

# 线弹性结构非平稳随机振动分析的 有限元方法\*

金 问 鲁

(杭州市建筑设计院, 1981年11月30日收到)

## 摘 要

当前结构分析的有效方法是有限单元法, 对于结构动力学问题, 将变位、应力等物理量通过 Fourier 变换进行谱分解, 在谱分解的形式下推求动力刚度矩阵, 这样所得的矩阵和有关方程不能用结构的随机振动问题常用的振型分解法求解. 本文提出了一个普遍化的求解方法. 文中考虑如地震、风震等外载是如下非平稳随机过程:  $P(t) = \{P_i(t)\}$ ,  $P_i(t) = a_i(t)P_i^o(t)$ ,  $a_i(t)$  是已知的时间函数,  $P_i^o(t)$  是平稳随机过程. 本文将有限单元法所得的离散化方程进行 Fourier 变换, 利用随机过程谱分解的正交增量性质<sup>[1]</sup>推导了激励谱和反应谱之间关系的公式. 用这些公式可以寻求反应的互功率谱密度矩阵, 再根据反应的统计量进行结构的安全度分析. 在本文提出的计算方法中, 当  $a_i(t) = 1$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 时方法可以简化为求解平稳过程的特殊情况. 在实际应用中可以根据地震、风震记录所得的功率谱密度矩阵, 按本文方法用计算机对高层、高耸、大跨度等结构问题进行分析. 为了说明计算方法的特点, 文中首先考虑单自由度情况, 其次考虑多自由度情况, 列出几个重要统计量的计算公式, 并对数值计算方法和安全度分析作了讨论.

## 一、单自由度情况

基本方程是

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = P \quad (1.1)$$

在上式中,  $U$  是质点的变位,  $M$ ,  $C$  各为质点的质量和阻尼系数,  $K$  是刚度系数, 点号表示对时间的导数,  $P$  是荷载, 是一个非平稳随机过程, 表示为

$$P(t) = a(t)P^o(t) \quad (1.2)$$

对  $P(t)$  作谱分解, 则有

$$P(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{P}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (1.3)$$

式中,  $\tilde{P}(\omega)$  是  $P(t)$  的 Fourier 变换, 再设  $a(t)$ ,  $P^o(t)$  的 Fourier 变换各为  $\tilde{a}(\omega)$ ,  $\tilde{P}^o(\omega)$ , 根据 Fourier 变换性质有

$$\tilde{P}(\omega) = \tilde{a}(\omega) * \tilde{P}^o(\omega) \quad (1.4)$$

上式中 \* 号表示求褶积. 这样可得:

$$P(t) = \iint \tilde{P}^o(\omega_1) \tilde{a}(\omega_2 - \omega_1) e^{i\omega_2 t} d\omega_1 d\omega_2 \quad (1.5a)$$

$$P^*(t) = \iint \tilde{P}^{o*}(\omega_3) \tilde{a}^*(\omega_4 - \omega_3) e^{-i\omega_4 t} d\omega_3 d\omega_4 \quad (1.5b)$$

\* 钟万勰推荐.

上式中右上角 \* 号表示复共轭量。在以上两式中略去了从  $-\infty$  到  $\infty$  的积分符号，以下各式中也将采用这种简化写法。(1.5a)，(1.5b) 两式的乘积是：

$$P(t)P^*(t) = \iiint \tilde{P}^o(\omega_1) \tilde{P}^{o*}(\omega_3) \tilde{a}(\omega_2 - \omega_1) \tilde{a}^*(\omega_4 - \omega_3) \cdot e^{i(\omega_2 - \omega_4)t} d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 d\omega_4 \quad (1.6)$$

对上式求期望值，注意到谱分解  $\tilde{P}^o(\omega_1)$  和  $\tilde{P}^{o*}(\omega_3)$  的积的期望值可写为：

$$E[\tilde{P}^o(\omega_1) \tilde{P}^{o*}(\omega_3)] = S_P(\omega_1) \delta(\omega_1 - \omega_3) \quad (1.7)$$

$\delta$  表示 Dirac 函数， $S_P(\omega_1)$  是  $P^o(t)$  的功率谱密度，这样可将 (1.6) 式的期望值写为：

$$\begin{aligned} E[P(t)P^*(t)] &= E|P(t)|^2 = \iiint \iiint E[\tilde{P}^o(\omega_1) \tilde{P}^{o*}(\omega_3)] \\ &\quad \cdot \tilde{a}(\omega_2 - \omega_1) \tilde{a}^*(\omega_4 - \omega_3) e^{i(\omega_2 - \omega_4)t} d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 d\omega_4 \\ &= \iiint \iiint S_P(\omega_1) \delta(\omega_1 - \omega_3) \tilde{a}(\omega_2 - \omega_1) \tilde{a}^*(\omega_4 - \omega_3) \\ &\quad \cdot e^{i(\omega_2 - \omega_4)t} d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 d\omega_4 \\ &= \iiint S_P(\omega_1) \tilde{a}(\omega_2 - \omega_1) \tilde{a}^*(\omega_4 - \omega_1) e^{i(\omega_2 - \omega_4)t} d\omega_1 d\omega_2 d\omega_4 \\ &= \int S_P(\omega_1) \left[ \tilde{a}(\omega_2 - \omega_1) e^{i\omega_2 t} d\omega_2 \right] \left[ \tilde{a}^*(\omega_4 - \omega_1) e^{-i\omega_4 t} d\omega_4 \right] d\omega_1 \quad (1.8) \end{aligned}$$

