应用数学和力学，第3卷第6期（1982年11月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

湍流的Markov过程理论与Kolmogoroff理论的联系以及对Kolmogoroff定律的推广——I. 对两个理论关系的分析*

岳曾元　张　彬

（北京大学地球物理系，1981年12月22日收到）

摘　要

本文全文分为两部分（Ⅰ和Ⅱ）．第Ⅰ部分讨论了关于大雷诺数湍流的两种理论——拉格朗日观点的Markov过程理论与欧拉观点的Kolmogoroff理论之间的联系．指出：对位置和速度的联合过程进行Markov描述所需雷诺数与Kolmogoroff第二相似性假设所需雷诺数同样大；周期与T_u和T_f[1]同阶的旋涡分别对应于Kolmogoroff理论的含能范围与耗损范围；Richarson定律的适用范围$T_* \lesssim t \ll \beta^{-1}$[1]对应于Kolmogoroff理论的惯性子范围．从而指出，两种理论从不同侧面反映了大雷诺数湍流的流场结构．

在本文第Ⅱ部分，我们将利用第Ⅰ部分中阐述的物理想法以适当方式建立两种理论之间的某种定量的联系．从而由拉格朗日观点的弥散运动的结果得出欧拉观点的结构函数、关联函数和能谱函数．所得结果不但适用于惯性子范围，而且适用于尺度更大（或波数更小）的全部范围．熟知的Kolmogoroff"2/3定律"和"−5/3定律"为本结果在惯性子范围的渐近解．因而本结果是Kolmogoroff"2/3定律"和"−5/3定律"的推广．

一、引　　言

在文献[1]中，我们通过物理分析以及对于随机力和随机速度的自相关时间尺度（即T_f和T_u）关系的推导，指出当雷诺数充分大时，湍流中的单质点的扩散运动与二质点的弥散运动均可用Markov过程处理，并由此得出在上述两种运动中位置与速度的联合随机过程的统计描述．

另一方面，按照Kolmogoroff的理论[2-4]，当雷诺数充分大时，湍流能谱的高波数段为"平衡范围"．其中物理参量只有湍能耗损率ε和粘性系数ν（Kolmogoroff第一相似性假设）；当雷诺数更大时，平衡范围的较低波数段与粘性无关，只剩下一个参数ε，称为惯性子范围（Kolmogoroff第二相似性假设）．该范围既远离含能范围，又远离耗损范围．运用量纲分析，可得出惯性子范围中的一些重要结果，如能谱函数$E \sim \varepsilon^{2/3}K^{-5/3}$，结构函数$D_{ll} \sim (\varepsilon r)^{2/3}$等等．虽然Kolmogoroff理论即使对于大雷诺数情形也并未解决全部波数范围的问题，但它仍是湍流统计理论中比较成功的理论之一．

既然Markov过程湍流扩散理论[1]与Kolmogoroff理论都要求雷诺数R_λ充分大，并且都

* 戴世强推荐．

用到两个尺度分开充分远这一想法，因而可预料两个理论之间可能存在着某种联系．这种联系如何体现？具体地说，例如，两者所要求的雷诺数是否同样大？文献[1]中的时间尺度(如T_f，T_*，T_u)与Kolmogoroff理论中的空间尺度(如内尺度η，微尺度λ、外尺度L)之间存在什么关系？Kolmogoroff理论中的惯性子范围在湍流扩散（以及弥散）运动中对应于哪一个时间阶段？这些关系反映了湍流流场的什么物理本质，等等．回答这些问题便是本文这一部分（简称文Ⅰ）的目的．至于如何应用这些联系来求出关于关联函数和能谱函数的定量结果，我们放到本文第Ⅱ部分（简称文Ⅱ）中去处理．

