

变厚度圆薄板在均布载荷下大挠度问题*

王新志

(甘肃工业大学, 1981年10月15日收到)

摘要

本文首先给出变厚度圆薄板大挠度方程, 用小参数方法和修正迭代法联合求解此问题, 得到三次近似解; 给出特征曲线同线性理论进行了比较。

一、引言

变厚度圆薄板在工程中也常常遇到。由于变厚度圆薄板基本方程复杂, 难度大, 就是线性理论解决也是不容易的。以往用小挠度理论研究此问题的人并不多, 正如文[2]指出仅有郝滋尔、毕欧列、奥宋、康惠、拉伸纳尔、冯元桢和我国叶开沅教授。作者至今尚未见到用大挠度理论研究过此问题。本文是在文[2]的启发下, 选取了不同于文[2]幂级数形式, 对载荷进行了处理, 使作者用小参数法和修正迭代法解此问题成为可能。

二、基本方程和边界条件

我们只限于研究对称问题。现在我们来求变厚度圆薄板在横向均布载荷下的大挠度方程。图1表示夹角为 $d\theta$ 的两个径向截面和两个弧截面截取的板元素, 其中一个弧截面位于半

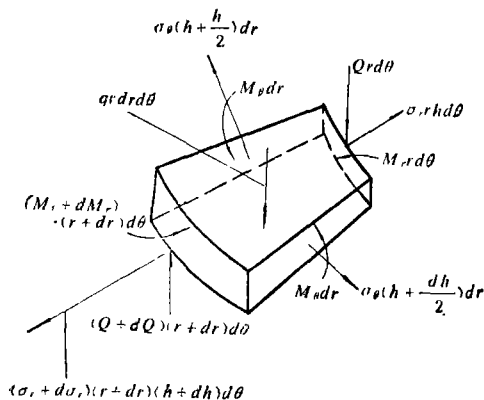


图 1

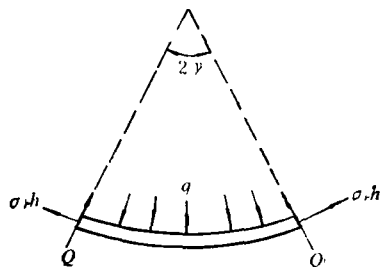


图 2

径为 r , 厚度为 h 的圆周上, 另一个弧截面位于半径为 $(r+dr)$, 厚度为 $(h+dh)$ 的圆周上。在图上示有剪力、应力和弯矩, 作用在元素上的横向载荷为 $qrd\theta dr$, 其中 q 为载荷强度。

由板元素力矩平衡可得:

* 叶开沅推荐。

$$M_r + r \frac{dM_r}{dr} - M_\theta = -rQ \quad (2.1)$$

由板元素径向力的平衡可得:

$$\frac{d(hr\sigma_r)}{dr} - h\sigma_\theta = 0 \quad (2.2)$$

由图 2 可得:

$$Q = \frac{qr}{2} - h\sigma_r \nu \quad (2.3)$$

其中:

$$\nu = -\frac{dW}{dr} \quad (2.4)$$

我们知道

$$M_r = -D \left(\frac{d^2W}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dW}{dr} \right) \quad (2.5a)$$

$$M_\theta = -D \left(\frac{1}{r} \frac{dW}{dr} + \nu \frac{d^2W}{dr^2} \right) \quad (2.5b)$$

其中: $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, E 为弹性模量, ν 为波松比.

