

# 在材料非线性问题中的摄动有限元法\*

谢志成 王瑞五 杨学忠 钱振东

(清华大学, 1982年1月10日收到)

## 摘 要

摄动法是解决非线性连续介质力学问题的一种有效方法。这种方法是建立在该问题的线性解析解的基础上的, 因此, 若得不到一个简单的解析解, 应用这种方法去解决一些复杂的非线性问题将遇到困难。有限元法对解非线性问题也是一种十分有用的工具, 然而一般来说, 它需要相当长的计算时间。

本文介绍摄动有限元法。这种方法吸取上述两种方法的优点, 能够解决更复杂的非线性问题, 而且也能大量节省计算机的计算时间。

本文讨论了比例加载下的弹塑性力学问题, 并提出一个带孔拉板的数值解。

## 一、引 言

建立在线性解基础上的摄动法是解决非线性连续介质力学问题的一种比较有效的方法。然而, 由于问题的边界条件比较复杂, 人们往往得不到一个简单的解析线性解, 因此摄动法的应用受到一定的限制。自有限元出现和发展后, 大量复杂的非线性问题更多地依赖这种方法的数值分析。然而这种方法往往需要大量的计算时间, 也常常会出现迭代计算过程中不收敛的现象。把摄动法和有限元法联合起来, 吸取这两种方法的优点, 成为一种新的方法, 将会更顺利地解决更复杂的非线性问题。

关于摄动有限元法的讨论, 目前在国内外文献中尚不多见。1968年Thompson和Walker最早提出离散结构的摄动分析的概念<sup>[1]</sup>, 并以此计算了一个梁的大挠度问题。1974年Gallagher也曾引用此概念分析了在载荷增量下的几何非线性问题以及临界点的计算问题<sup>[2]</sup>。1976年日本学者Yokoo, Nakamura, Uetani曾以增量摄动法解决弹塑性结构的大变形问题<sup>[3]</sup>。这种增量法实质上是把过去在有限元法中所引用的分段线性加载方法改为非线性加载。一般认为, 在线性基础上的摄动理论, 只能应用于偏离线性不大的非线性问题。而在载荷增加的过程中, 只要增量是足够微小, 都可以认为问题的非线性是不大的。因此, Gallagher及Yokoo等引用增量摄动法求解是成功的。这种增量摄动法对研究非比例加载的弹塑性问题 and 稳定性问题看来是必要的, 但这种方法还不能节省大量的计算时间。

本文联合摄动法和有限元法, 即在变分法中引入摄动过程, 并用有限元法求解变分摄动方程, 解决了弹塑性全量理论中应力应变分析问题。由于引入应力-应变幂级数, 使摄动法扩大到偏离线性规律较大的非线性问题中。用这种方法可以大大缩短计算时间, 也不会出现迭代计算不收敛的现象。

\* 钱伟长推荐。

本文导出弹塑性平面应力问题的摄动有限元法的全部公式，具体计算了带孔拉板的弹塑性应力。计算结果与实验结果比较，两者符合很好。

## 二、变分法中的摄动过程

### 1. 弹塑性全量理论的基本方程

对弹塑性的受力物体（图1）以 $\bar{x}_i$ 表示物体上任一点 $A$ 的笛卡尔坐标， $u_i$ 表示该点的位移分量。引入无量纲量：

$$x_i = \bar{x}_i / L$$

$$u_i = \bar{u}_i / L$$

其中 $L$ 为物体的一个特征尺寸。于是无量纲的应变分量将表示为

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.1)$$

它是一个小变形理论公式。物体上一点的应变偏量和应变强度分别为

$$e'_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon \delta_{ij} \quad (2.2)$$

$$\Gamma = \sqrt{e'_{ij} e'_{ij}} \quad (2.3)$$

其中 $e$ 为单位体积改变，即

$$e = \frac{1}{3} \varepsilon_{ii} \quad (2.4)$$

$\delta_{ij}$ 为Kronecker符号，

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

设物体上任一点的应力为 $\bar{\sigma}_{ij}$ ，其应力偏量

$$\bar{\sigma}'_{ij} = \bar{\sigma}_{ij} - \bar{\sigma} \delta_{ij}$$

式中 $\bar{\sigma}$ 为平均应力，即

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{3} \bar{\sigma}_{ii}$$

根据塑性理论，一般认为物体的体积改变是弹性的，即

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma} &= 3K e \\ 3K &= \frac{E}{1-2\nu} \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