二、对Markov过程湍流扩散理论所需雷诺数的量阶估计

在文献[1]中，我们从Langevin方程出发，证明了当雷诺数R_λ充分大时，随机力的自相关时间尺度T_f远小于随机速度的自相关时间尺度T_u，于是存在T_*，满足

$$T_f \ll T_* \ll T_u \tag{2.1}$$

使得同时有

$$R_f(T_*) \approx 0 \tag{2.2}$$

和

$$R_u(T_*) \approx 1 \tag{2.3}$$

其中R_u与R_f分别为速度u和随机力f的自相关系数：

$$R_u(\tau) = \overline{u(t)u(t+\tau)}/\overline{u}^2 \tag{2.4}$$

$$R_f(\tau) = \overline{f(t)f(t+\tau)}/\overline{f}^2 \tag{2.5}$$

(2.3)式又可改写为

$$u(t_0+T_*) \approx u(t_0) \tag{2.6}$$

至于T_f远小于T_u这一事实，可写为

$$T_f \lll T_u \tag{2.7}$$

以便与$T_f \ll T_*$和$T_* \ll T_u$所示的分开程度相对比．

上述条件使我们对大雷诺数平稳湍流中的扩散问题（以及二质点的弥散问题）可用Markov过程处理[1]．更确切地说，如果我们考虑一个时间序列$t_n = t_0 + nT_*(n=0,\pm1,\cdots)$，则可认为$\{x(t_n),u(t_n)\}$构成Markov链．忽略$\Delta t \sim T_*$之内的变化细节，则可近似认为$\{x(t),u(t)\}$构成连续的Markov过程．$T_* \gg T_f$是为了保证随机序列$\{x(t_n),u(t_n)\}$的Markov性，而$T_* \ll T_u$则是为了保证当由随机序列$\{x(t_n),u(t_n)\}$的Markov性过渡为随过程$\{x(t),u(t)\}$的Markov性时，仍能很有效地反映物理实际．

应当指出，当雷诺数充分大时，满足(2.1)式以及关于T_*/T_f和T_u/T_*的量级要求（见下文）的“中间尺度”仍有一个相当宽广的范围．为明确起见，我们把T_*规定为这一中间尺度范围的下限．下面我们从Markov过程湍流扩散理论本身的要求出发，来得出所需T_*/T_f和T_u/T_*的具体量级．

由于通常可假定$R_f(\tau)$为负指数形式[1,6]：$R_f(\tau)=e^{-\tau/T_f}$，因此只需τ为T_f的几倍，便可认为$R_f(\tau)\approx 0$．(例如当$\tau=4T_f$，$R_f(\tau)=0.018$，当$\tau=5T_f$，$R_f(\tau)=0.0067$)．于是，当

$$\delta t = k_1 T_f \tag{2.8}$$

其中

$$k_1 \gtrsim 4 \tag{2.9}$$

我们便可近似认为$f(t)$与$f(t+\delta t)$统计独立. 然而，对于T_*只作这样的要求是不够的，理由如下：当我们在文献[1]中确定Fokker-Planck方程的系数时曾指出，数学上的$\Delta t\to 0$对应着物理上的$\Delta t\to T_*$. 例如系数$B=\frac{1}{2}\lim_{\Delta t\to 0}\langle(\Delta u)^2\rangle_u/\Delta t$在物理上代表着当$\Delta t\sim T_*$时$\langle(\Delta u)^2\rangle_u/\Delta t$的渐近值[1]. 这就要求，当$\Delta t\sim T_*$时，方差$\langle(\Delta u)^2\rangle_u$已呈现出与$\Delta t$成正比的规律. 为此，考虑，

$$\Delta t=n\delta t \tag{2.10}$$

并且令

$$t_i=t+i\delta t,\qquad u_i=u(t_i),\qquad \delta_i u=u_i-u_{i-1} \tag{2.11}$$

于是

$$\Delta u\equiv u(t+\Delta t)-u(t)=\delta_1 u+\delta_2 u+\cdots+\delta_n u \tag{2.12}$$

由Langevin方程（文献[1]，(2.2)式），有

$$\begin{aligned}\delta_i u&=-\beta u_i\delta t+\int_{t_i}^{t_i+\delta t}f(\xi)d\xi\\&=-\beta u_i\delta t+\int_0^{\delta t}f(t_i+\xi)d\xi\end{aligned} \tag{2.13}$$

由(2.6)式（当T_*被换成更小的时间间隔时，(2.6)式当然更成立），(2.13)式可改写为

$$\delta_i u=-\beta u_0\delta t+\int_0^{\delta t}f(t_i+\xi)d\xi \tag{2.14}$$

（注意，由(2.11)式，(2.14)式中的u_0就是$u(t)$）. 由于$f(\xi)$与$f(\xi+\delta t)$可近似认为统计独立，因此$\delta_1 u$，$\delta_2 u$，…，$\delta_n u$近似地为n个独立的随机变量，因此它们方差的和等于它们和的方差[6]：

$$\langle(\Delta u)^2\rangle_u=\langle(\delta_1 u)^2\rangle_u+\langle(\delta_2 u)^2\rangle_u+\cdots+\langle(\delta_n u)^2\rangle_u \tag{2.15}$$

