2}{7}e_{\mu\nu\beta\gamma}e_{\alpha\rho\sigma\lambda}\partial_\gamma\partial_\lambda\phi_{\sigma\rho\beta\alpha} \tag{1.12}$$

另外由(1.11)式又有

$$T_{\nu\mu}=\left(e_{\nu\alpha\beta\gamma}e_{\mu\rho\sigma\lambda}-\frac{2}{7}e_{\nu\mu\beta\gamma}e_{\alpha\rho\sigma\lambda}\right)\partial_\gamma\partial_\lambda\phi_{\sigma\rho\beta\alpha} \tag{1.13}$$

注意到(1.12)式中的$e_{\mu\nu\beta\gamma}$与(1.13)式中的$e_{\nu\mu\beta\gamma}$反号，便有

$$e_{\mu\rho\sigma\lambda}e_{\nu\alpha\beta\gamma}\partial_\gamma\partial_\lambda(\phi_{\sigma\rho\beta\alpha}-\phi_{\beta\alpha\sigma\rho})=0$$

规范后为

$$\phi_{\sigma\rho\beta\alpha}=\phi_{\beta\alpha\sigma\rho} \tag{1.14}$$

此式表示动力应力函数张量$\phi_{\sigma\rho\beta\alpha}$关于双指标对称．由于对称性，将(1.11)式与(1.13)式相加除以2，利用(1.14)式，最后可得

$$T_{\mu\nu}=e_{\mu\alpha\beta\gamma}e_{\nu\rho\sigma\lambda}\partial_\gamma\partial_\lambda\phi_{\sigma\rho\beta\alpha} \tag{1.15}$$

由(1.15)式及$T_{\mu\nu}$的对称性可知

$$\phi_{\sigma\rho\beta\alpha}=\phi_{\beta\alpha\sigma\rho}=-\phi_{\rho\sigma\beta\alpha}=-\phi_{\sigma\rho\alpha\beta}=\phi_{\rho\sigma\alpha\beta} \tag{1.16}$$

从而(1.15)式还可写成

$$T_{\mu\nu}=e_{\mu\alpha\beta\gamma}e_{\nu\rho\sigma\lambda}\partial_\gamma\partial_\lambda\phi_{\alpha\beta\rho\sigma} \tag{1.17}$$

回过头来，可以看出，(1.1)式仅仅是(1.17)式的特例．

实际上(1.17)式的结果从(1.11)式中就可以看出．在$\phi_{\alpha\beta\rho\sigma}$是双指标对称张量的前提下，$e_{\mu\alpha\beta\gamma}e_{\nu\rho\sigma\lambda}\partial_\gamma\partial_\lambda\phi_{\alpha\beta\rho\sigma}$关于指标$\mu$和$\nu$对称．由于$T_{\mu\nu}$关于$\mu$，$\nu$对称，故有(1.17)式．

在一般曲线坐标下，(1.17)式将改变形式为

$$T^{\nu}_{\mu}=\delta^{\nu\rho\sigma\lambda}_{\mu\alpha\beta\gamma}\nabla^{\gamma}\nabla_{\lambda}\phi^{\alpha\beta}_{\rho\sigma} \tag{1.18}$$

其中，$\delta^{\nu\rho\sigma\lambda}_{\mu\alpha\beta\gamma}$为广义Krönecker 符号[13]：

$$\delta^{\nu\rho\sigma\lambda}_{\mu\alpha\beta\gamma}=\varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\varepsilon^{\nu\rho\sigma\lambda} \tag{1.19}$$

$\varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}$为Eddington 张量.

由(1.18)式，可使Einstein场方程写成

$$R^{\nu}_{\mu}-\frac{1}{2}g^{\nu}_{\mu}R^{\lambda}_{\lambda}=-K\delta^{\nu\rho\sigma\lambda}_{\mu\alpha\beta\gamma}\nabla^{\gamma}\nabla_{\lambda}\phi^{\alpha\beta}_{\rho\sigma} \tag{1.20}$$

其中

$$K=-\frac{8\pi G}{c^2}$$

对电磁连续介质动力学（包括电磁流体动力学）问题，(1.17)式的结果也将适用，此时[14]

$$T_{\mu\nu}=\rho v_{\mu}v_{\nu}-\sigma_{\mu\nu}-\frac{1}{4\pi}\left[H_{\mu}H_{\nu}-\frac{1}{2}H^2\delta_{\mu\nu}\right]$$

其中 $x_0=t$ $v_0=1$ $\sigma_{0i}=\sigma_{i0}=0$ $H_0=0$

二、一般性评述

1. 根据(1.16)式，可以断定动力应力函数张量$\phi_{\alpha\beta\rho\sigma}$所有分量中$\alpha=\beta$及$\rho=\sigma$的分量都为零.能得到独立分量的指标$\alpha$，$\beta$，$\rho$，$\sigma$的组合共有下面21个分量：

1212	1213	1214	1223	1224	1234
	1313	1314	1323	1324	1334
		1414	1423	1424	1434
			2323	2324	2334
				2424	2434
					3434