把(2.3)、(2.4)、(2.5a,b)式代入方程(2.1)可得:

$$D \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dW}{dr} \right) + \frac{dD}{dr} \left(\frac{d^2W}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dW}{dr} \right) \right] = \frac{qr}{2} + h\sigma_r \frac{dW}{dr} \quad (2.6)$$

我们也知道:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu\sigma_\theta) \quad (2.7a)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu\sigma_r) \quad (2.7b)$$

由协调方程:

$$\frac{d}{dr} (r\varepsilon_\theta) - \varepsilon_r = -\frac{1}{2} \left(\frac{dW}{dr} \right)^2 \quad (2.8)$$

将(2.2)、(2.7a,b)式代入方程(2.8)可得:

$$r \frac{d^2(hr\sigma_r)}{dr^2} + \frac{d(hr\sigma_r)}{dr} - h\sigma_r = \frac{1}{h} \left[r \frac{d(hr\sigma_r)}{dr} - \nu hr\sigma_r \right] \frac{dh}{dr} - \frac{Eh}{2} \left(\frac{dW}{dr} \right)^2 \quad (2.9)$$

假定圆平板的厚度 h 表达式同文[2]

$$h = h_0 e^{-\frac{\beta}{6} \left(\frac{r}{a} \right)^2} \quad (2.10)$$

其中 β , h_0 为常数, a 为圆板半径. 对于不同的 β 值, 沿着平板的直径厚度变化如图 3 所示.

常用的边界条件有:

1) 周边固定夹紧

$$\text{当 } r=a \text{ 时: } W = 0, \quad \frac{dW}{dr} = 0, \quad \frac{d}{dr} (rN_r) - \nu N_r = 0 \quad (2.11a, b, c)$$

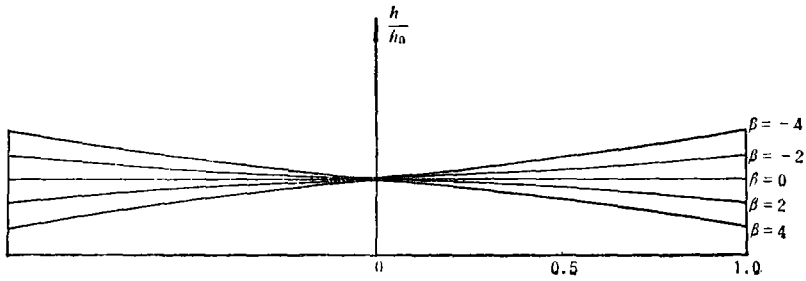


图 3

$$\text{当 } r=0 \text{ 时: } \frac{dW}{dr}, N_r \text{ 有限} \quad (2.12a, b)$$

2) 周边可移夹紧

$$\text{当 } r=a \text{ 时: } W=0, \frac{dW}{dr}=0, N_r=0 \quad (2.13a, b, c)$$

$$\text{当 } r=0 \text{ 时: } \frac{dW}{dr}, N_r \text{ 有限} \quad (2.14a, b)$$

3) 周边铰支

$$\text{当 } r=a \text{ 时: } W=0, \frac{d^2W}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dW}{dr} = 0, \frac{d}{dr}(rN_r) - \nu N_r = 0 \quad (2.15a, b, c)$$

$$\text{当 } r=0 \text{ 时: } \frac{dW}{dr}, N_r \text{ 有限} \quad (2.15d, e)$$

其中 N_r 为板的径向张力。

为了求解方便, 对方程进行简化, 我们引入下列无量纲量

$$\rho = \frac{r}{a} \quad y = \frac{W}{h_0} \quad \varphi = \frac{dy}{d\rho}$$

$$p = \frac{6a^4(1-\nu^2)q}{Eh_0^4} \quad s = \frac{12(1-\nu^2)h_0\rho\sigma_r a^2}{Eh_0^3}$$

把这些无量纲量代入方程 (2.6) 和 (2.9), 就得到变厚度圆薄板无量纲大挠度方程:

$$L(\rho\varphi) = p\rho^2 e^{-\frac{\beta}{2}\rho^2} + \beta\left(\rho^2 \frac{d\varphi}{d\rho} + \nu\rho\varphi\right) + s\varphi e^{-\frac{\beta}{2}\rho^2} \quad (2.16a)$$

$$L(\rho s) = \frac{\beta}{3}\left(\nu\rho s - \rho^2 \frac{ds}{d\rho}\right) - \alpha\varphi^2 e^{-\frac{\beta}{6}\rho^2} \quad (2.16b)$$