这里符号$\langle\quad\rangle_u$表示在初速为u的条件系综中的平均（见文献[1]）. 又由于初速$u(t)$与$f(\xi)$的统计相关性当$\xi>t+\delta t$时已消失，再考虑到$f(\xi)$的平稳性，则由(2.14)式可知，从$\delta_2 u$到$\delta_n u$都是具有相同概率分布的随机变量. 于是它们的方差相等：

$$\langle(\delta_2 u)^2\rangle_u=\langle(\delta_3 u)^2\rangle_u=\cdots=\langle(\delta_n u)^2\rangle_u \tag{2.16}$$

代回(2.15)式，得

$$\langle(\Delta u)^2\rangle_u=\langle(\delta_1 u)^2\rangle_u+(n-1)\langle(\delta_2 u)^2\rangle_u \tag{2.17}$$

我们将(2.16)中这一常数记为$2B\delta t$，则当n为一个较大的数（例如$n\gtrsim 10$）时，(2.17)式可近似写成

$$\langle(\Delta u)^2\rangle_u\approx n\langle(\delta_2 u)^2\rangle_u=2Bn\delta t=2B\Delta t \tag{2.18}$$

可见，为保证$\Delta t\sim T_*$时，$\langle(\Delta u)^2\rangle_u$始呈与$\Delta t$成正比的规律，只要取$T_*=n\delta t$（例如$n\gtrsim 10$）即可.

下面我们再来考虑，为使(2.6)式成立，T_u应至少为T_*的多少倍. 我们知道，在欧拉观点的速度关联理论中，微尺度λ具有这样的物理意义：在尺度$\lesssim\lambda$的微团中，各质点的速度很接近. 而λ的数学定义则是横向二元速度关联函数$g(r)$在$r=0$处的密接抛物线与r轴交点的坐标[7]. 完全类似地，可引进拉格朗日微尺度τ_L，其定义为$R_u(\tau)$在$\tau=0$处的密接抛物线与τ轴交点的坐标[5,7]. 显然，τ_L的物理意义是，当T_*比τ_L小几倍时，可认为(2.6)式成立. 我们将所需的这一最低倍数记为k_2，即当$T_*=\tau_L/k_2$时，可认为(2.6)式成立. 在密接抛

物线$1-\tau^2/\tau_L^2$上，当$\tau=\tau_L/10$时，其值为0.99．但应指出，当τ接近τ_L时，密接抛物线已远在曲线$R_u(\tau)$之下．($R_u(\tau)$的曲线形状应为$e^{-\beta|\tau|}$在$\tau=0$附近加以平滑地小修正，修正范围随R_λ增大而变窄，定性地可参看文献[5]的图1．但必须注意，该图中的参数$\alpha=0.014$，只相当于$R_\lambda=30$．在我们所考虑的大雷诺数情形，"修正范围"比该图窄得多．)换言之，$R_u(\tau)$下降得比密接抛物线$1-\tau^2/\tau_L^2$慢得多．因此，不需要取$k_2=10$，对于雷诺数很大的情形，例如只要取$k_2=2\sim3$，即可保证(2.6)式成立．至于τ_L与T_u的关系，则有([5]，(2.25)式)

$$T_u/\tau_L\approx 1/\sqrt{2\alpha} \tag{2.19}$$

其中([1]，(1.12)式)

$$\alpha\approx 0.43R_\lambda^{-\frac{1}{2}} \tag{2.20}$$

再由[1]

$$T_f/T_u\approx\alpha \tag{2.21}$$

我们便得到

$$\alpha^{-1}\approx\frac{T_u}{T_f}=\frac{T_u}{\tau_L}\cdot\frac{\tau_L}{T_*}\cdot\frac{T_*}{\delta t}\cdot\frac{\delta t}{T_f}\approx\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\cdot k_2\cdot n\cdot k_1 \tag{2.22}$$