均方值  $E|P(t)|^2$  经常采用如下形式<sup>[2]</sup>：

$$E|P(t)|^2 = \int S_P(t, \omega) d\omega \quad (1.9a)$$

$$S_P(t, \omega) = |a(t, \omega)|^2 S_P(\omega) \quad (1.9b)$$

比较 (1.8) 和 (1.9a, b) 式，如果定义

$$a(t, \omega) = \int \tilde{a}(\omega' - \omega) e^{i\omega' t} d\omega' \quad (1.10)$$

则 (1.8) 式和 (1.9a, b) 式是等价的。实际上有

$$a(t, \omega) = \int \tilde{a}(\omega' - \omega) e^{i(\omega' - \omega)t} \cdot e^{i\omega t} d(\omega' - \omega) = a(t) e^{i\omega t} \quad (1.11)$$

将上式结果代入 (1.9b) 式得

$$S_P(t, \omega) = a^2(t) S_P(\omega) \quad (1.12)$$

仿照 (1.8) 式步骤，注意到 (1.11) 式可以求出  $P(t_1)$  和  $P^*(t_2)$  的相关函数为：

$$\begin{aligned} R_P(t_1, t_2) &= E[P(t_1)P^*(t_2)] \\ &= \int S_P(\omega_1) a(t_1) a(t_2) e^{i\omega_1(t_1 - t_2)} d\omega_1 \\ &= a(t_1) a(t_2) \int S_P(\omega) e^{i\omega(t_1 - t_2)} d\omega \quad (1.13) \end{aligned}$$

这个结果同样可从 (1.2) 式直接导出：

$$\begin{aligned} E[P(t_1)P^*(t_2)] &= a(t_1) a(t_2) E[P^o(t_1)P^{o*}(t_2)] \\ &= a(t_1) a(t_2) \int S_P(\omega) e^{i\omega(t_1 - t_2)} d\omega \quad (1.14) \end{aligned}$$

现在可以考虑方程 (1.1) 式的解。从 (1.1) 式可以求出频谱反应函数是

$$H(\omega) = \frac{1}{-M\omega^2 + Ci\omega + K} \quad (1.15)$$

显然有：

$$\tilde{U}(\omega) = H(\omega)\tilde{P}(\omega) \quad (1.16)$$

$\tilde{U}(\omega)$ 是 $U(t)$ 的谱分量, 则有

$$\begin{aligned} U(t) &= \int \tilde{U}(\omega)e^{i\omega t}d\omega = \int H(\omega)\tilde{P}(\omega)e^{i\omega t}d\omega \\ &= \iint H(\omega_2)\tilde{a}(\omega_2-\omega_1)\tilde{P}^o(\omega_1)e^{i\omega_2 t}d\omega_1d\omega_2 \end{aligned} \quad (1.17a)$$

$$U^*(t) = \iint H^*(\omega_4)\tilde{a}^*(\omega_4-\omega_3)\tilde{P}^{o*}(\omega_3)e^{-i\omega_4 t}d\omega_3d\omega_4 \quad (1.17b)$$

以上两式乘积的期望值是

$$\begin{aligned} E[U(t)U^*(t)] &= \iiint E[\tilde{P}^o(\omega_1)\tilde{P}^{o*}(\omega_3)]H(\omega_2)H^*(\omega_4) \\ &\quad \cdot \tilde{a}(\omega_2-\omega_1)\tilde{a}^*(\omega_4-\omega_3)e^{i(\omega_2-\omega_4)t}d\omega_1d\omega_2d\omega_3d\omega_4 \\ &= \int S_P(\omega_1) \left[ \int H(\omega_2)\tilde{a}(\omega_2-\omega_1)e^{i\omega_2 t}d\omega_2 \right] \\ &\quad \cdot \left[ \int H^*(\omega_4)\tilde{a}^*(\omega_4-\omega_1)e^{-i\omega_4 t}d\omega_4 \right]d\omega_1 \end{aligned} \quad (1.18)$$

上式可以写成

$$\begin{aligned} E[U(t)U^*(t)] &= \int S_U(t,\omega)d\omega \\ &= \int |b(t,\omega)|^2 S_P(\omega)d\omega \end{aligned} \quad (1.19)$$

这里:

$$S_U(t,\omega) = |b(t,\omega)|^2 S_P(\omega) \quad (1.20a)$$

$$b(t,\omega) = \int H(\omega')\tilde{a}(\omega'-\omega)e^{i\omega' t}d\omega' \quad (1.20b)$$

对于实际问题,  $a(t)$ 或 $\tilde{a}(\omega)$ 都是已知的, 如果仅知 $a(t)$ , 可从下式求出 $\tilde{a}(\omega'-\omega)$ :

$$\tilde{a}(\omega'-\omega) = \frac{1}{2\pi} \int a(\tau)e^{-i(\omega'-\omega)\tau}d\tau \quad (1.21)$$

从(1.21)和(1.20b)式可以求得 $b(t,\omega)$ , 并从(1.20a)式求出反应谱密度 $S_U(t,\omega)$ , 从(1.19)式可以求出相关函数 $E[U(t)U^*(t)]$ . 从(1.17a,b)式出发模仿以上计算可以求得相关函数 $E[U(t_1)U^*(t_2)]$ 为:

$$\begin{aligned} R_U(t_1,t_2) &= E[U(t_1)U^*(t_2)] \\ &= \int [b(t_1,\omega)b^*(t_2,\omega)]S_P(\omega)d\omega \end{aligned} \quad (1.22)$$

再根据随机过程中的常用公式:

$$\begin{aligned} R_{U^{(n)}U^{(m)}}(t_1,t_2) &= E\left[\frac{d^n U(t_1)}{dt_1^n} \frac{d^m U(t_2)}{dt_2^m}\right] \\ &= \frac{\partial^{n+m} R_U(t_1,t_2)}{\partial t_1^n \partial t_2^m} \end{aligned} \quad (1.23)$$

即:

$$R_{U^{(n)}U^{(m)}}(t_1,t_2) = \int \frac{d^n b(t_1,\omega)}{dt_1^n} \cdot \frac{d^m b^*(t_2,\omega)}{dt_2^m} S_P(\omega)d\omega \quad (1.24)$$

可以求得各阶导数的相关函数.

