关于各向同性二阶对称张量函数势的一个定理*

程 沅 生

（上海工业大学机械工程系，1981年7月29日收到）

摘 要

本文提出并证明了这样一个定理：二阶张量 $\mathbf{H}$ 为二阶对称张量 $\mathbf{T}$ 的各向同性函数，若 $\mathbf{H}$ 存在着势，则 $\mathbf{T}$ 也一定存在着势.

在三维欧氏空间的任一曲线坐标系中，任一二阶对称张量 $\mathbf{T}$ 均可表示成

$$\mathbf{T}=T^{i}_{\cdot j}\mathbf{э}_i\mathbf{э}^j=T_{j}^{\cdot i}\mathbf{э}_i\mathbf{э}^j=T_{ij}\mathbf{э}^i\mathbf{э}^j=T^{ij}\mathbf{э}_i\mathbf{э}_j \tag{1}$$

其中 $\mathbf{э}^i$ 和 $\mathbf{э}_i$ 分别为该曲线坐标系的逆变基底向量和协变基底向量．式中出现两次的指标（一次为上指标、一次为下指标）如 i，j 均为哑标．$T^{i}_{\cdot j}$，$T_{j}^{\cdot i}$，T_{ij}，T^{ij} 称为张量 $\mathbf{T}$ 的分量，张量 $\mathbf{T}$ 的主分量我们记为 T_1，T_2，T_3．

对应于某一正则函数 $f(T_1, T_2, T_3; z)$，我们作各向同性的二阶张量函数（参见[1]）

$$\mathbf{H}=f(\mathbf{T}) \tag{2}$$

张量函数 $\mathbf{H}$ 也可表示成

$$\mathbf{H}=H^{i}_{\cdot j}\mathbf{э}_i\mathbf{э}^j=H_{ij}\mathbf{э}^i\mathbf{э}^j=H^{ij}\mathbf{э}_i\mathbf{э}_j$$

$H^{i}_{\cdot j}$，H_{ij}，H^{ij} 为张量 $\mathbf{H}$ 的分量，我们将张量 $\mathbf{H}$ 的主分量记为 H_1，H_2，H_3．

根据各向同性二阶张量函数性质，张量 $\mathbf{T}$ 也为张量 $\mathbf{H}$ 的各向同性函数

$$\mathbf{T}=f^{-1}(\mathbf{H}) \tag{3}$$

定理： 二阶张量 $\mathbf{H}$ 为二阶对称张量 $\mathbf{T}$ 的各向同性函数

$$\mathbf{H}=f(\mathbf{T})$$

若张量函数 $\mathbf{H}$ 存在着势 $W=W(T_1, T_2, T_3)$，即

$$\left.\begin{aligned} H_i&=\frac{\partial W}{\partial T_i} \qquad (i=1, 2, 3) \\ H^{i}_{\cdot j}&=\frac{\partial W}{\partial T_{i}^{\cdot j}} \qquad (i, j=1, 2, 3) \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

则张量 $\mathbf{T}$ 也一定存在着势．这就是说，一定存在着一个势函数 $W_1=W_1(H_1, H_2, H_3)$，满足

---

* 钱伟长推荐．

$$\left.\begin{aligned} T_i&=\frac{\partial W_1}{\partial H_i} \qquad (i=1,2,3) \\ T^{i}_{\cdot j}&=\frac{\partial W_1}{\partial H_{i\cdot}^{\ j}} \qquad (i,j=1,2,3) \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

本文的目的就是要在一般曲线坐标系中来证明这个定理，并对势函数W及W_1作一些注记。

证明． 由 (2) 式，我们有

$$\begin{aligned} H_1&=f(T_1,T_2,T_3;\ T_1)=\varphi_1(T_1,T_2,T_3) \\ H_2&=f(T_1,T_2,T_3;\ T_2)=\varphi_2(T_1,T_2,T_3) \\ H_3&=f(T_1,T_2,T_3;\ T_3)=\varphi_3(T_1,T_2,T_3) \end{aligned}$$

因为题设张量**H**存在着势W，根据各向同性二阶对称张量函数存在势的充分必要条件[1]，则得到

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\varphi_1}{\partial T_2}-\frac{\partial\varphi_2}{\partial T_1}=0 \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial T_3}-\frac{\partial\varphi_3}{\partial T_1}=0 \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial T_3}-\frac{\partial\varphi_3}{\partial T_2}=0 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

由 (3) 式我们有

$$\begin{aligned} T_1&=\psi_1(H_1,H_2,H_3) \\ T_2&=\psi_2(H_1,H_2,H_3) \\ T_3&=\psi_3(H_1,H_2,H_3) \end{aligned}$$

