应用数学和力学，第3卷第6期（1982年11月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

分解刚度法在各向异性多层扁壳理论中的应用*

王震鸣　刘国玺　吕明身

（中国科学院力学研究所，1980年7月18日收到）

摘　要

本文按文献[3]中胡海昌阐述的方法，在文献[1]的基础上，将分解刚度法推广应用到各向异性多层扁壳的横向变形、稳定和横向振动问题上去，取得了简单实用、计算工作量和误差都较小的近似计算方法.

一、引　言

由碳纤维-环氧等先进复合材料制成的各向异性多层扁壳特别是夹层扁壳，由于层间剪切模量较低，一般应考虑由层间剪切产生的沿厚度方向的剪切变形. 由文献[1]可以看到，在考虑了沿厚度方向的剪切变形以后，具有五个广义位移u_0，v_0，ϕ_x，ϕ_y和w，比采用Kirchhoff假定的扁壳增加了两个广义位移ϕ_x和ϕ_y，方程相当复杂，在求解具体问题时，常常遇到数学上的困难，计算工作量很大.

为简单起见，在60年代和70年代的许多复合材料板壳结构研究工作，常忽略沿厚度方向的剪切变形，采用Kirchhoff假定，这样，广义位移只有三个，u_0，v_0和w，方程简单一些，求解起来比较容易. 算得的结果，在某些情况下，误差较小，有实用价值. 但在另一些情况下，对于横向变形问题，特别是屈曲波数较多的板壳稳定问题和高阶的固有振动问题，采用Kirchhoff假定算得的结果，有时误差大于15～50%，不容忽视，这说明考虑沿厚度方向剪切变形的必要性. 对于板壳结构，一般地说，忽略沿厚度方向的剪切变形所带来的误差，对于自由边要小些，简支边要大些，固支边则更要大些. 在文献[2]中第六章，给出了各向异性多层板在求解横向挠度、临界载荷和横向振动固有频率的算例，说明经典理论的解与考虑沿厚度方向剪切变形的解相比，有时差别很大，不能忽略.

当沿厚度方向的剪切变形所产生的影响不可忽略，但仍处于次要地位时（通常在工程结构上遇到的就是这种情况），采用分解刚度法是很有效的，而且是相当精确的.

1947～1952年间，Bijlaard P. P. 在Hoff型夹层板理论的基础上，就夹层板的临界载荷问题，提出了一个简单的近似计算方法，即分解刚度法，求得了在许多具体情况下临界载荷的近似值. 在我国，60年代初，胡海昌在一份内部报告中，在Reissner夹层板理论的基础上，推广了分解刚度法，用以求解横观各向同性夹层板的横向挠度与固有频率的近似值，在

* 胡海昌推荐.

理论上作了严格的论证。他的主要结果编写在[3]中第九章。

本文按胡海昌阐述的方法，在文献[1]的基础上，将分解刚度法推广应用到求解各向异性多层扁壳的横向变形、稳定和横向振动问题上去，得到了简单实用、计算工作量和误差都较小的近似计算方法。

二、各向异性多层扁壳的基本方程

采用文献[1]中的符号和基本方程。对于各向异性多层扁壳的小挠度理论和不考虑温差的情况，由文献[1]中(2.11)和(2.23)式，分别可得

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ \hline B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u_0}{\partial x}+\dfrac{w}{R_x} \\ \dfrac{\partial v_0}{\partial y}+\dfrac{w}{R_y} \\ \dfrac{\partial u_0}{\partial y}+\dfrac{\partial v_0}{\partial x}+\dfrac{2w}{R_{xy}} \\ \dfrac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \phi_x}{\partial y}+\dfrac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \tag{2.1}$$

和

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{55} & C_{45} \\ C_{45} & C_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial w}{\partial x}+\phi_x \\ \dfrac{\partial w}{\partial y}+\phi_y \end{Bmatrix} \tag{2.2}$$

在(2.1)和(2.2)式中，A_{ij}为拉伸刚度，D_{ij}和B_{ij}分别为对所选坐标轴的弯曲刚度与弯曲拉伸间的耦合刚度，由[1]中(2.12)式给出；C_{ij}为剪切刚度，由[1]中(2.35)式给出。

对于横向载荷q_z和在X，Y方向对所选坐标系的分布力矩m_x，m_y作用下的弯曲问题，在内力N_x^0，N_y^0，N_{xy}^0作用下的线性稳定问题和横向固有振动问题，由[1]中(3.1)式可得平衡方程：