因此

$$\alpha^{-1}\approx\frac{1}{2}(k_2nk_1)^2 \tag{2.23}$$

再由(2.20)式，即得

$$R_\lambda\approx 0.22(k_2nk_1)^2 \tag{2.24}$$

由以上关于倍数k_1，n，k_2的分析，我们知道，为使Markov过程湍流扩散理论成立，R_λ应至少在10^3量级，即

$$R_\lambda\gtrsim 10^3 \tag{2.25}$$

例如由前述的分析，我们可以合理地取$k_1\gtrsim4$，$n\gtrsim10$，$k_2\gtrsim2$，则由(2.24)式得

$$R_\lambda\gtrsim 1400 \tag{2.26}$$

此数值可作为Markov过程湍流扩散理论实际适用范围的下限．

三、Markov过程湍流扩散理论与Kolmogoroff理论的关系

我们先来指出这两个理论的几点形式上的相似性：

(i) 两者都要求R_λ充分大；

(ii) Markov过程扩散理论[1]要求

$$T_f<<<T_u \tag{3.1}$$

而Kolmogoroff第二相似性假设（存在惯性子范围）则要求

$$\eta<<<L \tag{3.2}$$

(其中η为Kolmogoroff内尺度，定义见(3.8)式．它代表耗损范围旋涡尺寸；L为外尺度，代表含能范围旋涡尺寸．)

(iii) Markov过程扩散理论[1]要求存在一个中间尺度范围，满足

$$T_f<<\Delta t<<T_u \tag{3.3}$$

由于T_*为这一中间尺度范围的下限，以及$T_u \approx \beta^{-1}$，因此这一中间尺度范围亦可写为

$$T_* \lesssim \Delta t << \beta^{-1} \tag{3.4}$$

（注意，这正是文献[1]得出的Richardson定律的适用范围，并且如文献[1]所指出的，也正是Obukhov[8]所给方程的适用范围.）而Kolmogoroff第二相似性假设则要求在惯性子范围满足

$$\eta << r << L \tag{3.5}$$

现在我们来证明，(3.1)与(3.2)，(3.3)与(3.5)在形式上的相似，其实质原因是由于它们反映同一物理事实．事实上，正如文献[1]中物理分析所指出，T_f与湍流中典型的小旋涡脉动周期同阶，T_u与典型的大旋涡脉动周期同阶．而典型的大旋涡显然处于含能最多的尺度范围，即Kolmogoroff所说的含能范围；典型的小旋涡显然处于粘性发生显著作用的尺度范围，即Kolmogoroff所说的耗损范围．为了定量地证明以T_u和T_f为周期的旋涡分别对应于Kolmogoroff理论的含能旋涡和耗损旋涡，我们只需证明

$$T_u \sim L/\underline{u} \tag{3.6}$$

$$T_f \sim \eta/v \tag{3.7}$$

其中 $\underline{u}=\sqrt{\overline{u^2}}$ 可作为含能旋涡的速度尺度，η和v分别为Kolmogoroff对耗损旋涡引入的长度尺度和速度尺度：

$$\eta=(\nu^3/\varepsilon)^{\frac{1}{4}} \tag{3.8}$$

$$v=(\nu\varepsilon)^{\frac{1}{4}} \tag{3.9}$$

为证明(3.6)和(3.7)式，我们需用到以下关系式([7]，(3-109))：

$$\varepsilon \sim A\underline{u}^3/L \qquad (A\text{与 1 同阶}) \tag{3.10}$$

由 $\beta\overline{u^2}=\varepsilon/3$ ([1]，(2.3)式)，得

$$T_u \approx \beta^{-1}=3\underline{u}^2/\varepsilon \sim 3\underline{u}^2L/A\underline{u}^3=\frac{3}{A}\cdot\frac{L}{\underline{u}} \tag{3.11}$$

即 $T_u \sim L/\underline{u}$，故(3.6)得证．而

$$T_f \sim T_u/R_\lambda \approx \frac{3\underline{u}^2}{\varepsilon}\bigg/\frac{\underline{u}\lambda}{\nu}=3\frac{\underline{u}}{\lambda}\cdot\frac{\nu}{\varepsilon}=\frac{3}{\sqrt{15\nu}}\sqrt{15\nu\frac{\underline{u}^2}{\lambda^2}}\cdot\frac{\nu}{\varepsilon}$$

$$=\sqrt{\frac{3}{5}}\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\nu}}\cdot\frac{\nu}{\varepsilon}=\sqrt{\frac{3}{5}}\cdot\frac{\eta}{v} \tag{3.12}$$