其中算子 $L = \rho \frac{d}{d\rho} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho}$, $\alpha = 6(1-\nu^2)$

而用无量纲量表示的边界条件如下:

1) 周边固定夹紧

$$\text{当 } \rho=1 \text{ 时: } y=0, \varphi=0, \rho \frac{ds}{d\rho} - \nu s = 0 \quad (2.17a, b, c)$$

当 $\rho=0$ 时: φ, s 有限 (2.18a, b)

2) 周边可移夹紧

当 $\rho=1$ 时: $y=0, \varphi=0, s=0$ (2.19a, b, c)

当 $\rho=0$ 时: φ, s 有限 (2.20a, b)

3) 周边铰支

当 $\rho=1$ 时: $y=0, \frac{d\varphi}{d\rho} + \frac{\nu\varphi}{\rho} = 0, \rho \frac{ds}{d\rho} - \nu s = 0$ (2.21a, b, c)

当 $\rho=0$ 时: φ, s 有限 (2.22a, b)

从方程 (2.16a) 可看出, 不要等式右边第三项, 我们就得到变厚度圆薄板小挠度方程, 当 β 等于零由方程 (2.16a) 就得到等厚度圆薄板大挠度方程, 在此基础上再去掉非线性项就得到等厚度圆薄板小挠度方程。从方程 (2.16b) 可看出, 当 $\beta=0$ 可得到等厚度圆薄板大挠度协调方程。

三、求解边值问题

本文只求在固定夹紧边界条件的解, 即我们要在边界条件 (2.17a, b, c), (2.18a, b) 下, 用小参数法来求解方程组 (2.16a, b)。

我们取: $\varepsilon = \frac{\beta}{6}, p = \beta G = 6G\varepsilon$ (3.1a, b)

将 $e^{\frac{\beta}{2}\rho^2}, e^{-\frac{\beta}{6}\rho^2}$ 展开为泰勒级数

$$e^{\frac{\beta}{2}\rho^2} = e^{3\rho^2\varepsilon} = 1 + 3\rho^2\varepsilon + \frac{3^2\rho^4}{2!}\varepsilon^2 + \frac{3^3\rho^6}{3!}\varepsilon^3 + \dots \quad (3.2)$$

$$e^{-\frac{\beta}{6}\rho^2} = e^{-\rho^2\varepsilon} = 1 - \rho^2\varepsilon + \frac{\rho^4}{2!}\varepsilon^2 - \frac{\rho^6}{3!}\varepsilon^3 + \dots \quad (3.3)$$

同时我们设 $y(\rho), s(\rho)$ 可展为 ε 的升幂级数:

$$y(\rho) = y_1(\rho)\varepsilon + y_2(\rho)\varepsilon^2 + y_3(\rho)\varepsilon^3 + \dots \quad (3.4a)$$

$$s(\rho) = s_1(\rho)\varepsilon + s_2(\rho)\varepsilon^2 + s_3(\rho)\varepsilon^3 + \dots \quad (3.4b)$$

我们将式 (3.1a, b), (3.2), (3.3), (3.4), (3.5) 分别代入方程式 (2.16a, b) 及边界条件 (2.17a, b, c), (2.18a, b), 且按 ε 次数相同的项合并起来。我们就得到一系列关于 $\varphi_1(\rho)$ 和 $s_1(\rho)$, $\varphi_2(\rho)$ 和 $s_2(\rho)$, $\varphi_3(\rho)$ 和 $s_3(\rho)$, $\varphi_4(\rho)$ 和 $s_4(\rho)$ 等及其相关边界条件的微分方程。其中取 $\varphi_i(\rho)$ 为 $\frac{dy_i(\rho)}{d\rho}$ 。