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}=0, \qquad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial N_y}{\partial y}=0 \\ &\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}-Q_x-I\frac{\partial^2\phi_x}{\partial t^2}+m_x=0 \\ &\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial M_y}{\partial y}-Q_y-I\frac{\partial^2\phi_y}{\partial t^2}+m_y=0 \\ &\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}-\frac{N_x}{R_x}-\frac{2N_{xy}}{R_{xy}}-\frac{N_y}{R_y}+q_0=0 \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

其中

$$q_0=N_x^0\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+2N_{xy}^0\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+N_y^0\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+q_z-\bar{\rho}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{2.4}$$

在 (2.3) 中，$\left(-I\frac{\partial^2\phi_x}{\partial t^2}\right)$和$\left(-I\frac{\partial^2\phi_y}{\partial t^2}\right)$为惯性力矩；在(2.4)中，$\left(-\bar{\rho}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)$为惯性力。$\bar{\rho}$和$I$由[1]中(3.2)式给出。

将(2.1)，(2.2)代入(2.3)式，可得以广义位移u_0，v_0，ϕ_x，ϕ_y和w表示的偏微分方程组。

$$\left.\begin{aligned}
&L_{11}u_0+L_{12}v_0+L_{13}\phi_x+L_{14}\phi_y+L_{15}w=0\\
&L_{12}u_0+L_{22}v_0+L_{23}\phi_x+L_{24}\phi_y+L_{25}w=0\\
&L_{13}u_0+L_{23}v_0+\left(L_{33}-I\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi_x+L_{34}\phi_y+L_{35}w=0\\
&L_{14}u_0+L_{24}v_0+L_{34}\phi_x+\left(L_{44}-I\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi_y+L_{45}w=0\\
&L_{51}u_0+L_{52}v_0+L_{53}\phi_x+L_{54}\phi_y+L_{55}w+q_0=0
\end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

在(2.5)中，线性微分算子L_{11}，L_{12}，L_{13}，…等，由[1]中(4.3)式给出，略去L_{16}，L_{25}，L_{35}，L_{45}中的小量后可得

$$\left.\begin{aligned}
&L_{11}=A_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2A_{16}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+A_{66}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\\
&L_{12}=A_{16}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+(A_{12}+A_{66})\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+A_{26}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\\
&L_{13}=B_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2B_{16}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+B_{66}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\\
&L_{14}=L_{23}=B_{16}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+(B_{12}+B_{66})\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+B_{26}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\\
&L_{15}=-L_{51}=\left(\frac{A_{11}}{R_x}+\frac{A_{12}}{R_y}+\frac{2A_{16}}{R_{xy}}\right)\frac{\partial}{\partial x}+\left(\frac{A_{16}}{R_x}+\frac{A_{26}}{R_y}+\frac{2A_{66}}{R_{xy}}\right)\frac{\partial}{\partial y}\\
&L_{22}=A_{66}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2A_{26}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+A_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\\
&L_{24}=B_{66}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2B_{26}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+B_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\\
&L_{25}=-L_{52}=\left(\frac{A_{16}}{R_x}+\frac{A_{26}}{R_y}+\frac{2A_{66}}{R_{xy}}\right)\frac{\partial}{\partial x}+\left(\frac{A_{12}}{R_x}+\frac{A_{22}}{R_y}+\frac{2A_{26}}{R_{xy}}\right)\frac{\partial}{\partial y}\\
&L_{33}=D_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2D_{16}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+D_{66}\frac{\partial^2}{\partial y^2}-C_{55}\\
&L_{34}=D_{16}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+(D_{12}+D_{66})\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+D_{26}\frac{\partial^2}{\partial y^2}-C_{45}\\
&L_{35}=-L_{53}=\left(\frac{B_{11}}{R_x}+\frac{B_{12}}{R_y}+\frac{2B_{16}}{R_{xy}}-C_{55}\right)\frac{\partial}{\partial x}+\left(\frac{B_{16}}{R_x}+\frac{B_{26}}{R_y}+\frac{2B_{66}}{R_{xy}}-C_{45}\right)\frac{\partial}{\partial y}\\
&L_{44}=D_{66}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2D_{26}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+D_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2}-C_{44}
\end{aligned}\right\}$$