其中 $E$ 为材料的弹性模量； $\nu$ 为波桑系数。引入无量纲量后，得

$$\sigma_{ij} = \bar{\sigma}'_{ij} / 3K \quad (2.6)$$

$$\sigma = \frac{1}{3} \sigma_{ii} \quad (2.7)$$

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij} \quad (2.8)$$

$$\sigma = e \quad (2.9)$$

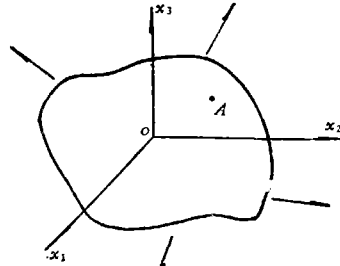


图 1

物体任一点的应力强度用  $\bar{S}$  表示。引入无量纲量  $S = \bar{S}/3K$ , 得

$$S = \sqrt{\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}} \quad (2.10)$$

弹性全量理论的应力-应变关系可表为

$$\sigma'_{ij} = \frac{S}{\Gamma} \varepsilon_{ij} = \mu \varepsilon_{ij} \quad (2.11)$$

其中  $\mu$  是应变状态的函数。

设  $\bar{F}_i$  表示物体边界力,  $\bar{\Omega}$  表示边界面,  $\bar{\Omega}_\sigma$  表示受力的边界面面积,  $\bar{V}$  表示物体的体积, 则最小位能原理为

$$\delta \Pi = \int_{\bar{V}} \bar{\sigma}_{ij} \delta \bar{\varepsilon}_{ij} d\bar{V} - \int_{\bar{\Omega}_\sigma} \bar{F}_i \delta \bar{u}_i d\bar{\Omega} = 0$$

令  $F_i = \bar{F}_i/3K$ ,  $V = \bar{V}/L^3$ ,  $\Omega = \bar{\Omega}/L^2$ , 得

$$\delta \left( \frac{\Pi}{3KL^3} \right) = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV - \int_{\Omega_\sigma} F_i \delta u_i d\Omega = 0 \quad (2.12)$$

## 2. 应力强度和应变强度的关系

关于弹塑性物体的应力强度和应变强度关系, Trifan 于 1948 年曾建议用幂级数的形式<sup>[4]</sup>。古国纪、顾求林等也曾应用这规律解决过一些弹塑性问题<sup>[5][6]</sup>。在摄动有限元法中, 我们也采用这种幂级数的形式, 使得摄动法能在大偏离线性的弹塑性问题中应用。

对拉压性能相同的材料, 我们设

$$\left. \begin{aligned} S &= A_1 \Gamma + A_3 \Gamma^3 + A_5 \Gamma^5 + \dots \\ \mu &= \frac{S}{\Gamma} = A_1 + A_3 \Gamma^2 + A_5 \Gamma^4 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

上面第一式只有奇次幂项; 当我们保留级数的偶次幂项时, 级数将可以描写拉压性能不同的材料特性。

确定  $A_i$  要依赖材料的拉伸压缩试验的结果。在单向应力状态下,

$$\sigma_{11} = \sigma_{11}^0, \quad \sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$$

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}^0, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\nu^* \varepsilon_{11}$$

其中  $\nu^*$  表示弹塑性范围内的波桑比。于是,

$$\sigma = \frac{1}{3} \sigma_{11}^0, \quad \varepsilon = \frac{1}{3} (1 - 2\nu^*) \varepsilon_{11}^0$$

又因  $\sigma = \varepsilon$ , 故

$$\nu^* = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\sigma_{11}^0}{\varepsilon_{11}^0} \right) \quad (2.14)$$

单向应力状态下应力强度和应变强度为

$$\left. \begin{aligned} S &= \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_{11}^0, \quad \Gamma = \sqrt{\frac{2}{3}} (1 + \nu^*) \varepsilon_{11}^0 \\ \mu &= \frac{S}{\Gamma} = \frac{2\sigma_{11}^0/\varepsilon_{11}^0}{3 - \sigma_{11}^0/\varepsilon_{11}^0} \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

当拉伸实验曲线作出后, 我们将得出 (2.13) 式左边的实验值。以这些实验值为根据, 引用数值计算方法, 求得  $A_i$  的值。(2.15) 式的关系适用于塑性和弹性的范围。当材料在弹性范围内时,

$$\frac{S^{(e)}}{\Gamma^{(e)}} = \frac{1-2\nu}{1+\nu} \quad (2.16)$$

故

$$A_1 = \frac{1-2\nu}{1+\nu}$$

### 3. 摄动过程

在摄动法中, 首先要选择一个摄动参数, 并将所有的物理量展开为该参数的幂级数形式。在这里, 我们选物体上某一点 ( $M_0$ ) 的应变强度  $e_0$  为摄动参数,

$$e_0 = \sqrt{e'_{ij} e'_{ij}} \quad (M_0 \text{点外}) \quad (2.17)$$

将位移分量  $u_i$  展开为  $e_0$  的幂级数后, 得

$$u_i = \sum_{k=1}^{\infty} u_i^{(k)} e_0^k \quad (2.18)$$

其中  $u_i^{(k)}$  称为位移  $k$  级的摄动系数。按(2.1)、(2.2)、(2.4)式, 将得出应变及应变偏量的展开式:

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_{ij}^{(k)} e_0^k \quad (2.19)$$

$$e'_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} e'_{ij}^{(k)} e_0^k \quad (2.20)$$

其中  $e'_{ij}^{(k)}$  及  $\varepsilon_{ij}^{(k)}$  都是相应的  $k$  级摄动系数, 它们为

$$\varepsilon_{ij}^{(k)} = \frac{1}{2} (u'_{ij} + u'_{ji}) \quad (2.21)$$

$$\left. \begin{aligned} e'_{ij}^{(k)} &= \varepsilon_{ij}^{(k)} - e^{(k)} \\ e^{(k)} &= \frac{1}{3} \varepsilon_{ii}^{(k)} \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

将(2.20)代入(2.3)式, 得应变强度的展开式:

$$\Gamma^2 = \sum_{n=2}^{\infty} A_2^{(n)} e_0^n \quad (2.23)$$

其中 
$$A_2^{(m)} = \sum_{k=1}^{m-1} \varepsilon_{ij}^{(k)} \varepsilon_{ij}^{(m-k)} \quad (m \geq 2) \quad (2.24)$$

(2.13) 式中  $\Gamma$  各次幂可表示为

$$\Gamma^n = \sum_{m=n}^{\infty} A_n^{(m)} e_0^m \quad (n=2, 4, 6, \dots) \quad (2.25)$$

其中

$$A_n^{(m)} = \sum_{k=n-2}^{m-2} A_{n-2}^{(k)} A_2^{(m-k)} \quad (n=4, 6, \dots) \quad (2.26)$$

将(2.23)及(2.25)代入(2.13)式, 即得

$$\mu = \frac{S}{I} = \mu^{(0)} + \mu^{(1)} e_0 + \mu^{(2)} e_0^2 + \dots \quad (2.27)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \mu^{(0)} &= A_1, \quad \mu^{(1)} = 0 \\ \mu^{(m-1)} &= \sum_{k=2,4,6}^{m-2} A_{k+1} A_k^{(m-1)} \quad (m-1 > 2) \\ \mu^{(m)} &= \sum_{k=2,4,6}^m A_{k+1} A_k^{(m)} \quad (m \geq 2) \end{aligned} \right\} (m=2,4,6,\dots) \quad (2.28)$$

将(2.27)式代入(2.11)式, 再引用(2.8)式, 将求得物体上各点的应力展开式:

$$\sigma_{ij} = \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_{ij}^{(m)} e_0^m \quad (2.29)$$

其中  $\sigma_{ij}^{(m)}$  称为  $m$  阶的应力摄动系数, 它的一般形式为:

$$\sigma_{ij}^{(m)} = \sum_{k=1}^m (\mu^{(k-1)} e_{ij}^{(m-k+1)}) + e^{(m)} \delta_{ij} \quad (m \geq 1) \quad (2.30)$$

为了进行摄动计算, 必需要将外力  $F_i$  展开为  $e_0$  的级数。设

$$F_i = F_{i0} \sum_{k=1}^{\infty} F^{(k)} e_0^k \quad (2.31)$$

式中  $F_{i0}$  表示外力分量在边界面上的分布规律, 它是外力作用位置的函数, 但与外力大小无关。  $F^{(k)}$  称为各级载荷的摄动系数, 外力的大小是由它来确定的。

将(2.31)、(2.29)、(2.17)、(2.18)式代入(2.12)式, 并假设  $\delta u_i^{(n)}$  不为零而其余的各级位移系数的变分量为零, 将得出:

$$\int_V (\sigma_{ij}^{(1)} e_0 + \sigma_{ij}^{(2)} e_0^2 + \dots + \sigma_{ij}^{(m)} e_0^m + \dots) \delta e_{ij}^{(n)} e_0^n dV - \int_{\Omega_0} (F^{(1)} e_0 + F^{(2)} e_0^2 + \dots + F^{(m)} e_0^m + \dots) e_0^n (F_{i0} \delta u_i^{(n)}) d\Omega = 0$$

归并相同  $e_0$  幂次项, 将得出下列各级的摄动方程式:

$$\int_V \sigma_{ij}^{(m)} \delta e_{ij}^{(n)} dV - F^{(m)} \int_{\Omega_0} F_{i0} \delta u_i^{(n)} d\Omega = 0 \quad (2.32)$$

由于  $\delta e_{ij}^{(n)}$  与  $\delta u_i^{(n)}$  的关系不随  $n$  值变化而改变, 因此,  $n$  可取任何值将得出相同的摄动方程。

### 三、弹塑性平面应力问题

在平面应力问题中, 由于  $\sigma_{33} = 0$ , 并且材料的体积改变恒满足弹性关系, 于是

$$\sigma_{33} = -\sigma = -\varepsilon$$

又因为

$$\sigma_{33} = \frac{S}{I} (e_{33} - \varepsilon)$$

$$\text{故} \quad \varepsilon_{33} = \varepsilon \left( 1 + \frac{\Gamma}{S} \right) = (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \frac{\frac{S}{\Gamma} - 1}{2\frac{S}{\Gamma} + 1} \quad (3.1)$$