从随机过程性质已知过程的 Gauss 性质在任意线性变换下保持不变, 这样, 如果激发  $P(t)$  是 Gauss 随机过程, 而且这个过程由它的平均值及均方值完全决定.

在实际问题的演算中, 例如进行 (1.19), (1.20 a, b), (1.21) 式的积分, 求解析解经常是很困难的, 必须采用数值积分.

如果时间函数  $a(\tau)=1$ , 则 (1.21), (1.20b) 式分别成为:

$$\bar{a}(\omega'-\omega)=\delta(\omega'-\omega) \quad (1.25a)$$

$$b(t, \omega)=H(\omega)e^{i\omega t} \quad (1.25b)$$

而且 (1.19), (1.22) 式分别成为

$$E[U(t)U^*(t)]=\int H(\omega)H^*(\omega)S_P(\omega)d\omega \quad (1.26a)$$

$$\begin{aligned} R_U(t_1, t_2) &= E[U(t_1)U^*(t_2)] \\ &= \int H(\omega)H^*(\omega)S_P(\omega)e^{i\omega(t_1-t_2)}d\omega \end{aligned} \quad (1.26b)$$

这是随机过程课程中的熟用公式.

## 二、多自由度情况

本节将第一节的结果推广到多自由度情况. 按照结构动力学谱分解的有限单元法, 在变位模型情况可将结构的基本方程写成:

$$\mathbf{K}(\omega)\tilde{\mathbf{U}}(\omega)=\tilde{\mathbf{P}}(\omega) \quad (2.1)$$

$\tilde{\mathbf{U}}(\omega)$  是结点变位列矩阵, 共有  $n$  个独立分量;  $\tilde{\mathbf{P}}(\omega)$  是折算的结点荷载矩阵, 也具有  $n$  个分量;  $\mathbf{K}(\omega)$  是通过有限单元离散化所得的  $n \times n$  动力刚度矩阵. 当  $\omega$  具有特殊数值时,

(2.1) 式可用类似于结构静力学的方法求解. 对 (2.1) 式求解得:

$$\tilde{\mathbf{U}}(\omega)=\mathbf{K}^{-1}(\omega)\tilde{\mathbf{P}}(\omega) \quad (2.2)$$

激励  $\tilde{\mathbf{P}}(\omega)$  假设是非平稳随机过程  $\mathbf{P}(t)$  的谱分量,  $\mathbf{P}(t)$  可以表示为:

$$\mathbf{P}(t)=\mathbf{a}(t)\mathbf{P}^o(t) \quad (2.3)$$

$\mathbf{a}(t)$  是已知函数,  $\mathbf{P}^o(t)$  是平稳随机矢量过程; 由此所得的解  $\mathbf{U}(t)$  也是非平稳随机过程. 根据有限单元法, 内力谱分量矢量  $\tilde{\mathbf{T}}(\omega)$  和  $\tilde{\mathbf{U}}(\omega)$  之间存在着内力——变位关系:

$$\tilde{\mathbf{T}}(\omega)=\mathbf{E}(\omega)\tilde{\mathbf{U}}(\omega) \quad (2.4)$$

由此可求得  $\tilde{\mathbf{T}}(\omega)$ . 由  $\tilde{\mathbf{U}}(\omega)$ ,  $\tilde{\mathbf{T}}(\omega)$  不难求得  $\mathbf{U}(t)$ ,  $\mathbf{T}(t)$  对时间导数的谱分量  $\tilde{\mathbf{U}}(\omega)$ ,  $\tilde{\mathbf{T}}(\omega)$ . 在工程振动问题中常常假定激励的平均值为零, 即设:

$$\left. \begin{aligned} E[\mathbf{P}(t)] &= 0, \quad E[\mathbf{P}^o(t)] = 0 \\ E[\tilde{\mathbf{P}}(\omega)] &= 0, \quad E[\tilde{\mathbf{P}}^o(\omega)] = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

在随机过程中最重要的统计数量是相关函数矩阵  $\mathbf{R}_P(t_1, t_2)$  和谱矩阵  $\mathbf{S}_P(t, \omega)$ , 具体写出矩阵的分量是:

$$\mathbf{R}_P(t_1, t_2) = \begin{bmatrix} R_{P(11)}(t_1, t_2) & R_{P(12)}(t_1, t_2) & \cdots & R_{P(1n)}(t_1, t_2) \\ R_{P(21)}(t_1, t_2) & R_{P(22)}(t_1, t_2) & \cdots & R_{P(2n)}(t_1, t_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_{P(m1)}(t_1, t_2) & R_{P(m2)}(t_1, t_2) & \cdots & R_{P(mn)}(t_1, t_2) \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

这里:

$$\mathbf{R}_P(t_1, t_2) = E[\mathbf{P}(t_1)\mathbf{P}'(t_2)] \quad (2.7)$$

上式中右上角附标  $t$  表示转置矩阵, 且有

$$\mathbf{S}_P(t, \omega) = \begin{pmatrix} S_{P(11)}(t, \omega) & S_{P(12)}(t, \omega) & \cdots & S_{P(1n)}(t, \omega) \\ S_{P(21)}(t, \omega) & S_{P(22)}(t, \omega) & \cdots & S_{P(2n)}(t, \omega) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_{P(n1)}(t, \omega) & S_{P(n2)}(t, \omega) & \cdots & S_{P(nn)}(t, \omega) \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