$$
\left.\begin{aligned}
L_{45}=-L_{54}=&\left(\frac{B_{16}}{R_x}+\frac{B_{26}}{R_y}+\frac{2B_{66}}{R_{xy}}-C_{45}\right)\frac{\partial}{\partial x}+\left(\frac{B_{12}}{R_x}+\frac{B_{22}}{R_y}+\frac{2B_{26}}{R_{xy}}-C_{44}\right)\frac{\partial}{\partial y}\\
L_{55}=-&\left(\frac{A_{11}}{R_x^2}+\frac{2A_{12}}{R_xR_y}+\frac{4A_{16}}{R_xR_{xy}}+\frac{A_{22}}{R_y^2}+\frac{4A_{26}}{R_yR_{xy}}+\frac{4A_{66}}{R_{xy}^2}\right)\\
&+\left(C_{55}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2C_{45}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+C_{44}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{2.6}
$$

由[1]中（3.3）式，边界条件为

$$
\left.\begin{aligned}
&N_n=\bar{N}_n,\ \text{或}\ u_n=\bar{u}_n;\quad N_{nt}=\bar{N}_{nt},\ \text{或}\ u_t=\bar{u}_t\\
&M_n=\bar{M}_n,\ \text{或}\ \phi_n=\bar{\phi}_n;\quad M_{nt}=\bar{M}_{nt},\ \text{或}\ \phi_t=\bar{\phi}_t\\
&Q_n+N_n\frac{\partial w}{\partial n}+N_{nt}\frac{\partial w}{\partial t}=\bar{Q}_n,\ \text{或}\ w=\bar{w}
\end{aligned}\right\} \tag{2.7}
$$

可以看到，在给定边界条件（2.7）的情况下，求解方程组（2.5）还会遇到数学上的困难。下面我们采用分解刚度法求近似解。

三、各向异性多层扁壳理论中的分解刚度法

各向异性多层扁壳共有四种刚度：A_{ij}，B_{ij}，D_{ij}，（i，j＝1，2，6）和 C_{ij}，（i，j＝4，5）。它们之间是有联系的，可在[1]中（2.12）式和（2.35）式明显的看到，在外载荷作用下产生横向变形、确定临界载荷时或计算横向振动固有频率时，一般说来，它们之间又存在着相互联系。

分解刚度法，顾名思义就是将刚度分解开来，认为它们之间是独立无关的，没有相互联系。在给定的载荷、扁壳形状和边界条件下，先按剪切刚度 $C_{ij}=\infty$，A_{ij}，B_{ij} 和 D_{ij} 为有限值；再按 C_{ij} 为有限值，$D_{ij}=\infty$，$A_{ij}=B_{ij}=0$，分别求解横向挠度、临界载荷与横向振动固有频率，然后按比较合理的公式（3.29）进行综合，求得所要的结果。

分解刚度法只适用于弹性体系的小应变和小挠度的情况。一般说来，它是一种近似方法，其精确度与所用的综合公式以及边界条件有关。本文所给出的方法，只适用于扁壳和平板。

对于考虑沿厚度方向剪切变形的各向异性多层扁壳和夹层扁壳，当 $C_{ij}=\infty$，A_{ij}，B_{ij}和 D_{ij} 为有限值，意味着不产生沿厚度方向的剪切变形，所以扁壳变形前中面的法线，在扁壳变形后仍为中面的法线，这样，问题就转化为求扁壳的经典理论解，这是解的主要部分。当 C_{ij} 为有限值，$D_{ij}=\infty$，$A_{ij}=B_{ij}=0$ 时，问题转化为不产生弯曲变形，只产生剪切变形的平板。$D_{ij}=\infty$意味着不产生弯曲变形；C_{ij} 为有限值，就考虑了沿厚度方向的剪切变形；$A_{ij}=B_{ij}=0$，意味着在简化扁壳方程中的作用相当于取 $R_x=R_y=R_{xy}=\infty$ 所起的作用，使一些有关的项消失，转化为平板问题，不能理解为 $E_{ij}=0$，而与 $D_{ij}=\infty$ 时引伸出 $E_{ij}=\infty$ 对立起来。因为分解刚度法仅不过是一种求解问题时很有效的近似计算方法，已经说明，假定各刚度之间是独立无关没有联系的。

C_{ij} 和 D_{ij} 这两种刚度，在本质上类似于两个串联着的弹簧，见图1．在外载荷作用下所产生的变形，近似地等于对 C_{ij} 和 D_{ij} 分别作用时所产生变形的总和。但是 C_{ij} 和 D_{ij} 这两种刚度不是同类的量，C_{ij} 与扁壳在厚度方向的剪切变形有关，而 D_{ij} 与扁壳整体的抗弯性能有关，对于边界条件的要求也不相同。C_{ij} 和 D_{ij} 这两者所组成的体系的综合刚度，可