（这里用了$\varepsilon=15\nu\overline{u^2}/\lambda^2$这一熟知的公式．）因此$T_f \sim \eta/v$，即(3.7)式得证．这样，我们便定量地证明了以$T_u$和$T_f$为周期的旋涡恰分别处于Kolmogoroff理论的含能范围和耗损范围．因此(3.1)与(3.2)式，(3.3)与(3.5)式反映着同一物理事实：当雷诺数充分大时，湍流中各种尺度（各种周期）的旋涡分布得很宽广，典型的大旋涡（含能旋涡）与典型的小旋涡（耗损旋涡）分开得充分远（这一点表现在空间尺度上就是(3.2)式，表现在时间尺度上就是(3.1)式），以至于存在一个具有实际意义的中间尺度范围（这一点表现在空间尺度上就是(3.5)式，表现在时间尺度上就是(3.3)式）．由此可知对$\{x(t), u(t)\}$作为Markov过程处理与Kolmogoroff第二相似性假设对于湍流中各种尺度旋涡如何分布的物理要求是相同的，因此两者所需R_λ同样大．而时间的中间尺度范围(3.3)或(3.4)则对应于空间的中间尺度范围——惯性子范围．

根据Stewart和Townsend[9]的估计，为使Kolmogoroff第二相似性假设可以应用，需$R_\lambda>1500$（亦见[7]）.这与上节中关于Markov过程扩散理论所需R_λ下限的估计式（2.26）是一致的.

四、Richardson定律两种推导方法的内在联系

作为上节结论的一个应用，我们来说明对Richardson定律的两种推导方法的内在联系.

在Obukhov[8]最先提出用Markov过程处理湍流扩散的假设时，他以他的解（再假定$B\sim\varepsilon$）与Richardson定律一致作为该假设的一个证据.在文献[8]所附的讨论中，Batchelor提出疑议，认为单单这一点不能作为湍流扩散可用Markov过程处理的证据，因为Richardson定律可从更简单的量纲考虑得到. H. Lettau提出另一疑议，指出Richardson定律的适用范围并不是无限的.

用量纲分析方法（π定理）证明Richardson定律的关健是假定只有一个主定常量ε. 这在物理上相当于假定两个粒子的弥散距离处于惯性子范围.在文献[1]中我们从Markov过程理论出发，证明了Richardson定律适用的弥散阶段为$T_*\lesssim t<<\beta^{-1}$，本文上节讨论又表明，该弥散阶段对应于Kolmogoroff理论的惯性子范围. 换言之，当二粒子的弥散时间处于这一阶段时，弥散距离恰处于惯性子范围. 因此两种推导方法能得出一致结论就十分自然了. 至于H. Lettau指出的Richardson定律适用范围的有限性，其物理原因是Richardson定律只适用于阻力的累积效应尚不明显的弥散阶段（$t<<\beta^{-1}$），在这一阶段，Obukhov[8]所给的略去β项的方程是正确地反映物理实际的；超过了这一阶段（当$t\sim\beta^{-1}$），则Obukhov[8]所给方程以及Richardson定律本身就都不适用了.这就是为什么Obukhov[8]所给方程能解释Richardson定律而不能解释其适用范围有限性的原因.

五、Markov过程与Langevin方程对于求大雷诺数湍流中转移概率的等效性

Chandrasekhar[10]在讨论布朗运动的转移概率时曾用两种方法求解.一种是用Markov过程，对于经过时间Δt的速度转移概率作了正态假设，由此定出Fokker-Planck方程的系数，从而得到问题的解；另一条途径是从Langevin方程出发，利用该文中的两个引理而直接得到转移概率函数.所用的这两个引理是：

引理 1

设
$$\vec{R}=\int_0^t\psi(\xi)\vec{f}(\xi)d\xi \tag{5.1}$$

则$\vec{R}$的概率分布为

$$W(\vec{R})=\frac{1}{\left[4\pi q\int_0^t\psi^2(\xi)d\xi\right]^{3/2}}\exp\left(-|\vec{R}|^2/4q\int_0^t\psi^2(\xi)d\xi\right) \tag{5.2}$$