以上各矩阵间存在关系:

$$\mathbf{R}_P(t, t) = \int \mathbf{S}_P(t, \omega) d\omega \quad (2.9)$$

类似于单维情况的 (1.7) 式, 今有

$$E[\tilde{\mathbf{P}}^o(\omega)\tilde{\mathbf{P}}^{o*}(\omega')] = \mathbf{S}_P(\omega)\delta(\omega-\omega') \quad (2.10)$$

$\mathbf{S}_P(\omega)$  是  $\mathbf{P}^o(t)$  的互功率谱密度矩阵. 且与第一节类似, 今有:

$$\tilde{\mathbf{P}}(\omega) = \tilde{a}(\omega) * \tilde{\mathbf{P}}^o(\omega) \quad (2.11)$$

$$\mathbf{P}(t) = \iint \tilde{\mathbf{P}}^o(\omega_1)\tilde{a}(\omega_2-\omega_1)e^{i\omega_2 t} d\omega_1 d\omega_2 \quad (2.12a)$$

$$\mathbf{P}^{i*}(t) = \iint \tilde{\mathbf{P}}^{o*}(\omega_3)\tilde{a}(\omega_4-\omega_3)e^{-i\omega_4 t} d\omega_3 d\omega_4 \quad (2.12b)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_P(t, t) &= E[\mathbf{P}(t)\mathbf{P}^{i*}(t)] = E[\mathbf{P}(t)\mathbf{P}^{i*}(t)] \\ &= \iiint \iiint E[\tilde{\mathbf{P}}^o(\omega_1)\tilde{\mathbf{P}}^{o*}(\omega_3)]\tilde{a}(\omega_2-\omega_1)\tilde{a}^*(\omega_4-\omega_3) \\ &\quad \cdot e^{i(\omega_2-\omega_4)t} d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 d\omega_4 \\ &= \iiint \iiint \mathbf{S}_P(\omega_1)\delta(\omega_1-\omega_3)\tilde{a}(\omega_2-\omega_1)\tilde{a}^*(\omega_4-\omega_3) \\ &\quad \cdot e^{i(\omega_2-\omega_4)t} d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 d\omega_4 \\ &= \iiint \mathbf{S}_P(\omega_1)\tilde{a}(\omega_2-\omega_1)\tilde{a}^*(\omega_4-\omega_1)e^{i\omega_2 t} e^{-i\omega_4 t} d\omega_1 d\omega_2 d\omega_4 \\ &= \int \mathbf{S}_P(\omega)a(t, \omega)a^*(t, \omega) d\omega \end{aligned} \quad (2.13)$$

与 (1.10), (1.11) 式相同, 这里有

$$a(t, \omega) = \int \tilde{a}(\omega' - \omega)e^{i\omega' t} d\omega' = a(t)e^{i\omega t} \quad (2.14)$$

因为 
$$\mathbf{R}_P(t, t) = \int \mathbf{S}_P(t, \omega) d\omega \quad (2.15)$$

故有 
$$\mathbf{S}_P(t, \omega) = a^2(t)\mathbf{S}_P(\omega) \quad (2.16)$$

同样可以求出相关函数是

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_P(t_1, t_2) &= E[\mathbf{P}(t_1)\mathbf{P}^{i*}(t_2)] = \int \mathbf{S}_P(\omega)\tilde{a}(t_1, \omega)\tilde{a}^*(t_2, \omega) d\omega \\ &= a(t_1)a(t_2) \int \mathbf{S}_P(\omega)e^{i\omega(t_1-t_2)} d\omega \end{aligned} \quad (2.17)$$

一般可根据地震、风震或实验资料选取功率谱的形式. 在一些文献中, 为了便于计算, 将 (2.16) 式的  $\mathbf{S}_P(\omega)$  选为白噪声谱, 即  $S_{P(ij)}(\omega) = S_{P(ij)}$ , 与频率  $\omega$  无关.

以下求反应  $\mathbf{U}(t)$  的谱密度矩阵  $\mathbf{S}_U(t, \omega)$ . 将  $\mathbf{U}(t)$  进行谱分解, 考虑到 (2.2) 式可得:

$$\mathbf{U}(t) = \int \tilde{\mathbf{U}}(\omega)e^{i\omega t} d\omega = \int \mathbf{K}^{-1}(\omega)\tilde{\mathbf{P}}(\omega)e^{i\omega t} d\omega$$

$$= \iint K^{-1}(\omega_2) \tilde{a}(\omega_2 - \omega_1) \tilde{P}^o(\omega_1) e^{i\omega_2 t} d\omega_1 d\omega_2 \quad (2.18a)$$

$$U^{t*}(t) = \iiint \tilde{P}^{ot*}(\omega_3) \tilde{a}^*(\omega_4 - \omega_3) K^{-1t*}(\omega_4) e^{-i\omega_4 t} d\omega_3 d\omega_4 \quad (2.18b)$$