图　1

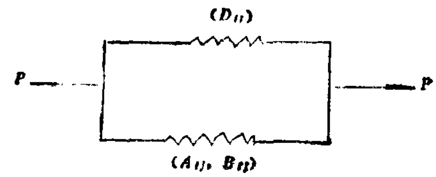

图　2

形象地设想为与两个串联着的弹簧相类似的模型，由于涉及一些复杂的因素，却不能用弹簧串联的公式来计算它们的综合刚度，也无法用复杂的公式来表示它们的综合刚度．两个弹簧串联以后，其综合刚度将小于其中任何一个弹簧的刚度，因此在载荷作用下挠度增大，总挠度等于两个弹簧分别在同一载荷作用下所产生的挠度之和；做成的单自由度振动系统，其固有频率要降低，$\omega^2=\dfrac{\omega_1^2\omega_2^2}{\omega_1^2+\omega_2^2}$，其中的$\omega_1$和$\omega_2$，分别为两个弹簧各自的固有频率．由$C_{ij}$和$D_{ij}$组合的体系，其变形近似地等于$C_{ij}=\infty$（即不产生沿厚度方向的剪切变形）和$D_{ij}$为有限值时所产生的弯曲挠度$w_b$，加上$D_{ij}=\infty$（即不产生弯曲变形）和$C_{ij}$为有限值时所产生的剪切挠度$w_s$．对于不考虑表板自身抗弯刚度的夹层板，一般只涉及$C_{ij}$和$D_{ij}$这两种刚度，不涉及刚度$A_{ij}$和$B_{ij}$．所以夹层板的横向挠度$w=w_b+w_s$．

在夹层板的横向变形中，D_{ij}和C_{ij}对产生变形是有耦合影响的，现将C_{ij}和D_{ij}截然分开，不考虑它们在产生变形时的耦合影响，所以$w=w_b+w_s$不能严格地成立，但可得到良好的近似．[3]中第九章指出，对于边界简支的多角形夹层板，轴对称变形下的圆形夹层板以及其他沿厚度方向的剪力Q_x，Q_y是静定的夹层板，此公式严格地成立．对于用分解刚度法求解夹层板的临界载荷与固有频率，亦是这样的情况．

关于夹层板的临界载荷和固有频率的计算，可作如下说明．由于C_{ij}和D_{ij}的综合刚度比C_{ij}和D_{ij}中任何一个都要小，所以临界载荷与固有频率也比分别计算时要小，由于C_{ij}和D_{ij}的综合刚度在本质上是按串联原则综合的，因此临界载荷和固有频率按下式综合．

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{N_{cr}}&=\frac{1}{(N_{cr})_1}+\frac{1}{(N_{cr})_2}\\ \frac{1}{\omega^2}&=\frac{1}{(\omega)_1^2}+\frac{1}{(\omega)_2^2}\end{aligned}\right\}\tag{3.1}$$

在（3.1）式中，$(N_{cr})_1$和$(\omega)_1$，$(N_{cr})_2$和$(\omega)_2$分别为$C_{ij}=\infty$，D_{ij}为有限值时和$D_{ij}=\infty$，C_{ij}为有限值时算得的临界载荷与固有频率．

在扁壳结构中，C_{ij}和D_{ij}之间的关系，和夹层板中这两者间的关系相同．

在（2.2）式中，当$C_{ij}=\infty$，因为Q_x，Q_y应为有限值，所以要求，$\phi_x+\dfrac{\partial w}{\partial x}=0$，$\phi_y+\dfrac{\partial w}{\partial y}=0$，即

$$\phi_x=-\frac{\partial w}{\partial x}，\quad \phi_y=-\frac{\partial w}{\partial y}\tag{3.2}$$

这就是Kirchhoff假定．将（2.3）中第三、四式代入第五式得

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}-\frac{N_x}{R_x}-\frac{2N_{xy}}{R_{xy}}-\frac{N_y}{R_y}+q_1=0 \tag{3.3}$$

其中

$$q_1=q_z+\frac{\partial m_x}{\partial x}+\frac{\partial m_y}{\partial y}+N_x^0\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+2N_{xy}^0\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+N_y^0\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\left[I\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)-\bar{\rho}\right]\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{3.4}$$