其中

$$q=\frac{1}{6\Delta t}\left|\int_0^{\Delta t}\vec{f}(\xi)\,d\xi\right|^2 \tag{5.3}$$

引理 2

设
$$\vec{R}=\int_0^t \psi(\xi)\vec{f}(\xi)d\xi \tag{5.4}$$

$$\vec{S}=\int_0^t \psi(\xi)\vec{f}(\xi)d\xi \tag{5.5}$$

则$\vec{R}$与$\vec{S}$的联合概率分布为

$$W(\vec{R},\ \vec{S})=\frac{1}{8\pi^3(FG-H^2)^{3/2}}\exp[-(G|\vec{R}|^2-2H\vec{R}\cdot\vec{S}+F|\vec{S}|^2)/2(FG-H^2)] \tag{5.6}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} &F=2q\int_0^t \psi^2(\xi)d\xi, \quad G=2q\int_0^t \varphi^2(\xi)d\xi \\ &H=2q\int_0^t \varphi(\xi)\psi(\xi)d\xi \end{aligned}\right\} \tag{5.7}$$

这两个引理的证明关键是利用$\vec{f}(t)$的迅变性和$\psi(t)$，$\varphi(t)$的相对缓变性。即假设存在Δt，使得一方面ψ和φ在Δt内的变化可忽略（如以T_ψ和T_φ分别记ψ和φ发生显著变化的时间尺度，则要求$\Delta t<<T_\psi,\ T_\varphi$），另一方面，$\int_t^{t+\Delta t}\vec{f}(\xi)d\xi$满足正态分布。在具体运用这两个引理求转移概率$W(\vec{u},t;\vec{u}_0)$，$W(\vec{r},\ t;\ \vec{r}_0,\ \vec{u}_0)$和$W(\vec{r},\ \vec{u},\ t;\vec{r}_0,\ \vec{u}_0)$时，所出现的$\psi$和$\varphi$的时间尺度$T_\psi$和$T_\varphi$均与$\beta^{-1}$同阶（见[10]）。对于大雷诺数湍流，我们已证明$T_*<<\beta^{-1}$，因此如取$\Delta t\sim T_*$，则$\Delta t<<T_\psi$，$T_\varphi$的条件便得到满足。剩下的问题是，当$\Delta t\sim T_*$时，$\int_t^{t+\Delta t}f(\xi)d\xi$是否满足正态分布。由(2.10)式，当$\Delta t=n\delta t\sim T_*$时，有

$$\int_t^{t+\Delta t}f(\xi)d\xi=\int_t^{t+\delta t}f(\xi)d\xi+\int_{t+\delta t}^{t+2\delta t}f(\xi)d\xi+\cdots+\int_{t+(n-1)\delta t}^{t+n\delta t}f(\xi)d\xi \tag{5.8}$$

由δt的定义及$f(\xi)$的平稳性，上式右端从第二起项为具有相同概率分布的$n-1$个独立随机变量之和*'。如第2节指出，n是一个较大的数（例如$n\gtrsim 10$），于是由中心极限定理，可认为$\int_t^{t+\Delta t}f(\xi)d\xi$实际上满足正态分布。因此，对于大雷诺数湍流扩散问题，Chandrasekhar[10]文中两个引理的条件是满足的，因此也可直接由Langevin方程得出转移概率函数。换言之，对于雷诺数充分大的湍流，两种推导转移概率的方法是同样有效的。

顺便指出，Chandrasekhar[10]在确定Fokker-Planck方程系数时，对经过时间Δt的速度转移概率$\psi(\vec{u},\ \Delta\vec{u})$作了正态假设，而我们在文[1]中是通过物理分析，对$R_f(\tau)$作了δ函数假设来确定的。由(2.12)、(2.14)及中心极限定理，可知当$\Delta t\sim T_*$时，$\Delta\vec{u}$确为正态变量。因此对于大雷诺数湍流，这两种定系数方法也是同样有效的。

六、小　　结

Markov过程湍流扩散理论与Kolmogoroff理论的密切联系的实质是两个理论从不同侧面反映了大雷诺数湍流的物理结构。一般说来，Kolmogoroff理论着重反映这一物理结构的能量