将(2.13)式代入后得

$$\varepsilon_{33} = (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) (A_1^* + A_3^* \Gamma^2 + A_6^* \Gamma^4 + \dots) \quad (3.2)$$

其中  $A_s^*$  均可以由  $A_s$  求出, 它们是一些已知的材料常数. 当物体的变形是完全弹性变形时,

$\left( \frac{S}{\Gamma} = \frac{1-2\nu}{1+\nu} \right)$ , 显然有

$$A_1^* = -\frac{\nu}{1-\nu}$$

将(2.23)(2.25)式代入(3.2), 得

$$\varepsilon_{33} = (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) (E_0 + E_2 e_0^2 + E_4 e_0^4 + \dots) \quad (3.3)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} E_0 &= A_1^*, & E_1 &= 0 \\ E_k &= \sum_{s=2,4,6}^k A_{s+1}^* A_s^{(k)} \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

将(2.19)式代入(3.3)式两边, 并归并相同的  $e_0$  幂次项后, 得

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{33}^{(1)} &= E_0 \tilde{\varepsilon}^{(1)}, & \varepsilon_{33}^{(2)} &= E_0 \tilde{\varepsilon}^{(2)} \\ \varepsilon_{33}^{(m)} &= E_0 \tilde{\varepsilon}^{(m)} + \left( \sum_{k=2}^{m-1} E_k \tilde{\varepsilon}^{(m-k)} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

其中  $\tilde{\varepsilon}^{(m)} = \varepsilon_{11}^{(m)} + \varepsilon_{22}^{(m)}$ . 由上式看出, 括号中的项均是  $m$  次摄动前已经求得 的值;  $m$  级系数  $\varepsilon_{33}^{(m)}$  都是可以用  $\varepsilon_{11}^{(m)}, \varepsilon_{22}^{(m)}$  来表示的. 于是, 体积改变系数(2.22)式将为

$$\varepsilon^{(m)} = \frac{1+E_0}{3} \tilde{\varepsilon}^{(m)} + \frac{1}{3} \sum_{k=2}^{m-1} E_k \tilde{\varepsilon}^{(m-k)} \quad (3.6)$$

以上求得了平面应力问题中应变  $\varepsilon_{33}$  及体积改变  $\varepsilon$  的各级摄动系数, 又因为  $\varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}$  均等于零, 故它们的各级摄动系数恒等于零, 于是我们将得到全部应变偏量以及相应的应力分量的展开式(2.20), (2.30).

#### 四、有限元法的应用

利用有限元法的概念求解(2.32)式的变分方程, 将得出各级摄动系数的数值结果. 由于有限元法可以处理复杂的边界问题, 因此将大大地扩展了摄动法的应用范围. 下面以平面应力问题为例, 说明有限元法的应用.

设将平面问题分为若干个微小单元, 单元内的位移  $m$  阶摄动系数用结点位移的同阶摄动系数和形函数  $L_i$  等表示, 即

$$\left. \begin{aligned} u^{(m)} &= u_i^{(m)} L_i + u_j^{(m)} L_j + u_k^{(m)} L_k \\ v^{(m)} &= v_i^{(m)} L_i + v_j^{(m)} L_j + v_k^{(m)} L_k \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

其中  $L_i, L_j, L_k$  为三角形的面积坐标,

$$\begin{aligned} L_i &= \frac{1}{2\Delta} (a_i + b_i x + c_i y) \\ a_i &= x_j y_k - x_k y_j, \quad b_i = y_j - y_k, \\ c_i &= -x_j + x_k \end{aligned}$$

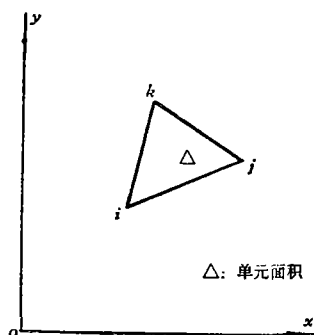
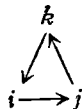


图 2

设  $m$  阶应变摄动系数  $e_{ij}^{(m)}$  用矩阵形式表示

$$\{e_{ij}^{(m)}\} = \{e_{i1}^{(m)}, e_{i2}^{(m)}, 2e_{i3}^{(m)}\}$$

按(2.11)及(4.1)式, 得

$$\{e_{ij}^{(m)}\} = [B] \{W^{(m)}\}^e \quad (4.2)$$

其中

$$[B] = \frac{1}{2\Delta} \left[ [B_i], [B_j], [B_k] \right] \quad (4.3)$$

$$[B_i] = \begin{bmatrix} b_i & 0 \\ 0 & c_i \\ c_i & b_i \end{bmatrix}$$



$$\{W^{(m)}\}^e = \{u_i^{(m)}, v_i^{(m)}, u_j^{(m)}, v_j^{(m)}, u_k^{(m)}, v_k^{(m)}\} \quad (4.4)$$