下面为了书写方便, 取 $\varphi_i = \varphi_i(\rho), s_i = s_i(\rho), y_i = y_i(\rho)$ 。

对于 φ_1, s_1 我们有下面的边值问题:

$$L(\rho\varphi_1) = 6G\rho^2 \quad (3.5a)$$

$$L(\rho s_1) = 0 \quad (3.5b)$$

$$\text{当 } \rho=1 \text{ 时: } y_1=0, \varphi_1=0, \rho \frac{ds_1}{d\rho} - \nu s_1=0 \quad (3.6a, b, c)$$

$$\text{当 } \rho=0 \text{ 时: } \varphi_1, s_1 \text{ 有限} \quad (3.7a, b)$$

解此边值问题得:

$$\varphi_1 = -\frac{3}{4} G(\rho^3 - \rho) \quad (3.8a)$$

$$y_1 = -\frac{3}{16} G(\rho^4 - 2\rho^2 + 1) \quad (3.8b)$$

$$s_1 = 0 \quad (3.8c)$$

将(3.1a, b), (3.8b) 代入 (3.4a) 式, 我们就得到无量纲挠度 $y(\rho)$ 的一次近似

$$y(\rho) = -\frac{p}{32}(\rho^4 - 2\rho^2 + 1) \quad (3.9)$$

这就是等厚度圆板在均布载荷下小挠度的解. 将(3.1a)、(3.8b) 代入(3.4a)式, 取 $\rho=0$ 得

$$G = \alpha_1 y_0 \quad (3.10)$$

其中: $\alpha_1 = \frac{32}{\beta}$, y_0 为中心无量纲挠度.

把式 (3.10) 代入 (3.8a) 式, 得

$$\varphi_1 = \alpha_2 y_0(\rho^3 - \rho) \quad (3.11)$$

其中 $\alpha_2 = \frac{24}{\beta}$, 以式 (3.11) 作初次近似解, 求解一系列边值问题.

对于 φ_2, s_2 有下面边值问题

$$L(\rho\varphi_2) = 18G\rho^4 + 6\left(\rho^2 \frac{d\varphi_1}{d\rho} + \nu\rho\varphi_1\right) + \varphi_1 s_1 \quad (3.12a)$$

$$L(\rho s_2) = 2\left(\nu\rho s_1 - \rho^2 \frac{ds_1}{d\rho}\right) - \alpha\varphi_1^2 \quad (3.12b)$$

$$\text{当 } \rho=1 \text{ 时: } y_2=0, \varphi_2=0, \rho \frac{ds_2}{d\rho} - \nu s_2=0 \quad (3.13a, b, c)$$

$$\text{当 } \rho=0 \text{ 时: } \varphi_2, s_2 \text{ 有限} \quad (3.14a, b)$$

利用式(3.8c), (3.11), 方程组 (3.12a, b) 可写成

$$L(\rho\varphi_2) = 18G\rho^4 + 6\alpha_2 y_0[(3+\nu)\rho^4 - (1+\nu)\rho^2] \quad (3.15a)$$

$$L(\rho s_2) = -\alpha\alpha_2^2 y_0^2(\rho^6 - 2\rho^4 + \rho^2) \quad (3.15b)$$

解此边值问题可得

$$\varphi_2 = \frac{3}{4} G(\rho^6 - \rho) + \frac{1}{4} \alpha_2 y_0[(3+\nu)\rho^6 - 3(1+\nu)\rho^4 + 2\nu\rho] \quad (3.16a)$$

$$y_2 = \frac{G}{8}(\rho^6 - 3\rho^2 + 2) + \frac{1}{48} \alpha_2 y_0[2(3+\nu)\rho^6 - 9(1+\nu)\rho^4 + 12\nu\rho^2 + 3 - 5\nu] \quad (3.16b)$$

$$s_2 = -\alpha_4 y_0^2[\rho^7 - 4\rho^5 + 6\rho^3 - n_1\rho] \quad (3.16c)$$

其中 $n_1 = \frac{5-3\nu}{1-\nu}$ $\alpha_4 = \frac{\alpha\alpha_2^2}{48}$

将式(3.1a)、(3.8b)、(3.16b) 代入式(3.4a)、取 $\rho=0$ 得

$$G = \alpha_3 y_0 \quad (3.17)$$

其中
$$\alpha_3 = \frac{4[72 - (3-5\nu)\beta]}{(9+2\beta)\beta}$$

将 (3.17) 式代入 (3.16a) 式, 得

$$\varphi_2 = \frac{3}{4} \alpha_3 y_0 (\rho^6 - \rho) + \frac{1}{4} \alpha_2 y_0 [(3+\nu)\rho^5 - 3(1+\nu)\rho^3 + 2\nu\rho] \quad (3.18)$$