将以上两式相乘求期望值, 考虑到(2.10)式有:

$$\begin{aligned} R_U(t, t) &= E[U(t)U^{t*}(t)] \\ &= \iiint \iiint K^{-1}(\omega_2) \tilde{a}(\omega_2 - \omega_1) E[\tilde{P}^o(\omega_1) \tilde{P}^{ot*}(\omega_3)] \tilde{a}^*(\omega_4 - \omega_3) \\ &\quad \cdot K^{-1t*}(\omega_4) e^{i\omega_2 t} e^{-i\omega_4 t} d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 d\omega_4 \\ &= \iiint \iiint K^{-1}(\omega_2) \tilde{a}(\omega_2 - \omega_1) S_P(\omega_1) \delta(\omega_1 - \omega_3) \tilde{a}^*(\omega_4 - \omega_3) \\ &\quad \cdot K^{-1t*}(\omega_4) e^{i\omega_2 t} e^{-i\omega_4 t} d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 d\omega_4 \\ &= \iiint K^{-1}(\omega_2) \tilde{a}(\omega_2 - \omega_1) S_P(\omega_1) \tilde{a}^*(\omega_4 - \omega_1) \\ &\quad \cdot K^{-1t*}(\omega_4) e^{i\omega_2 t} e^{-i\omega_4 t} d\omega_1 d\omega_2 d\omega_4 \\ &= \iint [K^{-1}(\omega_2) \tilde{a}(\omega_2 - \omega_1) e^{i\omega_2 t} d\omega_2] S_P(\omega_1) \\ &\quad \cdot \iint [K^{-1t*}(\omega_4) \tilde{a}^*(\omega_4 - \omega_1) e^{-i\omega_4 t} d\omega_4] d\omega_1 \end{aligned} \quad (2.19)$$

可将(2.19)式表示为如下形式:

$$R_U(t, t) = \int \mathbf{b}(t, \omega) S_P(\omega) \mathbf{b}^{t*}(t, \omega) d\omega \quad (2.20)$$

这里:

$$\mathbf{b}(t, \omega) = \int K^{-1}(\omega') \tilde{a}(\omega' - \omega) e^{i\omega' t} d\omega' \quad (2.21)$$

因为又可将  $R_U(t, t)$  分解成功率谱形式:

$$R_U(t, t) = \int S_U(t, \omega) d\omega \quad (2.22)$$

将(2.22)式和(2.20)、(2.21)式进行比较可得:

$$S_U(t, \omega) = \mathbf{b}(t, \omega) S_P(\omega) \mathbf{b}^{t*}(t, \omega) \quad (2.23)$$

仿照第一节的方法可得:

$$\begin{aligned} R_U(t_1, t_2) &= E[U(t_1)U^t(t_2)] \\ &= \int \mathbf{b}(t_1, \omega) S_P(\omega) \mathbf{b}^{t*}(t_2, \omega) d\omega \end{aligned} \quad (2.24)$$

在结构振动分析中, 内力  $\mathbf{T}$  的相关系数更为重要. 从(2.4), (2.18a)式得:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(t) &= \int \tilde{\Gamma}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ &= \iint \mathbf{E}(\omega_2) K^{-1}(\omega_2) \tilde{a}(\omega_2 - \omega_1) \tilde{P}^o(\omega_1) e^{i\omega_2 t} d\omega_1 d\omega_2 \end{aligned} \quad (2.25)$$

代替(2.24)式有:

$$R_T(t_1, t_2) = \int \mathbf{c}(t_1, \omega) S_P(\omega) \mathbf{c}^{t*}(t_2, \omega) d\omega \quad (2.26a)$$

这里:

$$\mathbf{c}(t, \omega) = \int \mathbf{E}(\omega') K^{-1}(\omega') \tilde{a}(\omega' - \omega) e^{i\omega' t} d\omega' \quad (2.26b)$$

同样可得对于内力速度  $\dot{\mathbf{T}}$  有:

$$\dot{\mathbf{T}}(t) = \iint i\omega_2 \mathbf{E}(\omega_2) \mathbf{K}^{-1}(\omega_2) \hat{q}(\omega_2 - \omega_1) \tilde{\mathbf{F}}^o(\omega_1) e^{i\omega_2 t} d\omega_1 d\omega_2 \quad (2.27)$$

$$\mathbf{R}_{\dot{\mathbf{T}}}(t_1, t_2) = \int \mathbf{d}(t_1, \omega) \mathbf{S}_F(\omega) \mathbf{d}^{t*}(t_2, \omega) d\omega \quad (2.28a)$$

$$\mathbf{d}(t, \omega) = \int i\omega' \mathbf{E}(\omega') \mathbf{K}^{-1}(\omega') \hat{q}(\omega' - \omega) e^{i\omega' t} d\omega' \quad (2.28b)$$

$\mathbf{T}$  和  $\dot{\mathbf{T}}$  的相关系数是

$$\mathbf{R}_{\mathbf{T}\dot{\mathbf{T}}}(t_1, t_2) = \int \mathbf{c}(t_1, \omega) \mathbf{S}_F(\omega) \mathbf{d}^{t*}(t_2, \omega) d\omega \quad (2.29)$$

由于:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{T}}(t, t) = \int \mathbf{S}_{\mathbf{T}}(t, \omega) d\omega \quad (2.30a)$$

可得:

$$\mathbf{S}_{\mathbf{T}}(t, \omega) = \mathbf{c}(t, \omega) \mathbf{S}_F(\omega) \mathbf{c}^{t*}(t, \omega) \quad (2.30b)$$