$\Delta$  为三角形单元面积. 按(3.6)式,

$$e^{(m)} = \frac{1+E_0}{3} \frac{1}{2\Delta} \{b_i, c_i, b_j, c_j, b_k, c_k\} \{W^{(m)}\}^{(e)} + \frac{1}{3} \sum_{k=2}^{m-1} E_k \tilde{\epsilon}^{(m-k)} \quad (4.5)$$

设  $\{e^{(m)}\} = \{e^{(m)}, e^{(m)}, 0\}^T$

得出应变偏量摄动系数列阵:

$$\{e_{ij}^{(m)}\} = \{e_{ij}^{(m)}\} - \{e^{(m)}\} = [C] \{W^{(m)}\}^{(e)} - \{\psi^{(m-2)}\} \quad (4.6)$$

其中

$$[C] = \{ [C_i], [C_j], [C_k] \}$$

$$[C_i] = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{2-E_0}{3} b_i & -\frac{1+E_0}{3} c_i \\ -\frac{1+E_0}{3} b_i & \frac{2-E_0}{3} c_i \\ c_i & b_i \end{bmatrix} \frac{1}{2\Delta} \right\} \quad (4.7)$$

$$\left. \begin{aligned} \{\psi^{(m-2)}\} &= \{ \psi^{(m-2)}, \psi^{(m-2)}, 0 \}^T \\ \psi^{(m-2)} &= \frac{1}{3} \sum_{k=2}^{m-1} E_k \tilde{\epsilon}^{(m-k)} \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

由(4.7)式看出,  $[C]$ 是个常数矩阵, 而  $m$  阶摄动的应变偏量系数(4.6)式与该级摄动的结点

位移系数成线性关系。因  $\psi^{(m-2)}$  都是  $m$  阶摄动前的计算结果，故对  $m$  阶摄动来说，它们是已知数。

求得应变偏量系数后，按 (2.30) 式求出应力分量的各级摄动系数。将 (2.30) 式改写为

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(m)} = & \mu^{(0)} \varepsilon_{ij}^{(m)} + \frac{1+E_0}{3} \bar{\varepsilon}^{(m)} \delta_{ij} + \sum_{k=2}^m (\mu^{(k-1)} \varepsilon_{ij}^{(m-k+1)}) \\ & + \frac{1}{3} \delta_{ij} \sum_{k=2}^{m-1} E_k \bar{\varepsilon}^{(m-k)} \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \mu^{(0)} &= \frac{1-2\nu}{1+\nu} \\ E_0 = A_1^* &= -\frac{\nu}{1-\nu} \end{aligned}$$

再把应力分量的摄动系数写成矩阵形式，得

$$\begin{aligned} \{\sigma_{ij}^{(m)}\} &= [\sigma_{11}^{(m)}, \sigma_{22}^{(m)}, \sigma_{12}^{(m)}]^T \\ \{\sigma_{ij}^{(m)}\} &= \{\sigma_i^{(m)}\} + \{\sigma_n^{(m)}\} \end{aligned} \quad (4.9)$$

式中第一个列阵是个线性应力系数矩阵：

$$\{\sigma_i^{(m)}\} = \begin{bmatrix} \frac{1-2\nu}{1-\nu^2} (\varepsilon_{11}^{(m)} + \nu \varepsilon_{22}^{(m)}) \\ \frac{1-2\nu}{1-\nu^2} (\varepsilon_{22}^{(m)} + \nu \varepsilon_{11}^{(m)}) \\ \frac{1-2\nu}{1+\nu} \varepsilon_{12}^{(m)} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

式中第二个列阵是非线性应力系数矩阵：

$$\{\sigma_n^{(m)}\} = \begin{bmatrix} \sum_{k=2}^m (\mu^{(k-1)} \varepsilon_{11}^{(m-k+1)}) + \frac{\nu}{1+\nu} \sum_{k=2}^{m-1} E_k \bar{\varepsilon}^{(m-k)} \\ \sum_{k=2}^m (\mu^{(k-1)} \varepsilon_{22}^{(m-k+1)}) + \frac{\nu}{1+\nu} \sum_{k=2}^{m-1} E_k \bar{\varepsilon}^{(m-k)} \\ \sum_{k=2}^m (\mu^{(k-1)} \varepsilon_{12}^{(m-k+1)}) \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