对于 φ_3, s_3 有下面边值问题

$$L(\rho\varphi_3) = 27G\rho^6 + 6\left(\rho^2 \frac{d\varphi_2}{d\rho} + \nu\rho\varphi_2\right) + \varphi_2 s_1 + \varphi_1 s_2 + 3\rho^2 \varphi_1 s_1 \quad (3.19a)$$

$$L(\rho s_3) = 2\left(\nu\rho s_2 - \rho^2 \frac{ds_2}{d\rho}\right) - \alpha(2\varphi_1\varphi_2 - \rho^2\varphi_1^2) \quad (3.19b)$$

$$\text{当 } \rho=1 \text{ 时: } y_3=0, \varphi_3=0, \rho \frac{ds_3}{d\rho} - \nu s_3 = 0 \quad (3.20a, b, c)$$

$$\text{当 } \rho=0 \text{ 时: } \varphi_3, s_3 \text{ 有限} \quad (3.21a, b)$$

利用 (3.16c)、(3.18)、(3.11)、(3.8c) 式, 方程组 (3.19a, b) 可写成下面形式

$$\begin{aligned} L(\rho\varphi_3) = & 27G\rho^6 + 6\left\{\frac{3}{4}\alpha_3 y_0 [(5+\nu)\rho^6 - (1+\nu)\rho^2] \right. \\ & \left. + \frac{1}{4}\alpha_2 y_0 [(5+\nu)(3+\nu)\rho^6 - 3(3+\nu)(1+\nu)\rho^4 + 2\nu(1+\nu)\rho^2] \right\} \\ & - \alpha_2 \alpha_4 y_0^3 [\rho^{10} - 5\rho^8 + 10\rho^6 - 6\rho^4 - n_1(\rho^4 - \rho^2)] \end{aligned} \quad (3.22a)$$

$$\begin{aligned} L(\rho s_3) = & 2\alpha_4 y_0^3 [(7-\nu)\rho^8 - 4(5-\nu)\rho^6 + 6(3-\nu)\rho^4 - n_1(1-\nu)\rho^2] \\ & - \frac{3}{2}\alpha\alpha_2 \alpha_3 y_0^2 (\rho^8 - \rho^6 - \rho^4 + \rho^2) \\ & - \frac{1}{2}\alpha\alpha_2^2 y_0^2 [(3+\nu)(\rho^8 - \rho^6) - 3(1+\nu)(\rho^6 - \rho^4) + 2\nu(\rho^4 - \rho^2)] \\ & + \alpha\alpha_2^2 y_0^2 (\rho^8 - 2\rho^6 + \rho^4) \end{aligned} \quad (3.22b)$$

解此边值问题得

$$\begin{aligned} \varphi_3 = & \frac{9G}{16}(\rho^7 - \rho) + \frac{3}{32}\alpha_3 y_0 [(5+\nu)\rho^7 - 6(1+\nu)\rho^5 + (1+5\nu)\rho] \\ & + \frac{1}{32}\alpha_2 y_0 [(5+\nu)(3+\nu)\rho^7 - 6(3+\nu)(1+\nu)\rho^5 + 12(1+\nu)\nu\rho^3 \\ & + (3+4\nu-7\nu^2)\rho] - \frac{1}{240}\alpha_2 \alpha_4 y_0^3 [2\rho^{11} - 15\rho^9 + 50\rho^7 - 60\rho^5 \\ & - n_1(10\rho^6 - 30\rho^3) - (20n_1 - 23)\rho] \end{aligned} \quad (3.23a)$$