且有

$$\mathbf{R}_{\dot{\mathbf{T}}}(t, t) = \int \mathbf{S}_{\dot{\mathbf{T}}}(t, \omega) d\omega \quad (2.31a)$$

$$\mathbf{S}_{\dot{\mathbf{T}}}(t, \omega) = \mathbf{d}(t, \omega) \mathbf{S}_F(\omega) \mathbf{d}^{t*}(t, \omega) \quad (2.31b)$$

$$\mathbf{R}_{\mathbf{T}\dot{\mathbf{T}}}(t, t) = \int \mathbf{S}_{\mathbf{T}\dot{\mathbf{T}}}(t, \omega) d\omega \quad (2.32a)$$

$$\mathbf{S}_{\mathbf{T}\dot{\mathbf{T}}}(t, \omega) = \mathbf{c}(t, \omega) \mathbf{S}_F(\omega) \mathbf{d}^{t*}(t, \omega) \quad (2.32b)$$

当变化函数  $a(t)$  与  $e^{i\omega t}$  相比是缓变函数时有如下近似关系:

$$\mathbf{S}_{\dot{\mathbf{T}}}(t, \omega) = \omega^2 \mathbf{S}_{\mathbf{T}}(t, \omega) \quad (2.33)$$

$$\mathbf{S}_{\mathbf{T}\dot{\mathbf{T}}}(t, \omega) = -i\omega \mathbf{S}_{\mathbf{T}}(t, \omega) \quad (2.34)$$

对于平稳过程情况, 即设有  $a(t) = 1$ , 这时有:

$$\mathbf{b}(t, \omega) = \mathbf{K}^{-1}(\omega) e^{i\omega t} \quad (2.35a)$$

$$\mathbf{c}(t, \omega) = \mathbf{E}(\omega) \mathbf{K}^{-1}(\omega) e^{i\omega t} \quad (2.35b)$$

$$\mathbf{d}(t, \omega) = i\omega \mathbf{E}(\omega) \mathbf{K}^{-1}(\omega) e^{i\omega t} \quad (2.35c)$$

$$\mathbf{S}_{\mathbf{U}}(t, \omega) = \mathbf{S}_{\mathbf{U}}(\omega) = \mathbf{K}^{-1}(\omega) \mathbf{S}_F(\omega) \mathbf{K}^{-1t*}(\omega) \quad (2.36)$$

$$\mathbf{S}_{\mathbf{T}}(t, \omega) = \mathbf{S}_{\mathbf{T}}(\omega) = \mathbf{E}(\omega) \mathbf{K}^{-1}(\omega) \mathbf{S}_F(\omega) \mathbf{K}^{-1t*}(\omega) \mathbf{E}^{t*}(\omega) \quad (2.37)$$

$$\mathbf{S}_{\dot{\mathbf{T}}}(t, \omega) = \mathbf{S}_{\dot{\mathbf{T}}}(\omega) = \omega^2 \mathbf{S}_{\mathbf{T}}(\omega) \quad (2.38)$$

$$\mathbf{S}_{\mathbf{T}\dot{\mathbf{T}}}(t, \omega) = \mathbf{S}_{\mathbf{T}\dot{\mathbf{T}}}(\omega) = -i\omega \mathbf{S}_{\mathbf{T}}(\omega) \quad (2.39)$$

在结构分析中比较重要的是  $\mathbf{S}_{\mathbf{T}}(t, \omega)$  和  $\mathbf{S}_{\dot{\mathbf{T}}}(t, \omega)$  的对角元素, 写为  $S_{\mathbf{T}(hh)}(t, \omega)$  和  $S_{\dot{\mathbf{T}}(hh)}(t, \omega)$ :

$$S_{\mathbf{T}(hh)}(t, \omega) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{(hi)}(t, \omega) S_{P(ij)}(\omega) c_{(jh)}^{t*}(t, \omega) \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} S_{\dot{\mathbf{T}}(hh)}(t, \omega) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{(hi)}(t, \omega) S_{P(ij)}(\omega) d_{(jh)}^{t*}(t, \omega) \\ &\approx \omega^2 S_{\mathbf{T}(hh)}(t, \omega) \end{aligned} \quad (2.41)$$

由此可得:

$$R_{T(hh)}(t, t) = \int S_{T(hh)}(t, \omega) d\omega \quad (2.42)$$

$$R_{\dot{T}(hh)}(t, t) = \int \dot{S}_{T(hh)}(t, \omega) d\omega \quad (2.43)$$

### 三、计算方法和安全度分析

在实际问题中首先要决定激励  $P(t)$  的谱函数  $S_P(\omega)$  和时间函数  $a(t)$ ，一般，这些函数要根据常期观测资料或试验资料用统计方法求得。问题的求解常需用数值方法，为此  $S_P(\omega)$  的形式应尽量选取得简单些，可使  $S_P(\omega)$  的元素限于一定的  $\omega$  范围内，这样可使积分在有限区间内进行。例如对于其中一元素  $S_{P(ij)}(\omega)$ ，首先选择  $\omega$  的最大值  $\omega_m$ ，在  $|\omega| \leq \omega_m$  范围中有

$$S_{P(ij)}(\omega) = a_{ij}(\omega) + ib_{ij}(\omega) \quad (3.1)$$

在其它范围内  $S_{P(ij)}(\omega) = 0$ ，为简单计，常使  $a_{ij}(\omega)$ ， $b_{ij}(\omega)$  为常数，所述功率谱如图 1 所示，图 2 表示另一种形式。