当我们进行  $m$  级摄动时， $\{\sigma_n^{(m)}\}$  是个已知的列阵，它是  $m$  次前摄动计算的结果。显然，

$$\{\sigma_i^{(m)}\} = [D] \cdot [B] \{W^{(m)}\}^{(e)} \quad (4.12)$$

其中

$$[D] = \frac{1-2\nu}{1+\nu} \begin{bmatrix} \frac{1}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{1}{1-\nu} & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$



(2.32)式中的位移摄动系数可表示为

$$\{U^{(m)}\} = \{u^{(m)}, v^{(m)}\}^T = [N] \cdot \{W^{(m)}\}^{(e)} \quad (4.14)$$

其中

$$[N] = [N_i, N_j, N_k]$$

$$[N_i] = \begin{bmatrix} L_i & 0 \\ 0 & L_i \end{bmatrix} \quad \begin{array}{c} k \\ \swarrow \quad \searrow \\ i \longrightarrow j \end{array} \quad (4.15)$$

(1.32)式中的外力分量  $F_{i_0}$  也用矩阵表示,

$$\{F_0\} = \{F_{10}, F_{20}\}^T \quad (4.16)$$

利用上面所得的结果, (2.32)式将可写成:

$$\sum_e \left[ \int_{V_e} \{ \delta \varepsilon_{ij}^{(n)} \} \{ \sigma_{ij}^{(m)} \} dV - F^{(m)} \int_{\Omega_e} \{ \delta U^{(n)} \} \{ F_0 \} d\Omega \right] = 0$$

在这里的求和是表示要将物体上所有单元  $e$  的位能相加的意思. 将(4.2)(4.9)(4.12)(4.14)代入上式, 得

$$\begin{aligned} & \sum_e \left[ \delta W^{(n)} \right]^{(e)} \int_{V_e} [B]^T [D] \cdot [B] dV \{W^{(m)}\}^{(e)} \\ & + \int_{V_e} [B]^T \{ \sigma_n^{(m-1)} \} dV \\ & - F^{(m)} \int_{\Omega_e} [N]^T \{F_0\} d\Omega \Big] = 0 \end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned} [K]^{(e)} &= \int_{V_e} [B]^T [D] [B] dV \\ \{P^{(m-1)}\}^{(e)} &= \int_{V_e} [B]^T \{ \sigma_n^{(m-1)} \} dV \\ \{P_0\}^{(e)} &= \int_{\Omega_e} [N]^T \{F_0\} d\Omega \end{aligned}$$

则上式得

$$\begin{aligned} & \sum_e \delta W^{(n)} \left[ K \right]^{(e)} \{W^{(m)}\}^{(e)} \\ & = \sum_e \delta W^{(n)} \left[ F^{(m)} \{P_0\}^{(e)} - \{P^{(m-1)}\}^{(e)} \right] \end{aligned}$$

集合单元刚度矩阵及载荷矩阵后, 最后得

$$[K] \{W^{(m)}\} = F^{(m)} \{P_0\} - \{P^{(m-1)}\} \quad (4.17)$$

上式中  $[K]$  称为总刚度矩阵, 在摄动过程中它是个不变的矩阵;  $\{P_0\}$  是表示边界上载荷分布规律的矩阵, 在摄动过程中它也是个不变矩阵. 上式右边第二个矩阵, 反映了材料非线性对各级摄动位移系数的影响. 当  $m=1$  时, 即第一级摄动时, 它等于零,

$$\{P^{(1)}\} = \{0\}$$

而在  $m$  级摄动时,  $\{P^{(m-1)}\}$  矩阵只涉及  $m$  级前各次摄动所得的结果, 因此它是个已知矩阵. 可见, 按 (4.17) 式将不难求得各级位移摄动系数.

在 (4.17) 式中,  $F^{(m)}$  是个待定的常数, 它要依靠  $M_0$  点 (即该点的应变强度为  $e_0$ ) 的条件来确定. 在  $M_0$  点处, 应变强度应为

$$\Gamma_0^2 = A_{20}^{(2)} e_0^2 + A_{20}^{(3)} e_0^3 + A_{20}^{(4)} e_0^4 + \dots = e_0$$

于是得出,

$$\left. \begin{aligned} A_{20}^{(2)} &= 1 \\ A_{20}^{(3)} &= A_{20}^{(4)} = \dots = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.18)$$

这样, 每一次振动都补充一个确定  $F^{(m)}$  的条件.

(3.17)式是个线性代数方程式, 为了排计算程序方便, 可将位移摄动系数分为两部分:

$$\left. \begin{aligned} \{W^{(m)}\} &= \{W_1^{(m)}\} + \{W_2^{(m)}\} \\ [K]\{W_1^{(m)}\} &= F^{(m)}\{P_0\} \\ [K]\{W_2^{(m)}\} &= -\{P^{(m-1)}\} \end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

由此可见, 每次摄动时只需要作(4.19)式最后一个方程的计算. 由于每次摄动时总刚度矩阵不变, 因此解联立线性代数方程时, 采用Crout分解<sup>[7]</sup>的方法最省时间.