将（3.2）代入（2.5）中第一、二式得

$$\left.\begin{aligned}&L_{11}u_0+L_{12}v_0+\mathcal{L}_{13}w=0\\&L_{12}u_0+L_{22}v_0+\mathcal{L}_{23}w=0\end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{L}_{13}=&\left(\frac{A_{11}}{R_x}+\frac{A_{12}}{R_y}+\frac{2A_{16}}{R_{xy}}\right)\frac{\partial}{\partial x}+\left(\frac{A_{16}}{R_x}+\frac{A_{26}}{R_y}+\frac{2A_{66}}{R_{xy}}\right)\frac{\partial}{\partial y}\\&-\left[B_{11}\frac{\partial^3}{\partial x^3}+3B_{16}\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}+(B_{12}+2B_{66})\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}+B_{26}\frac{\partial^3}{\partial y^3}\right]\\\mathcal{L}_{23}=&\left(\frac{A_{16}}{R_x}+\frac{A_{26}}{R_y}+\frac{2A_{66}}{R_{xy}}\right)\frac{\partial}{\partial x}+\left(\frac{A_{12}}{R_x}+\frac{A_{22}}{R_y}+\frac{2A_{26}}{R_{xy}}\right)\frac{\partial}{\partial y}\\&-\left[B_{16}\frac{\partial^3}{\partial x^3}+(B_{12}+2B_{66})\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}+3B_{26}\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}+B_{22}\frac{\partial^3}{\partial y^3}\right]\end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

将（2.1）式代入（3.3）式，注意到（3.2）式，化简后得

$$\mathcal{L}_{13}u_0+\mathcal{L}_{23}v_0+\mathcal{L}_{33}w+q_1=0 \tag{3.7}$$

其中

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{33}=&-\left[D_{11}\frac{\partial^4}{\partial x^4}+4D_{16}\frac{\partial^4}{\partial x^3\partial y}+2(D_{12}+2D_{66})\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+4D_{26}\frac{\partial^4}{\partial x\partial y^3}\right.\\&\left.+D_{22}\frac{\partial^4}{\partial y^4}\right]+2\left(\frac{B_{11}}{R_x}+\frac{B_{12}}{R_y}+\frac{2B_{16}}{R_{xy}}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}+4\left(\frac{B_{16}}{R_x}+\frac{B_{26}}{R_y}+\frac{2B_{66}}{R_{xy}}\right)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\\&+2\left(\frac{B_{12}}{R_x}+\frac{B_{22}}{R_y}+\frac{2B_{26}}{R_{xy}}\right)\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\left(\frac{A_{11}}{R_x^2}+\frac{2A_{12}}{R_xR_y}+\frac{4A_{16}}{R_xR_{xy}}+\frac{A_{22}}{R_y^2}\right.\\&\left.+\frac{4A_{26}}{R_yR_{xy}}+\frac{4A_{66}}{R_{xy}^2}\right)\end{aligned} \tag{3.8}$$

由（3.5）和（3.7）式以及下面所给的边界条件，即可求解经典理论的横向挠度$(w)_1$，临界载荷（N_{cr}）$_1$和横向振动的固有频率（ω）$_1$。

边界条件：在采用 Kirchhoff 假定时，参照文献[4]，可得多层扁壳的边界条件。

简支边：

$$\left.\begin{aligned}&S_1:\ w=0,\ M_n=0,\ u_n=\bar{u}_n,\ u_t=\bar{u}_t\\&S_2:\ w=0,\ M_n=0,\ N_n=\bar{N}_n,\ u_t=\bar{u}_t\\&S_3:\ w=0,\ M_n=0,\ u_n=\bar{u}_n,\ N_{nt}=\bar{N}_{nt}\\&S_4:\ w=0,\ M_n=0,\ N_n=\bar{N}_n,\ N_{nt}=\bar{N}_{nt}\end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

固支边：

$$\left.\begin{array}{llll}C_1: & w=0, & \dfrac{\partial w}{\partial n}=0, & u_n=\bar{u}_n, \quad u_t=\bar{u}_t \\ C_2: & w=0, & \dfrac{\partial w}{\partial n}=0, & N_n=\bar{N}_n, \quad u_t=\bar{u}_t \\ C_3: & w=0, & \dfrac{\partial w}{\partial n}=0, & u_n=\bar{u}_n, \quad N_{nt}=\bar{N}_{nt} \\ C_4: & w=0, & \dfrac{\partial w}{\partial n}=0, & N_n=\bar{N}_n, \quad N_{nt}=\bar{N}_{nt}\end{array}\right\} \tag{3.10}$$