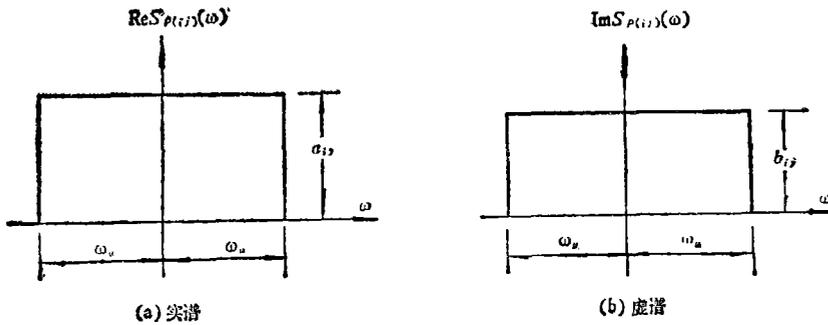


图 1

从(1.21)式可见，当  $a(t) = 1$  时， $\bar{a}(\omega) = \delta(\omega)$ ；当  $a(t) = \delta(t)$  时， $\bar{a}(\omega) = \frac{1}{2\pi}$  是一个常数。真正的  $\bar{a}(\omega)$  介于两者之间。根据原始资料可以先统计  $a(t)$  的形式，用 Fourier 反变换求出  $\bar{a}(\omega)$ ，也可以先定出  $\bar{a}(\omega)$  的形式。如果振动的时间发生在  $-T$  到  $T$  之间，则为简单计，可以将  $\bar{a}(\omega)$  近似地表示为图 3 的形状。

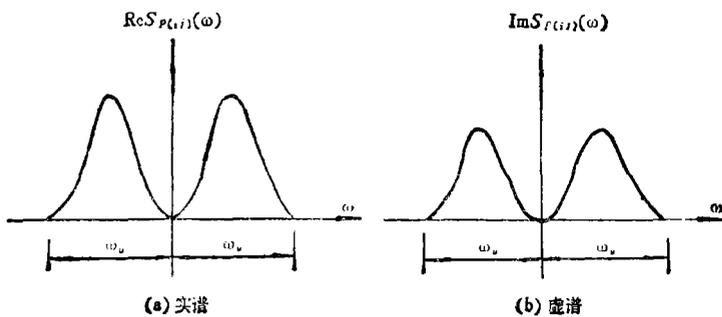


图 2

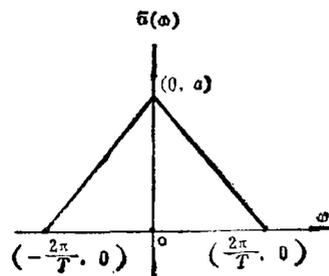


图 3

对结构动力学问题，首先用有限单元法求出  $E(\omega)$ ， $K(\omega)$  的形式，当  $\omega$  具有确定数值时，它们是具有常数元素的矩阵。根据(2.26b)式可用数值积分法求出对于各组  $t$ ， $\omega$  值的  $c(t, \omega)$ ，

再从(2.30a, b)可以求出 $S_T(t, \omega)$ ,  $R_T(t, t)$ , 同样可以求出 $S_t(t, \omega)$ 和 $R_t(t, \omega)$ . 当 $\tilde{a}(\omega)$ 的形式如图3表示时, 在(2.26b)式中代以 $\omega' - \omega = \omega''$ , 经过适当演算可得:

$$c(t, \omega) = e^{i\omega t} \int_{-2\pi/T}^{2\pi/T} E(\omega'' + \omega) K^{-1}(\omega'' + \omega) \tilde{a}(\omega'') e^{i\omega'' t} d\omega'' \quad (3.2)$$

在 $t=0$ 时振幅最大, 也较重要, 这时,

$$c(0, \omega) = \int_{-2\pi/T}^{2\pi/T} E(\omega'' + \omega) K^{-1}(\omega'' + \omega) \tilde{a}(\omega'') d\omega'' \quad (3.3)$$

当相关函数 $R_{T(n)}(t, t)$ 和 $R_t(n)(t, t)$ 业已求得后可按如下方法求结构的安全度<sup>[2]</sup>.

今设 $\lambda_{(nn)}$ 是第 $n$ 个构件核定的内力强度,  $\nu_{1(n)}^+(t)$ 是在 $t$ 时刻第 $n$ 构件内力从正方向穿越 $\lambda_{(nn)}$ 的单位时间次数, 今有:

$$\nu_{1(n)}^+(t) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{R_{T(n)}^+(t, t)}{R_{T(n)}(t, t)}} \exp\left\{-\frac{\lambda_{(nn)}^2}{2R_{T(n)}(t, t)}\right\} \quad (3.4)$$

则第 $n$ 构件内力在范围 $(\lambda, -\lambda)$ 中的可靠程度是:

$$P_{(nn)}(\lambda, -\lambda) = \exp\left[-2 \int_{-T}^T \nu_{1(n)}^+(t) dt\right] \quad (3.5)$$

在上式中的积限 $-T$ 到 $T$ 是激励发生的时间.

以上提出了非平稳过程的通用解法, 在多自由度情况求解时数值计算很繁复, 但可结合有限单元法排出程序用电子计算机求解.

### 附录A. 非平稳谱的简单算例

为了将非平稳随机过程的谱和平稳过程的谱进行比较, 今作如下算例. 从(1.20a)式可见, 在平稳情况的 $|H(\omega)|^2$ , 在非平稳情况中将 $|b(t, \omega)|^2$ 代替, 下面就单自由度情况比较 $|b(t, \omega)|^2$ 和 $|H(\omega)|^2$ 的关系. 在单自由度情况,  $H(\omega)$ 一般表示为:

$$H(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\beta\omega_0\omega} \quad (A-1)$$

今设 $\tilde{a}(\omega)$ 形状如图3, 且使 $\tilde{a}(\omega)$ 的面积归一化为1, 则有

$$a = \frac{T}{2\pi} \quad (A-2)$$

前文已知,

$$\begin{aligned} b(t, \omega) &= e^{i\omega t} \int_{-2\pi/T}^{2\pi/T} H(\omega'' + \omega) \tilde{a}(\omega'') e^{i\omega'' t} d\omega'' \\ &= a e^{-i\omega t} \int_{-2\pi/T}^{2\pi/T} H(\omega'' + \omega) \left(1 - \frac{\omega}{2\pi/T}\right) e^{i\omega'' t} d\omega'' \end{aligned} \quad (A-3)$$