各级位移系数确定后, 将不难求得各级摄动的应变系数、应力系数以及载荷系数, 于是问题将得到完全的解答.

### 五、计算实例

本文计算了带中心孔的受拉板的弹塑性应力. 孔的直径  $2a=8.5\text{mm}$ , 板宽  $b=48.08\text{mm}$ , 板的材料为铝合金,  $E=0.74 \times 10^4 \text{kg/mm}^2$ , 波桑比  $\nu=0.32$ ,  $\sigma_{0.2}=22.6 \text{kg/mm}^2$ . 根据材料实验拉伸曲线换算得到的  $S-\Gamma$  曲线如图 4 所示<sup>[8]</sup>. 用(2.13)式拟合该曲线时, 求得  $A_i$  诸值为:

$$\begin{aligned} A_1 &= 0.27273, \quad A_3 = -0.52903 \times 10^4, \quad A_5 = 0.61376 \times 10^8 \\ A_7 &= -0.29578 \times 10^{12}, \quad A_9 = 0.31472 \times 10^{16} \end{aligned}$$

我们只取了五项  $A_i$ , (2.13)式将在 1% 应变 ( $\Gamma$ ) 范围内可较准确地描写实验结果 (图 4).

为了检验理论和计算机程序, 我们先计算一个矩形无孔均匀拉伸板的应力和变形, 得到很理想的结果 (图 4).

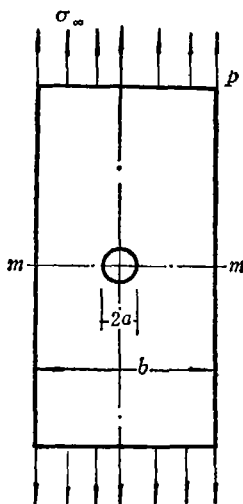
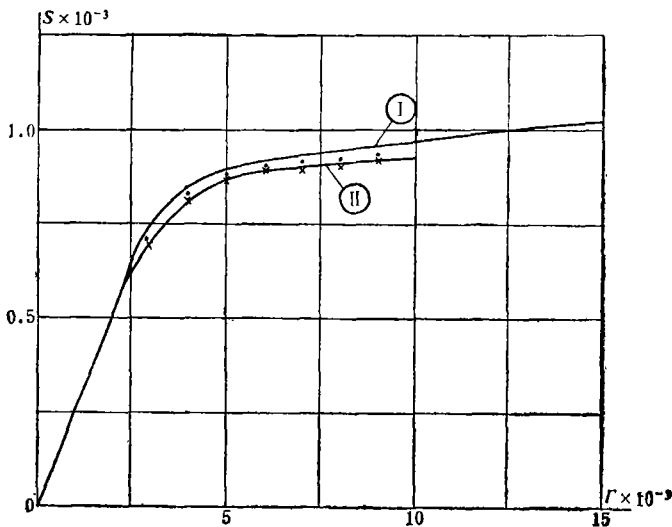