自由边：

$$N_n=\bar{N}_n, \quad N_{nt}=\bar{N}_{nt}, \quad M_n=\bar{M}_n, \quad Q_n+\frac{\partial M_{nt}}{\partial t}=\bar{Q}_n \tag{3.11}$$

在（3.9）～（3.11）式中，所用记号与文献[1]相同。

为了探讨分解刚度法的综合公式，由（3.5）和（3.7）式消去u_0和v_0，导出仅含w的方程。由（3.5）得

$$\left.\begin{array}{l}(L_{11}L_{22}-L_{12}^2)u_0=(L_{12}\mathcal{L}_{23}-L_{22}\mathcal{L}_{13})w \\ (L_{11}L_{22}-L_{12}^2)v_0=(L_{12}\mathcal{L}_{13}-L_{11}\mathcal{L}_{23})w\end{array}\right\} \tag{3.12}$$

将（3.7）式乘以线性算子$(L_{11}L_{22}-L_{12}^2)$，然后将（3.12）式代入得

$$[(L_{12}\mathcal{L}_{23}-L_{22}\mathcal{L}_{13})\mathcal{L}_{13}+(L_{12}\mathcal{L}_{13}-L_{11}\mathcal{L}_{23})\mathcal{L}_{23}+\mathcal{L}_{33}]w+(L_{11}L_{22}-L_{12}^2)q_1=0 \tag{3.13}$$

记

$$\mathcal{L}_0^{AB}=(L_{12}\mathcal{L}_{23}-L_{22}\mathcal{L}_{13})\mathcal{L}_{13}+(L_{12}\mathcal{L}_{13}-L_{11}\mathcal{L}_{23})\mathcal{L}_{23} \tag{3.14}$$

因（3.14）式的右边仅与A_{ij}，B_{ij}有关，所以在$\mathcal{L}_0$的右上角加上AB。由（3.8）式可以看到，$\mathcal{L}_{33}$分别与D_{ij}，A_{ij}和B_{ij}有关，也用$\mathcal{L}_{33}^D$和$\mathcal{L}_{33}^{AB}$分别表示之。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{33}^D=&-\Big[D_{11}\frac{\partial^4}{\partial x^4}+4D_{16}\frac{\partial^4}{\partial x^3\partial y}+2(D_{12}+2D_{66})\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}\\&+4D_{26}\frac{\partial^4}{\partial x\partial y^3}+D_{22}\frac{\partial^4}{\partial y^4}\Big]\\ \mathcal{L}_{33}^{AB}=&-2\left(\frac{B_{11}}{R_x}+\frac{B_{12}}{R_y}+\frac{2B_{16}}{R_{xy}}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}-4\left(\frac{B_{16}}{R_x}+\frac{B_{26}}{R_y}+\frac{2B_{66}}{R_{xy}}\right)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\\&-2\left(\frac{B_{12}}{R_x}+\frac{B_{22}}{R_y}+\frac{2B_{66}}{R_{xy}}\right)\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\left(\frac{A_{11}}{R_x^2}+\frac{2A_{12}}{R_xR_y}+\frac{4A_{16}}{R_xR_{xy}}+\frac{A_{22}}{R_y^2}\right.\\&\left.+\frac{4A_{26}}{R_yR_{xy}}+\frac{4A_{66}}{R_{xy}^2}\right)\end{aligned} \tag{3.15}$$

记

$$\mathcal{L}_1^{AB}=L_{11}L_{22}-L_{12}^2 \tag{3.16}$$

则由(3.13)式得

$$(\mathcal{L}_0^{AB}+\mathcal{L}_{33}^{AB}+\mathcal{L}_{33}^D)w+\mathcal{L}_1^{AB}q_1=0 \tag{3.17}$$

当计算横向挠度时，

$$q_1=q_z+\frac{\partial m_x}{\partial x}+\frac{\partial m_y}{\partial y} \tag{3.18}$$

当计算临界载荷时，

$$q_1 = N_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \tag{3.19}$$

当计算横向振动固有频率时，

$$q_1 = \left[I\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) - \bar{\rho} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{3.20}$$