作矩阵

$$A=\begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial T_1} & \frac{\partial H_1}{\partial T_2} & \frac{\partial H_1}{\partial T_3} \\ \frac{\partial H_2}{\partial T_1} & \frac{\partial H_2}{\partial T_2} & \frac{\partial H_2}{\partial T_3} \\ \frac{\partial H_3}{\partial T_1} & \frac{\partial H_3}{\partial T_2} & \frac{\partial H_3}{\partial T_3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial T_1} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial T_2} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial T_3} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial T_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial T_2} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial T_3} \\ \frac{\partial\varphi_3}{\partial T_1} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial T_2} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial T_3} \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial H_1} & \frac{\partial T_1}{\partial H_2} & \frac{\partial T_1}{\partial H_3} \\ \frac{\partial T_2}{\partial H_1} & \frac{\partial T_2}{\partial H_2} & \frac{\partial T_2}{\partial H_3} \\ \frac{\partial T_3}{\partial H_1} & \frac{\partial T_3}{\partial H_2} & \frac{\partial T_3}{\partial H_3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial H_1} & \frac{\partial\psi_1}{\partial H_2} & \frac{\partial\psi_1}{\partial H_3} \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial H_1} & \frac{\partial\psi_2}{\partial H_2} & \frac{\partial\psi_2}{\partial H_3} \\ \frac{\partial\psi_3}{\partial H_1} & \frac{\partial\psi_3}{\partial H_2} & \frac{\partial\psi_3}{\partial H_3} \end{pmatrix}$$

显然，矩阵A、B是互逆的。

由 (6) 式看出，矩阵A是对称矩阵。根据矩阵理论，对称矩阵的逆矩阵也是对称的，所以B为对称矩阵。从而得到

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\psi_1}{\partial H_2}-\frac{\partial\psi_2}{\partial H_1}=0\\ \frac{\partial\psi_1}{\partial H_3}-\frac{\partial\psi_3}{\partial H_1}=0\\ \frac{\partial\psi_2}{\partial H_3}-\frac{\partial\psi_3}{\partial H_2}=0\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

于是张量函数 $\mathbf{T}=f^{-1}(\mathbf{H})$ 满足存在势的充分条件[1]，因此，张量 $\mathbf{T}$ 有势 W_1，即 (5) 式成立。定理证毕。

对于发生微小变形的弹性体，应力张量 $\boldsymbol{\sigma}=\sigma^{i}_{\cdot j}\mathbf{Э}_i\mathbf{Э}^j=\sigma_{ij}\mathbf{Э}^i\mathbf{Э}^j=\sigma^{ij}\mathbf{Э}_i\mathbf{Э}_j$ 与应变张量 $\boldsymbol{\varepsilon}=\varepsilon^{i}_{\cdot j}\mathbf{Э}_i\mathbf{Э}^j=\varepsilon_{ij}\mathbf{Э}^i\mathbf{Э}^j=\varepsilon^{ij}\mathbf{Э}_i\mathbf{Э}_j$ 成拟线性关系

$$\boldsymbol{\sigma}=2\mu\boldsymbol{\varepsilon}+\lambda\theta\mathbf{G}$$

其中 μ，λ——拉梅系数，θ 为 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 的第一基本不变量，即

$$\theta=\varepsilon^{i}_{\cdot i}=\varepsilon^{1}_{\cdot 1}+\varepsilon^{2}_{\cdot 2}+\varepsilon^{3}_{\cdot 3}$$

$\mathbf{G}$ 为曲线坐标系的度量张量，即

$$\mathbf{G}=g_{ij}\mathbf{Э}^i\mathbf{Э}^j=g^{ij}\mathbf{Э}_i\mathbf{Э}_j=\delta^{i}_{j}\mathbf{Э}_i\mathbf{Э}^j$$

根据各向同性的二阶对称张量函数存在势的充分必要条件，很容易判断，应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 存在着势，且这个势就等于弹性应变能

$$W=\mu(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2)+\frac{\lambda}{2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)^2$$

其中 ε_1，ε_2，ε_3 为应变张量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 的主分量。

根据上述被我们证明的定理，应变张量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 也存在着势。有趣的是，应变张量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 的势恰巧就等于应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 的势 W。此证明很容易，在此略去。

但在一般情况下，张量 $\mathbf{H}$ 的势 W 并不等于张量 $\mathbf{T}$ 的势 W_1，即使最简单的一般拟线性张量函数也是如此。例如，

$$\mathbf{H}=a\mathbf{T}+b\mathbf{G}$$

其中 a，b——两个任意的标量常数，$a\neq 0$。

显然，张量 $\mathbf{H}$ 存在着势 W，且等于

$$W=\frac{a}{2}(T_1^2+T_2^2+T_3^2)+b(T_1+T_2+T_3)$$

但是张量 $\mathbf{T}$ 的势 W_1，经过简单计算，我们得到

$$\begin{aligned}W_1&=\frac{1}{2a}(H_1^2+H_2^2+H_3^2)-\frac{b}{a}(H_1+H_2+H_3)\\&=\frac{a}{2}(T_1^2+T_2^2+T_3^2)-\frac{3b^2}{2a}\end{aligned}$$

在 a，b 可为任意常数时，显然

$$W_1\neq W$$

参 考 文 献

[1] Седов Л. И., *Введение в Механику Сплошной Среды*, Физматгиз, Москва (1962).

A Theorem on Potential of Isotropic Symmetric Second-Order Tensor Function

Cheng Yuan-sheng

(Department of Mechanical Engineering, Shanghai University of Technology, Shanghai)

Abstract

In this paper we propose and prove the following theorem: If the second-order tensor **H** is an isotropic function of a symmetric second-order tensor **T**, and there exists a potential function for **H**, then there will certainly exist a potential function for **T**, too.