其余的分量或者与它们相等，或者仅相差一个符号.但因动力应力张量$T_{\mu\nu}$只有10个函数——6个应力张量分量σ_{ij}，3个速度矢量分量v_i和介质密度ρ，因此，在选取动力应力函数张量$\phi_{\alpha\beta\rho\sigma}$的时候，一般不会多于10个分量.甚至可以进一步说，如果设想只须3个函数就可以表示σ_{ij}的6个分量，只须2个函数就可以表示v_i的3个分量，则$\phi_{\alpha\beta\rho\sigma}$的分量中，至多只要选出6个分量就行了.这6个分量，也许就是前两个指标和后两个指标相同的分量：

1212 1313 1414 2323 2424 3434

或者是其余15个分量中的某6个。

在弹性静力学中，应力函数张量ϕ_{kp}共6个分量，实际上只须3个分量就行了.其矩阵形式的三个对角线项即为Maxwell应力函数，而非对角线项的3个分量即为Morera应力函数.

2. 动力应力函数张量$\phi_{\alpha\beta\rho\sigma}$的选取，要顾及介质的边界条件和运动介质的起始条件.

3. 用动力应力函数张量$\phi_{\alpha\beta\rho\sigma}$求解连续介质动力学问题或电磁连续介质动力学问题的时候，要使问题定解，还必须列出补充方程.这种补充方程，就是各类连续介质的本构方程，

或者是与这些本构方程相当的相容方程（协调方程），以及物态方程。这种解题的方法，原则上适用于理想流体、粘流体、弹塑体、粘弹体等各类连续介质体或电磁连续介质体。对一些理想的连续介质体（例如弹性体），甚至可以求得通解。

4. 在使用相对论性表达式求解连续介质动力学问题时，为使结果适合非相对论情况，还要令光速趋于无穷大，略去一些小量，以得到常规结果。

5. 若在某一物理问题中有$\pi_{\mu\nu}$满足方程$\partial_\nu \pi_{\mu\nu}=0$，而$\pi_{\mu\nu}$表现为反对称性，即$\pi_{\mu\nu}=-\pi_{\nu\mu}$，则以上述同样方法必可导出

$$\pi^{\mu\nu}=\delta^{\mu\nu\beta\gamma}_{\alpha\rho\sigma\lambda}\nabla_\gamma\nabla^\lambda\psi^{\alpha\rho\sigma}_{\beta}$$

或在Descartes坐标系下为

$$\pi_{\mu\nu}=e_{\mu\nu\beta\gamma}e_{\alpha\rho\sigma\lambda}\partial_\gamma\partial_\lambda\psi_{\alpha\beta\rho\sigma}$$

其中$\psi_{\alpha\beta\rho\sigma}$亦为双指标对称张量，即

$$\psi_{\alpha\beta\rho\sigma}=\psi_{\rho\sigma\alpha\beta}=-\psi_{\beta\alpha\rho\sigma}=-\psi_{\alpha\beta\sigma\rho}=\psi_{\beta\alpha\sigma\rho}$$

反对称张量$\pi_{\mu\nu}$，可以举出在电磁连续介质动力学中有

$$\pi_{\mu\nu}=H_\mu v_\nu-H_\nu v_\mu-\frac{c^2}{4\pi\sigma\mu}(\partial_\nu H_\mu-\partial_\mu H_\nu)$$

其中σ为电导率，μ为磁化率；$x_0=t$，$v_0=i$，$H_0=0$。

关于动力应力函数张量的应用，将在以后的文章中讨论。

参 考 文 献

1. Крутков, Ю. А., «应力函数张量及弹性静力学的通解», Академии Наук, СССР, институт механики (1949)。
2. 钱伟长，叶开沅，《弹性力学》，科学出版社，(1956).
3. 坪井善勝，《連続体力学序説》，產業図書株式会社，(1977,10.28初版).
4. Фок, В. А.，《空间、时间和引力理论》，周培源译，科学出版社，(1965).
5. Einstein, A.，《相对论的意义》，李灏译，科学出版社，(1979).
6. Pauli, W.，《相对论》，凌德洪，周万生译，上海科技出版社，(1979).
7. Weinberg, S.，《引力论和宇宙论》，邹振隆等译，科学出版社，(1980).
8. Ландау, Л.Д. и Лифшиц, Е. М.，《场论》，任朗、袁炳奎译，人民教育出版社，(1959).
9. Ландау, Л. Д. и Лифшиц, Е. М.，《连续介质力学》，彭旭麟译，人民教育出版社，(1958).
10. Кутилин, Д. И., *Теория Конечных Деформаций*, Гостехиздат, (1947).
11. Кильчевский, Н. А.，《张量计算初步及其在力学上的应用》，郭乾荣译，人民教育出版社，(1959).
12. Паули, В., *Теория относительности*. §56, Гостехиздат, (1947).
13. 郭仲衡，《非线性弹性理论》，科学出版社，(1980).
14. Ландау, Л.Д. и Лифшиц, Е.М.，《连续媒质电动力学》，周奇译，人民教育出版社，(1963).

Dynamical Stress Function Tensor

Shen Hui-chuan

(*Department of Earth and Space Sciences, University of Science and Technology of China, Hefei*)

Abstract

This paper generalizes the concept of stress function tensor in static elasticity into the more general case of continuum dynamics, and finds out the expressions for dynamical stress function tensor.