$$\begin{aligned} y_3 = & \frac{9G}{128}(\rho^8 - 4\rho^2 + 3) + \frac{3}{256}\alpha_3 y_0 [(5+\nu)\rho^8 - 12(1+\nu)\rho^4 + 4(1+5\nu)\rho^2 + 3(1-3\nu)] \\ & + \frac{1}{256}\alpha_2 y_0 [(5+\nu)(3+\nu)\rho^8 - 8(3+\nu)(1+\nu)\rho^6 + 24(1+\nu)\nu\rho^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +4(3+4\nu-7\nu^2)\rho^2-(3+16\nu-11\nu^2)] \\
& -\frac{1}{2880}\alpha_2\alpha_4y_0^3[2\rho^{12}-18\rho^{10}+75\rho^8-120\rho^6-10n_1(2\rho^6-9\rho^4) \\
& -6(20n_1-23)\rho^2+50n_1-77] \tag{3.23b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_3 = & \frac{\alpha_4}{120}y_0^2[3(7-\nu)\rho^9-20(5-\nu)\rho^7+60(3-\nu)\rho^5-30n_1(1-\nu)\rho^3] \\
& +\frac{\alpha\alpha_2^2}{240}y_0^2(3\rho^9-10\rho^7+10\rho^5)-\frac{\alpha\alpha_2\alpha_3}{160}y_0^2(3\rho^9-5\rho^7-10\rho^5+30\rho^3) \\
& -\frac{1}{480}\alpha_2^2y_0^2[(3+\nu)(3\rho^9-5\rho^7)-15(1+\nu)(\rho^7-2\rho^5) \\
& +20\nu(\rho^5-3\rho^3)]+A\rho \tag{3.23c}
\end{aligned}$$

$$\text{其中: } A = \frac{7-46\nu+27\nu^2}{480(1-\nu)}\alpha\alpha_2^2y_0^2 + \frac{16-9\nu}{80(1-\nu)}\alpha\alpha_2\alpha_3y_0^2 + \frac{61+48\nu-13\nu^2}{120(1-\nu)}\alpha_4y_0^2$$

把(3.8b), (3.16b), (3.23b)式代入(3.4a)式可得

$$\begin{aligned}
y = & \frac{\beta}{32}(\rho^4-2\rho^2+1) + \frac{\beta\beta}{288}(\rho^6-3\rho^2+2) + \frac{\beta^2\beta}{3072}(\rho^8-4\rho^2+3) \\
& +\frac{\beta^2}{1728}\alpha_2y_0[2(3+\nu)\rho^8-9(1+\nu)\rho^4+12\nu\rho^2+3-5\nu] \\
& +\frac{\beta^8}{216}\left\{\frac{3}{256}\alpha_3y_0[(5+\nu)\rho^8-12(1+\nu)\rho^4+4(1+5\nu)\rho^2+3(1-3\nu)]\right. \\
& +\frac{1}{256}\alpha_2y_0[(5+\nu)(3+\nu)\rho^8-8(3+\nu)(1+\nu)\rho^6+24(1+\nu)\nu\rho^4 \\
& +4(3+4\nu-7\nu^2)\rho^2-(3+16\nu-11\nu^2)] \\
& \left.-\frac{1}{2880}\alpha_2\alpha_4y_0^3[2\rho^{12}-18\rho^{10}+75\rho^8-120\rho^6-10n_1(2\rho^6-9\rho^4) \right. \\
& \left. -6(20n_1-23)\rho^2+50n_1-77]\right\} \tag{3.24}
\end{aligned}$$