图 3



① 实验曲线    ② 级数曲线    × 矩形平板拉伸计算结果  
 • 中心圆孔拉板孔边最大应力计算结果

图 4

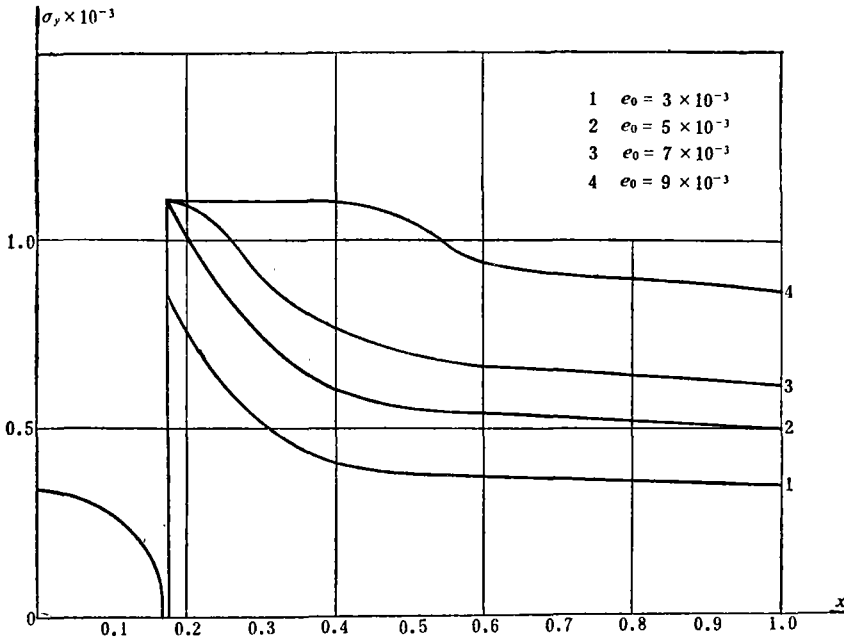


图 5

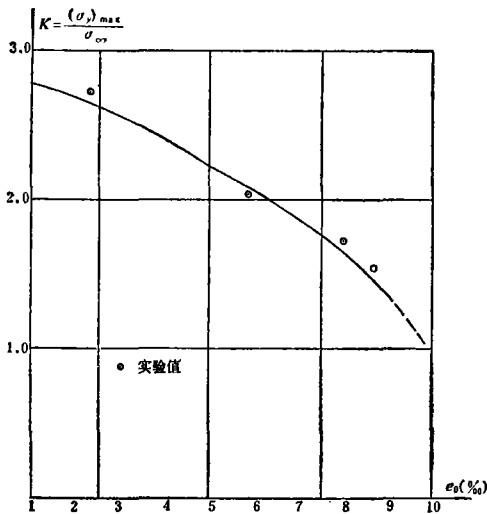


图 6

图 5 表示计算得出的带中心圆孔板  $m-m$  截面  $\sigma_y$  分布情况。摄动参数就选孔边最大应力处的应变强度  $e_0$ 。从图中看出，当载荷增大时，即  $e_0$  增加时，截面上的应力  $\sigma_y$  分布趋于平缓。

图 6 表示出孔边应力集中系数与  $e_0$  的关系，同时，也画出了周春田用光弹贴片法测定的带孔拉板实验结果<sup>[8]</sup>。从图中看出，理论与实验结果十分一致。

## 六、结 语

由于在有限元法中引进了摄动过程，可以使刚度矩阵线性化，每级摄动实际上是解一个线性代数方程组，这样就可以避免单纯用有限元法解非线性问题时所遇到的迭代法解非线性代数方程组的困难，因而大大节约了计算时间。象前述算例，在速度为每秒 10 万次的计算机上计算，大约只需 4—5 分钟。

由于在摄动法中引进了有限元法，大大扩展了摄动法的使用范围，使它可以用来处理许多过去解决不了的复杂问题。当然，这种摄动有限元法也只能得到一个数值解。

由实验结果看出，这种方法是有效的、可靠的。

本文方法可以推广应用于几何非线性问题以及几何非线性和材料非线性的复合问题中去。

## 参 考 文 献

- [ 1 ] Thompson, J. M. T. and A. C. Walker, The non-linear perturbation analysis of discrete structural systems, *International Journal of Solids and Structures*, 4, 8, (1966).
- [ 2 ] Gallagher, R. H., 非线性有限元结构分析中的摄动法, 有限元素法及其在力学中的应用, 译文集, 译自 *Computational Mechanics*, (1974).
- [ 3 ] Yokoo, Y., T. Nakamura and K. Uetani, The incremental perturbation method for large displacement analysis of elastic-plastic structures, *Int. J. Numerical Methods in Engineering* 10, 3, (1976).
- [ 4 ] Trifan, D., On the plastic bending of circular plates, *Quart. of Applied Math.*, 16, (1948).
- [ 5 ] 古国纪, 顾求林, 弹塑性圆板大挠度问题, 力学学报, 2, 3, (1958).
- [ 6 ] 顾求林, 有强化弹塑性平面问题的一段渐近解, 清华大学基础部科研报告 (未发表), (1980).
- [ 7 ] 李大潜等, 《有限元素法续讲》, 科学出版社.
- [ 8 ] 周春田, 带有缺陷板在单向拉伸时弹性应力应变场的测定, 清华大学基础部科研报告 (未发表), (1981).
- [ 9 ] 钱伟长, 《变分法及有限元》, 科学出版社, (1980).
- [ 10 ] 钱伟长, 林鸿荪, 胡海昌, 叶开沅, 《弹性圆薄板大挠度问题》, 中国科学院, (1954).
- [ 11 ] Washizu, K., *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, (1968).
- [ 12 ] Zienkiewicz, O. C., *The Finite Element Method*, (1977).

## The Perturbation Finite Element Method for Solving Problems with Nonlinear Materials

Xie Zhi-cheng, Wang Rei-wu, Yang Xue-zhong, Chien Zhen-dong  
(Qinghua University, Beijing)

### Abstract

Perturbation method is one of the effective methods for solving problems in nonlinear continuum mechanics. It has been developed on the basis of the linear analytical solutions for the original problems. If a simple analytical solution can not be obtained, we would encounter difficulties in applying this method to solve some complicated nonlinear problems. The finite element method appears to be in its turn a very useful means for solving nonlinear problems, but generally it takes too much time in computation. In the present paper a mixed approach, namely the perturbation finite element method, is introduced, which incorporates the advantages of the above-mentioned two methods and enables us to solve more complicated nonlinear problems with great saving in computing time.

Problems in the elastoplastic region have been discussed and a numerical solution for a plate with a central hole under tension is given in this paper.