这里,

$$H(\omega) = \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\beta\omega_0\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega_0^2\omega^2} \quad (A-4)$$

将 $\tilde{a}(\omega)$ 面积对 $\omega$ 分成 $2n$ 等分, 采用 Filton 积分法<sup>[3]</sup>. 今用下数值例题来说明.  $\frac{2\pi}{T} = 0.2$ , (A-3)式的积限是 $-0.2$ 到 $0.2$ ,  $\omega_0 = 4$ ,  $\beta = 0.025$ ,

$$H(\omega) = \frac{(16 - \omega^2) - 0.2i\omega}{(16 - \omega^2)^2 + 0.04\omega^2}$$

积分时将 $(-0.2, 0.2)$ 分成4等分, 即 $n=2$ , 按照 Filton 积分法可得公式,

$$\begin{aligned} e^{-i\omega t} b(t, \omega) &= ah \left[ H(\omega) \cdot \beta + \frac{\gamma}{2} H(\omega - 0.1) e^{-i\omega t} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\gamma}{2} H(\omega + 0.1) e^{i\omega t} \right] \end{aligned} \quad (A-5)$$

$a = \frac{T}{2\pi} = 5$ ,  $h$  是积分时分段长度,  $h = 0.1$ ,  $\beta$  和  $\gamma$  的计算式见 [3].

$$\left. \begin{aligned} \beta &= 2\theta^{-3}[\theta(1 + \cos^2\theta) - 2 \sin\theta \cos\theta] \\ \gamma &= 4\theta^{-3}(\sin\theta - \theta \cos\theta) \\ \theta &= ht = 0.1t \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-6})$$

略去一些具体计算, 将结果列如下表.

表 A-1.  $|H(\omega)|^2$  和  $|b(t, \omega)|^2$  计算表

| $\omega$ | $ H(\omega) ^2$ | $ b(0, \omega) ^2$ | $ b(15, \omega) ^2$ | $ b(30, \omega) ^2$ |
|----------|-----------------|--------------------|---------------------|---------------------|
| 3.5      | 0.0689          | 0.0718             | 0.0156              | 0.000057            |
| 3.6      | 0.1020          | 0.1095             | 0.0250              | 0.000294            |
| 3.7      | 0.1700          | 0.1877             | 0.0491              | 0.001359            |
| 3.8      | 0.3321          | 0.3811             | 0.1575              | 0.001147            |
| 3.9      | 0.8114          | 0.6559             | 0.4602              | 0.011263            |
| 4.0      | 1.5625          | 0.6946             | 0.7379              | 0.027428            |
| 4.1      | 0.7527          | 0.6295             | 0.4346              | 0.010752            |
| 4.2      | 0.2946          | 0.3427             | 0.1200              | 0.001079            |
| 4.3      | 0.1441          | 0.1614             | 0.0442              | 0.000131            |
| 4.4      | 0.0829          | 0.0893             | 0.0207              | 0.0000261           |
| 4.5      | 0.0530          | 0.0558             | 0.0122              | 0.0000073           |

将表列数值进行比较, 初步可有如下结论. 当  $t=0$  时,  $|b(0, \omega)|^2$  和  $|H(\omega)|^2$  在数量级上大致相等,  $|b(0, \omega)|^2$  曲线有将  $|H(\omega)|^2$  拉平的趋势, 在离开  $\omega_0$  点较远处的  $\omega$  值,  $|b(0, \omega)|^2$  和  $|H(\omega)|^2$  的值大致相等. 当  $t$  增大时  $|b(t, \omega)|^2$  有迅速下降的趋势, 个别点如  $|b(15, 4)|^2 > |b(0, 4)|^2$ , 这是因为非平稳谱存在着震荡性质, 但是当  $t$  再增大时,  $|b(t, \omega)|^2 \rightarrow 0$ .

### 参 考 文 献

- 1 复旦大学主编, 《概率论与数理统计》, (第二版), 上海科技出版社, (1961).
- 2 星谷勝, 《确率论手法による振動分析》, 地震出版社常宝琦译本.
- 3 河田龙夫, 《Fourier 变换と Laplace 变换》, 岩波书店, 钱端壮译本, 上海科技出版社, (1961).

## Nonstationary Random Vibration Analysis of Linear Elastic Structures with Finite Element Method

Jin Wen-lu

(Hangzhou Design Institute, Hangzhou)

### Abstract

At present, the finite element method is an efficient method for analyzing structural dynamic problems. When the physical quantities, such as displacements, stresses, are resolved in spectra and the dynamic matrices are obtained in spectral resolving form, the relative equations cannot be solved by the vibration mode resolving method as usual. For solving such problems a general method is put forward in this paper. The excitations considered with respect to nonstationary processes are as follows:  $\mathbf{P}(t) = \{P_i(t)\}$ ,  $P_i(t) = a_i(t)P_i^0(t)$ ,  $a_i(t)$  is a time function already known. We make Fourier transformation for the discretized equations obtained by finite element method, and by utilizing the behaviour of orthogonal increment of spectral quantities in random process, some formulas of relations about the spectra of excitation and response are derived. The cross power spectral density matrices of responses can be found by these formulas, then the structural safety analysis can be made. When  $a_i(t) = 1$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), the method stated in this paper will reduce to that which is concerned in the special case of stationary process.