当 $\rho=0$, 由(3.24)式可得到圆板中心无量纲挠度和载荷的特征关系式

$$p = \frac{1}{m}(y_0+m_1\beta y_0+m_2\beta^2 y_0+m_3y_0^3) \tag{3.25}$$

其中

$$\begin{aligned}
m_1 = & \frac{5\nu-3}{72}, \quad m_2 = \frac{3+16\nu-11\nu^2}{2304} - \frac{(1-3\nu)[72-(3-5\nu)\beta]}{1536(9+2\beta)} \\
m_3 = & \frac{\alpha}{3}\left(\frac{5n_1}{72}-\frac{77}{720}\right), \quad m = \frac{1}{3\nu} + \frac{\beta}{144} + \frac{\beta^2}{1024}
\end{aligned}$$

为了同线性理论比较, 我们将文[2]和本文的无量纲挠度、载荷转化成和文[1]相同, (3.25)式为

$$Q = \frac{1}{8m}\left[(1+m_1\beta+m_2\beta^2)W_m + \frac{m_3}{3(1-\nu^2)}W_m^3\right] \tag{3.26}$$

这里的Q是无量纲均布载荷强度,不同于式(2.1)和式(2.3)的Q,同于文[1]的Q.下面取 $\nu=0.3$ 时,同文[2]进行比较.

$$\text{当 } \beta = 0 \text{ 时: } Q = 4W_m + 0.79947W_m^3 \tag{3.27}$$

这就是等厚度圆薄板大挠度特征关系式,和文[1](3.5c)式完全相同.

$$\text{当 } \beta = 4 \text{ 时: } Q = 1.6074W_m + 0.3347W_m^3 \tag{3.28}$$

$$\text{当 } \beta = -4 \text{ 时: } Q = 6.8676W_m + 1.3081W_m^3 \tag{3.29}$$

文[2]线性结果,取三次近似为:

$$\text{当 } \beta = 0 \text{ 时: } Q = 4W_m \tag{3.30}$$

$$\text{当 } \beta = 4 \text{ 时: } Q = 1.6437W_m \tag{3.31}$$

$$\text{当 } \beta = -4 \text{ 时: } Q = 8.1833W_m \tag{3.32}$$

图4我们绘出了由式(3.27)、(3.28)、(3.29)、(3.30)、(3.31)、(3.32)表示的特征线.从图上可以看出,当圆板由内部到边缘变薄时比内部到边缘变厚时中心挠度大,这和物理现象完全一致.同时本文特征曲线,参数相同时位于文[2]特征曲线的左上侧,这也和物理概念相吻合的.

将式(3.16c), (3.23c)代入式(3.4b)可得

$$\begin{aligned} s = & -\frac{\beta^2}{36} \alpha_4 y_0^2 (\rho^7 - 4\rho^5 + 6\rho^3 - n_1 \rho) \\ & + \frac{\beta^3}{216} \left\{ \frac{1}{120} \alpha_4 y_0^2 [3(7-\nu)\rho^9 \right. \\ & - 20(5-\nu)\rho^7 + 60(3-\nu)\rho^5 \\ & - 30n_1(1-\nu)\rho^3] + \frac{1}{240} \alpha \alpha_2^2 y_0^2 (3\rho^9 - 10\rho^7 + 10\rho^5) - \frac{1}{160} \alpha \alpha_2 \alpha_3 y_0^2 (3\rho^6 \\ & - 5\rho^7 - 10\rho^5 + 30\rho^3) - \frac{1}{480} \alpha_2^2 y_0^2 [(3+\nu)(3\rho^9 - 5\rho^7) \\ & \left. - 15(1+\nu)(\rho^7 - 2\rho^5) + 20\nu(\rho^5 - 3\rho^3)] + A\rho \right\} \tag{3.33} \end{aligned}$$