当D_{ij}为有限值，$A_{ij}=B_{ij}=0$时，由(3.7)式得

$$\mathcal{L}_{33}^D w + q_1 = 0 \tag{3.21}$$

(3.21)式不能由(3.17)式得到。因为由(3.5)和(3.7)式的三个方程化为(3.17)式时，对(3.7)式乘了$(L_{11}L_{22}-L_{12}^2)$，现在$L_{11}L_{22}-L_{12}^2=0$，不能作这样的运算，因此应该只用(3.7)式推得(3.21)式。

由(3.21)式结合边界条件，可算得在广义载荷q_1作用下，经典理论平板的$(w)_D$，$(N_{cr})_D$和$(\omega)_D$。

当A_{ij}和B_{ij}为有限值，$D_{ij}=0$时，由(3.17)式可得

$$(\mathcal{L}_0^{AB} + \mathcal{L}_{33}^{AB}) w + \mathcal{L}_1^{AB} q_1 = 0 \tag{3.22}$$

结合边界条件，可算得在广义载荷q_1作用下无矩理论扁壳的$(w)_{AB}$，$(N_{cr})_{AB}$和$(\omega)_{AB}$。

由于D_{ij}和A_{ij}，B_{ij}之间在本质上是并联的关系，见图2．因此，对于经典理论板壳，有

$$\left.\begin{aligned} &(w)_1 = \frac{1}{\dfrac{1}{(w)_D} + \dfrac{1}{(w)_{AB}}} \\ &(N_{cr})_1 = (N_{cr})_D + (N_{cr})_{AB} \\ &(\omega)_1^2 = (\omega)_D^2 + (\omega)_{AB}^2 \end{aligned}\right\} \tag{3.23}$$

现在考虑扁壳在沿厚度方向剪切变形的影响．当C_{ij}为有限值，$D_{ij}=\infty$，$A_{ij}=B_{ij}=0$时，由(2.1)式

$$\left.\begin{aligned} M_x &= D_{11}\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + D_{12}\frac{\partial \phi_y}{\partial y} + D_{16}\left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \\ M_y &= D_{12}\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + D_{22}\frac{\partial \phi_y}{\partial y} + D_{26}\left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \\ M_{xy} &= D_{16}\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + D_{26}\frac{\partial \phi_y}{\partial y} + D_{66}\left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \end{aligned}\right\} \tag{3.24}$$

当$D_{ij}=\infty$，因M_x，M_y，M_{xy}应为有限值，所以要求

$$\frac{\partial \phi_x}{\partial x} = \frac{\partial \phi_y}{\partial y} = \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} = 0 \tag{3.25}$$

由(2.2)式可得

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial Q_x}{\partial x} \\ \dfrac{\partial Q_y}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{55} & C_{45} \\ C_{45} & C_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \dfrac{\partial \phi_y}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{55} & C_{45} \\ C_{45} & C_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{Bmatrix} \tag{3.26}$$

将(3.26)式代入(2.3)中第五式得

$$(C_{55}+C_{45})\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+(C_{45}+C_{44})\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+q_0=0 \tag{3.27}$$

由(3.27)式及相应的边界条件，可求得不产生弯曲变形只产生沿厚度方向剪切变形的平板的$(w)_C$，$(N_{cr})_C$和$(\omega)_C$。因此

$$\left.\begin{aligned}&(w)_{CD}=(w)_C+(w)_D\\&\frac{1}{(N_{cr})_{CD}}=\frac{1}{(N_{cr})_C}+\frac{1}{(N_{cr})_D}\\&\frac{1}{(\omega)^2_{CD}}=\frac{1}{(\omega)^2_C}+\frac{1}{(\omega)^2_D}\end{aligned}\right\} \tag{3.28}$$

考虑到A_{ij}，B_{ij}，C_{ij}和D_{ij}这四种刚度之间，C_{ij}和D_{ij}是串联的关系，它们两个的综合刚度与A_{ij}，B_{ij}之间是并联的关系，见图3。用(3.28)式中的$(w)_{CD}$，$(N_{cr})_{CD}$和$(\omega)^2_{CD}$取代(3.23)式

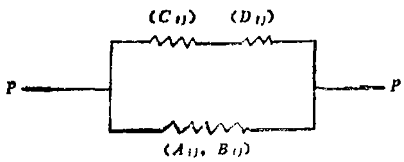

图　3

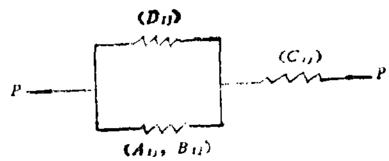

图　4

中的$(w)_D$，$(N_{cr})_D$和$(\omega)^2_D$，则最后的综合公式为

$$\left.\begin{aligned}&w=\frac{1}{\dfrac{1}{(w)_C+(w)_D}+\dfrac{1}{(w)_{AB}}}\\&N_{cr}=\frac{1}{\dfrac{1}{(N_{cr})_C}+\dfrac{1}{(N_{cr})_D}}+(N_{cr})_{AB}\\&\omega^2=\frac{1}{\dfrac{1}{(\omega)^2_C}+\dfrac{1}{(\omega)^2_D}}+(\omega)^2_{AB}\end{aligned}\right\} \tag{3.29}$$