* 对于转移概率$W(\vec{u},t;\vec{u}_0)$，$W(\vec{r},t;\vec{r}_0,\vec{u}_0)$和$W(\vec{r},\vec{u},t;\ \vec{r}_0,\vec{u}_0)$而言，我们是在确定了初速$\vec{u}_0$的条件系综中考虑问题。(5.8)右端第一项因受$\vec{r}_0$影响，其概率分布一般不同于以后的$n-1$项。

方面的特点，而Markov过程扩散理论则着重反映其运动方面的特点。例如，典型的大尺度旋涡，其能量方面的特点是含能最多（Kolmogoroff 理论），其运动方面的特点是周期与速度自相关时间尺度同阶（Markov 过程扩散理论）；典型的小尺度旋涡，其能量方面的特点是担负几乎全部的能量耗损（Kolmogoroff 理论），其运动方面的特点是周期与随机力的自相关时间尺度同阶（Markov过程扩散论理），等等。

最后我们指出，由于对$\{x(t), u(t)\}$进行Markov描述所需雷诺数与Kolmogoroff第二相似性假设所需雷诺数同样大，因此两个理论的应用范围也将是类似的：尽管通常实验室条件下很难达到这样大的雷诺数，但在大尺度运动的湍流（例如大气湍流以及在天文学中遇到的一些湍流现象）中却完全可以达到所需要的雷诺数，因而可以获得很好的应用。

参 考 文 献

1. 岳曾元，李荫亭，关德相，张彬，中国科学，2，(1974)，148.
2. Kolmogoroff, A., The local structure of turbulence in an incompressible viscous fluid for very large Reynolds number (1941), 见 *Turbulence, Classic Papers on Statistical Theory*, Ed. S. K. Friedlander and Leonard Topper, (1961).
3. Kolmogoroff, A., On degeneration of isotropic turbulence in an incompressible viscous liquid (1941), 见同上书.
4. Kolmogoroff, A., Dissipation of energy in the locally isotropic turbulence (1941), 见同上书.
5. Krassnoff, E. and R. L. Peskin, *Geophysical Fluid Dynamics*, 2, (1971), 123—146.
6. 王梓坤、《概率论基础及其应用》，科学出版社，(1976).
7. Hinze, J. O., *Turbulence*, McGraw-Hill, Inc., (1975).
8. Obukhov, A. M., *Advances in Geophysics*, 6, (1959), 113.
9. Stewart, R. W. and A. A. Townsend, *Phil. Trans. Roy. Soc. London*; 243A, (1951), 359.
10. Chandrasekhar, S., *Review of Modern Physics*. 15, (1943), 1—89.

The Relation between Markov Process Theory and Kolmogoroff's Theory of Turbulence and the Extension of Kolmogoroff's Laws

—— Ⅰ. The Analysis of the Relation between the Two Theories

Yue Zeng-yuan Zhang Bin

(Department of Geophysics, Beijing University, Beijing)

Abstract

The whole paper consists of two parts (Part Ⅰ and Part Ⅱ). In Part Ⅰ, we shall analyze the relation between the two theories of turbulence involving large Reynolds number: the Markov process theory from the Lagrangian point of view and Kolmogoroff's theory from the Eulerian point of view. It will be pointed out that the Reynolds number being needed for the Markovian description of turbulence should be as large as that is needed for Kolmogoroff's second hypothesis, that the eddies of the period of order T_u (the self-correlation time scale of the random velocity u) and the eddies of the period of order T_* (the self-correlation time scale of the random force f) correspond to the energy-containing eddies and the eddies in the dissipation range respectively, and that $T_* \ll t \ll \beta^{-1}$, the time interval for the applicability of Richardson's law during two-particle's dispersion, corresponds to the inertial subrange in Kolmogoroff's theory. Thus, these two theories reflect the property of the turbulence involving very large Reynolds number from different aspects.

In Part Ⅱ, by using the physical analysis in Part Ⅰ, we shall establish, in a certain way, the quantitative relation between these two theories. In terms of this relation and the results of the study of two-particle's dispersion motion, we shall obtain the structure functions, the correlation functions and the energy spectrum, which are applicable not only to the inertial subrange, but also to the whole range with the wave number less than that in the inertial subrange. Kolmogoroff's "2/3 law" and "-5/3 law" are the asymptotic solutions with respect to the present result in the inertial subrange. Thus, the present result is an extension of Kolmogoroff's laws.