我们知道,薄板张力

$$N_r = h\sigma_r \tag{3.34}$$

由本文前面引用的无量纲载荷可得

$$N_r = n_2 \frac{s}{\rho} \tag{3.35}$$

其中
$$n_2 = \frac{Eh_0^3}{12(1-\nu^2)a^2}$$

把式(3.33)代入式(3.35)可得

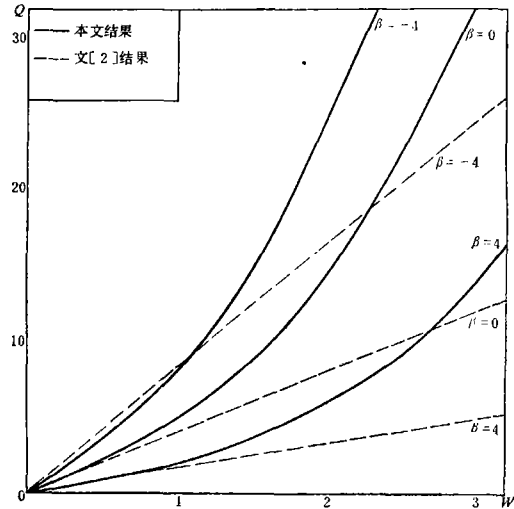


图 4

$$\begin{aligned}
 N_r = & -\frac{n_2\beta^2}{36}\alpha_4y_0^2(\rho^6-4\rho^4+\delta\rho^2-n_1) \\
 & +\frac{n_2\beta^2}{216}\left\{\frac{1}{120}\alpha_4y_0^2[3(7-\nu)\rho^8-20(5-\nu)\rho^6+60(3-\nu)\rho^4-30n_1(1-\nu)\rho^2]\right. \\
 & +\frac{1}{240}a\alpha_2^2y_0^2(3\rho^8-10\rho^6+10\rho^4)-\frac{1}{160}a\alpha_2\alpha_3y_0^2(3\rho^8-5\rho^6-10\rho^4+30\rho^2) \\
 & \left.-\frac{1}{480}\alpha_2^2y_0^2[(3+\nu)(3\rho^8-5\rho^6)-15(1+\nu)(\rho^6-2\rho^4)+20\nu(\rho^4-3\rho^2)]+A\right\}
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

取 $\rho=0$ 时得到薄板中心张力为:

$$N_r = \frac{n_1n_2}{36}\beta^2\alpha_4y_0^2 + \frac{n_2\beta^3}{216}A \tag{3.37}$$

取 $\rho=1$ 时得到薄板边缘的张力为:

$$\begin{aligned}
 N_r = & -\frac{(3-n_1)n_2}{36}\beta^2\alpha_4y_0^2 \\
 & +\frac{n_2\beta^3}{216}\left[\frac{47\nu-39}{120}\alpha_4y_0^2 + \frac{1}{80}a\alpha_2^2y_0^2 - \frac{9}{80}a\alpha_2\alpha_3y_0^2 - \frac{9-27\nu}{240}\alpha_2^2y_0^2 + A\right]
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

四、讨 论

在工程上有时变厚度薄板按小挠度理论进行设计,不能较好发挥其材料的机械性能。这是按小挠度理论保守的原因,这就有必要按大挠度理论进行设计,这是本文的尝试意义。

本文采用的计算方法系根据文[2]、[3]两种方法结合而成。基本方法仍是修正迭代程序。这方法可用以解决具有小参数变厚度的大挠度圆薄板问题及其他问题。

参 考 文 献

- [1] 钱伟长,叶开沅,圆薄板大挠度问题,物理学报,10,3(1954).
- [2] 叶开沅,变厚度弹性圆薄板问题,物理学报,11,3(1955).
- [3] 叶开沅,刘人怀等,兰州大学学报,2(1965).
- [4] 陈山林,光积昌,圆薄板大挠度问题的摄动参数,应用数学和力学,2,1(1981).
- [5] S.铁摩辛柯,S.沃诺斯基,《板壳理论》,科学出版社,(1977).
- [6] 徐芝纶,《弹性力学》,人民教育出版社,(1979).

The Large Deflection Problem of Circular Thin Plate with Variable Thickness under Uniformly Distributed Loads

Wang Xin-zhi

(Gansu University of Technology, Lanzhou)

Abstract

In this paper, to begin with, the large deflection equation of variable thickness circular plates is given. By use of small parameter method and revised iteration jointly a cubic approximate solution is obtained. A characteristic is also given for comparison with linear theory.