对于各种特殊情况，可以参照文献[1]作出相应的简化。

对于四边简支的各向同性夹层曲板在横向载荷作用下的挠度问题，在轴压下的稳定问题和横向振动固有频率的问题，经过计算表明，在考虑拉伸刚度A的同时，如将两块表板对自身中面的抗弯刚度$2D_f$亦看作是与夹层板的剪切刚度C和弯曲刚度D综合后的刚度相并联的，见图5，采用和(3.27)式相类似的综合公式，在选用挠度函数$w=\bar{w}\sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi y}{b}$时，保留纵横向的半波数$m$，$n$为待定数，则用分解刚度法算得的$w$，$N_{cr}$和$\omega$的最后表达式，与采用文献[3]中第六章的公式所得的精确解完全相同。这说明综合公式(3.29)合理地考虑了各刚度之间在本质上的串联并联关系，是比较精确的，在曲板问题的一定场合下是精确解。因此，我们估计综合公式(3.29)给出的近似结果是良好的，今后用数值计算来表明这一点。

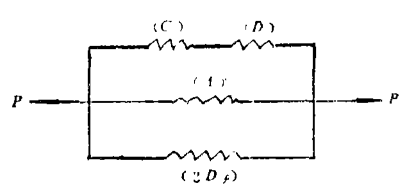

图　5

对于稳定问题，应将失稳时在X，Y方向的半波数m，n作为待定值，在按(3.29)式综合

后，依次取 $m=1,2,3,\cdots$；$n=1,2,3,\cdots$，算出临界载荷的最小值．对于横向变形和固有振动频率，m，n的数值一般容易确定．

如果已经算得了或从手册或其他资料上查到了$(w)_1$，$(N_{cr})_1$和$(\omega)_1$的值，不想分别计算$(w)_D$，$(N_{cr})_D$，$(\omega)_D$和$(w)_{AB}$，$(N_{cr})_{AB}$，$(\omega)_{AB}$，则可采用比较方便但精度较(3.29)式略差的第二种综合公式：

$$\left.\begin{aligned} w&=(w)_1+(w)_C \\ \frac{1}{N_{cr}}&=\frac{1}{(N_{cr})_1}+\frac{1}{(N_{cr})_C} \\ \frac{1}{\omega^2}&=\frac{1}{(\omega)_1^2}+\frac{1}{(\omega)_C^2} \end{aligned}\right\} \tag{3.30}$$

其中$(w)_C$，$(N_{cr})_C$和$(\omega)_C$和(3.29)式中采用的相同．

从(3.30)式可以看到，它采用了D_{ij}和A_{ij}，B_{ij}先并联，然后再和C_{ij}串联的模式．见图4．可以证明，(3.30)式给出的结果与(3.29)式给出的结果相比，w偏大，N_{cr}和ω偏小．在工程设计中，这偏于安全，因此也可以采用．

本文承蒙胡海昌教授审阅和指正，深表谢意．

参 考 文 献

1. 王震鸣，刘国玺，吕明身，各向异性多层扁壳的大挠度方程，应用数学和力学，3，1 (1981).
2. Vinson, J. R. and T. W. Chou, *Composite materials and their use in structures*, (1975).
3. 中国科学院北京力学研究所固体力学研究室板壳组著，《夹层板壳的弯曲稳定和振动》，科学出版社，(1977).
4. Jones, R. M., *Mechanics of composite materials*, (1975).

Application of the Method of Split Rigidities to Anisotropic Laminated Shallow Shells

Wang Zhen-ming　　Liu Guo-xi　　Lü Ming-shen

(*Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing*)

Abstract

In this paper, according to the method stated by Hu Hai-chang in reference [3], on the basis of reference [1], the method of split rigidities is generalized to the problems of lateral deflection, stability and lateral vibration for anisotropic laminated shallow shells, and a simple and practical approximate method is obtained, in which the errors and computing works are comparatively small.